Cálculo 3 - 2021.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C3.html

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 1: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução ao curso
Cálculo 3 é principalmente sobre:

1. funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ – que o Bortolossi costuma chamar de curvas parametrizadas, mas nós vamos chamar de trajetórias, e

2. funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, que vão gerar superfícies.

Depois que nós aprendermos o suficiente sobre (1) e (2) nós vamos poder lidar com coisas um pouco mais gerais, como funções $F : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Nossos primeiros objetivos vão ser:

1. Aprender a representar graficamente algumas trajetórias, usando a idéia de traço do Bortolossi (cap.6, p.188), mas escrevendo algumas informações a mais, como "$t = 0$" e "$t = 1$" em alguns pontos,

2. Calcular e representar graficamente vetores tangentes a trajetórias ("vetores velocidade"),

3. Entender vetores secantes (cap.6, p.199),

4. Entender aproximações de primeira ordem pra trajetórias, que dão retas parametrizadas, e depois aproximações de segunda ordem, que vão dar parábolas parametrizadas.

...mas hoje nós vamos fazer uma revisão de algumas idéias de GA.

Você já deve ter visto estas duas convenções diferentes para representar pontos e vetores... am Álgebra Linear tanto pontos quanto vetores em $\mathbb{R}^2$ são representados como matrizes-coluna de altura 2:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$$

e em Geometria Analítica pontos e vetores são escritos de forma diferente – vetores têm uma seta em cima – e representados graficamente de formas diferentes...

$$(2,3) + \overrightarrow{(40,50)} = (42,53)$$

Vetores como setas

Um ponto (a,b) é interpretado graficamente como um ponto (a,b) de $\mathbb{R}^2$, e um vetor $\overrightarrow{(c,d)}$ é interpetado como um deslocamento, e desenhado como uma seta.

Se o vetor $\overrightarrow{(c,d)}$ aparece sozinho a representação gráfica dele é qualquer seta que anda c unidades pra direita e d unidades pra cima. Às vezes a gente pensa que $\overrightarrow{(c,d)}$ é o conjunto de *todas* as setas assim – o conjunto de todas as setas "equipolentes" a esta; veja a p.9 do livro do CEDERJ.

Uma convenção (temporária)

O resultado da expressão $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}$ é o ponto $(a+c,b+d)$, mas a representação gráfica dele vai ser:

1) o ponto (a,b),

2) uma seta indo de (a,b) para $(a+c,b+d)$,

3) o ponto $(a+c,b+d)$,

4) anotações dos lados dos pontos (a,b) e $(a+c,b+d)$ dizendo os "nomes" destes pontos e uma anotação do lado da seta $\overrightarrow{(c,d)}$ dizendo o seu "nome" — como nos dois exemplos abaixo (oops! Falta fazer os desenhos!):

(pôr o desenho aqui)

Nesta aula vai ser obrigatório pôr todos os nomes, mas nas outras não.

A representação gráfica de

$$((1,1)+\overrightarrow{(2,0)})+\overrightarrow{(1,2)}=(1,1)+(\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)})$$

Vai ser um triângulo feito de três pontos e três setas – os que estão em vermelho aqui:

$$\underbrace{(\underbrace{(1,1)+\overrightarrow{(2,0)}}_{(3,1)})+\overrightarrow{(1,2)}}_{(4,3)}=\underbrace{(1,1)+(\underbrace{\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)}}_{\overrightarrow{(3,2)}})}_{(4,3)}$$

O objetivo do próximo exercício é você relembrar como representar graficamente certas expressões com pontos e vetores usando quase só o olhômetro, quase sem fazer contas.

Veja o vídeo!

Desenhando parábolas (quase) no olhômetro

Digamos que conhecemos A, $\vec{v}$, e $\vec{w}$. Então a trajetória

$$P(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$

é uma parábola – e queremos aprender a desenhar os 5 pontos mais fáceis dela, que são $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$, usando o máximo de olhômetro e o mínimo possível de contas...

$\boxed{\text{Veja o vídeo!}}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro

1) Sejam $A = (3,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (2)

2) Sejam $A = (1, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1, 1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (3)

3) Sejam $A = (1,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (4)

4) Sejam $A = (2,6)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2,-1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Obs: você vai precisar de um gráfico que contenha os pontos (0,0) e (12,8).

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 2: Vetores tangentes em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Leia as páginas 187 a 199 do capítulo 6 do Bortolossi.

Nesta aula nós vamos representar curvas parametrizadas pelo traço delas (p.188) com algumas anotações extras – como '$t = 0$', '$t = 1$', '$f(\pi)$' – sobre pontos delas... além disso também vamos desenhar vetores (vetores tangentes!) apoiados em alguns pontos, fazer anotações neles também, e vamos usar tudo isso pra tentar adivinhar (ééééé!) o comportamento de uma curva esquisita.

Exercício 1
Sejam $P(t) = (4,0) + t\overrightarrow{(0,1)}$ e $Q(u) = (0,3) + u\overrightarrow{(2,0)}$.
Represente num gráfico só o traço de $P(t)$ e o de $Q(u)$.
Marque o ponto $P(0)$ e escreva '$t = 0$' do lado dele.
Faça o mesmo para os pontos $P(1)$ ('$t = 1$') e $Q(0)$ e $Q(1)$ ('$u = 0$' e '$u = 1$').

Seja r o traço de $P(t)$ e s o traço de $Q(u)$.
Seja X o ponto de interseção de r e s.
Quais são as coordenadas de X?

Cada ponto de r está "associado" a um valor de t e cada ponto de s a um valor de u. Quais são os valores de t e u associados ao ponto X? Chame-os de t_0 e u_0 e indique-os no seu gráfico – por exemplo, se $t_0 = 99$ e $u_0 = 200$ você vai escrever '$t = 99$' e '$u = 200$' do lado do ponto X.

Exercício 1 (continuação)

Faça o desenho sozinho – talvez você gaste alguns minutos pra decifrar todas as instruções – e depois compare o seu desenho com o dos seus colegas.

Exercício 2

Seja $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

Represente num gráfico só:

1) o traço de $P(t)$,

2) $P(\frac{\pi}{2}) + P'(\frac{\pi}{2})$, escrevendo '$P(\frac{\pi}{2})$' ao lado do ponto e '$P'(\frac{\pi}{2})$' ao lado da seta,

3) Idem para estes outros valores de t: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$.

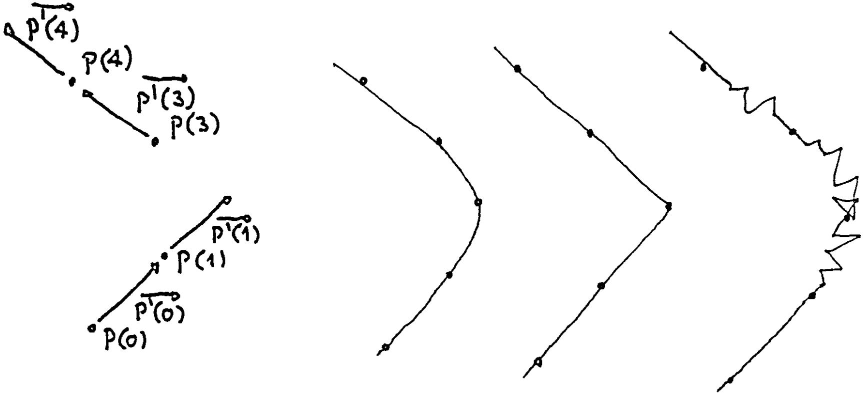
4) Seja $Q(u) = P(\pi) + uP'(\pi)$. Desenhe o traço de $Q(u)$ e anote '$Q(0)$' e '$Q(1)$' nos pontos adequados.

5) O traço de $Q(u)$ é uma reta tangente ao traço de $P(t)$ no ponto $P(\pi)$? Encontre no livro ou no resto da internet uma definição formal de reta tangente e descubra se isto é verdade ou não.

Sobre "adivinhar trajetórias"

Nos próximos dois exercícios nós vamos *começar* a fazer uma coisa que vai ser muito comum aqui nesse curso de Cálculo 3, e que geralmente é inadmissível nos cursos de Cálculo 1: nós vamos tentar "advinhar" como certas trajetórias são a partir de umas poucas informações sobre elas.

Esse "adivinhar" na verdade é "fazer hipóteses razoáveis", e às vezes a gente precisa de mais informações pra descobrir qual hipótese é mais razoável. Na figura do próximo slide eu desenhei à esquerda $P(t)+P'(t)$ para a trajetória de um personagem de videogame em $t=0,1,3,4$, mas existem muitas trajetórias que se passam por esses pontos com essas velocidades. Na primeira figura à direita eu desenhei uma trajetória de uma nave no espaço; na segunda eu desenhei a trajetória de um personagem de um videogame do meu tempo — naquela época nada nos videogames obedecia as leis da Física, e nos meus jogos preferidos o meu personagem era um quadradinho — e na terceira o personagem é atingido por um raio em $t = 1.05$ e ele adquire superpoderes.



Exercício 3

Seja $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$.

Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.

Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Você pode pensar que $P(t)$ é a posição do Super Mario Kart no instante t e $P'(t)$ é o *vetor velocidade* dele no instante t (lembre que um vetor tem "direção", "orientação" e "módulo"!)... você só sabe a posição e a velocidade dele em alguns instantes, isto é, em alguns valores de t, e você vai ter que encontrar uma aproximação razoável, olhométrica, pra pista onde ele está correndo.

Exercício 4

Seja $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$.

Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.

Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 3: como visualizar limites

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Na aula passada eu disse que o *vetor velocidade* da trajetória

$$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

era o *vetor*

$$\begin{array}{rcl} P'(t) & = & (\cos' t, \operatorname{sen}' t) \\ & = & (-\operatorname{sen} t, \cos t) \end{array}$$

que na verdade deve ser escrito como:

$$\overrightarrow{P'}(t) \quad = \quad \overrightarrow{(-\operatorname{sen} t, \cos t)}$$

mas eu esqueci as setinhas — e eu fiquei devendo a explicação de porque é que cada $P'(t)$ deve ser um vetor e não um ponto. Hoje a gente vai ver como o Bortolossi define esse $\overrightarrow{P'}(t)$ como um limite, e vamos ver algumas técnicas pra decifrar a linguagem, a notação e as figuras do livro dele.

Tipos

TUDO que nós vamos fazer em Cálculo 3 pode ser *visualizado* e *tipado*. Você já viu um pouco de tipos em `C` e em Física; em Física os "tipos" são parcialmente determinados pelas unidades — metros são distância, segundos são tempo, metros/segundo é uma unidade de velocidade, e assim por diante...

Dê uma olhada nas páginas 164 a 166 do capítulo 5 do Bortolossi. Todas as expressões que aparecem lá podem ser "tipadas" e interpretadas como posições no eixo x (ou no eixo y, ou no eixo y), ou como distâncias no eixo x (ou no eixo y, ou z), ou como *inclinações*... vamos ver os detalhes disto aos poucos.

Nos próximos exercícios você vai tentar "tipar" cada subexpressão deles. Escreva os seus tipos nos lugares em que eu pus as '?'s. Use português, improvise o quanto precisar, e compare o seu modo de escrever os tipos com os dos seus colegas. Lembre que aqui nós estamos tentando fazer explicitamente, num diagrama, algo que os livros fazem em poucas frases de texto fingindo que é algo óbvio.

Se você tiver dificuldade de fazer o caso geral faça um caso particular primeiro.

Exercício 1

Digamos que $f(x) = x^2$ e que $y = f(x)$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral faça $x_0 = 1$ e $\Delta x = 0.1$.

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{\underbrace{x_0}_{?}+\underbrace{\Delta x}_{?}}_{?})}_{?} - \underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{x_0}_{?})}_{?})}_{?} \,/\, \underbrace{\Delta x}_{?}}_{?}$$

Exercício 2

Digamos que $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, e $P(t) = (f(t), g(t))$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral
faça $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\Delta t = 0.1$.

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\underbrace{P}_{?}\underbrace{(\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?})}_{?}}_{?}-\underbrace{\underbrace{P}_{?}(\underbrace{t_0}_{?})}_{?})}_{?}\,/\,\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?}$$

Exercício 3

Digamos que $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, e $P(t) = (f(t), g(t))$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral
faça $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\Delta t = 0.1$.

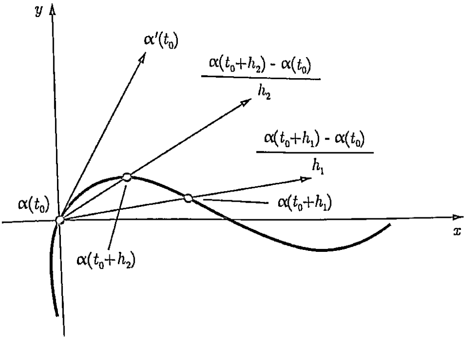
$$\underbrace{\underbrace{P}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?} = \underbrace{(\underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?}, \underbrace{\underbrace{g}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?})}_{?}$$

Agora nós vamos começar a ver como decifrar definições como a das páginas 197–198 do capítulo 6 do Bortolossi. Ele faz tudo de um jeito bem geral, e ele usa $\mathbb{R}^m$ ao invés de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4

Reescreva a conta grande no meio da página 198 do Bortolossi substituindo t_0 por $\frac{\pi}{2}$, h_j por ϵ, $x_1(t)$ por $\cos t$, $x_2(t)$ por $\operatorname{sen} t$, e m por 2. Obs: os '...' vão sumir.

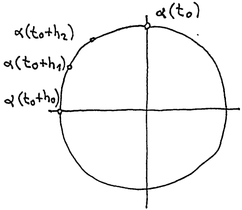
O livro do Bortolossi tem essa figura daqui na página 199:



Isso é um desenho de vetor velocidade como limite de retas secantes num caso geral – o Bortolossi não nos diz quem são $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, nem t_0, nem a sequência $(h_1, h_2, h_3, \ldots)$, e isso sugere que essa figura vai valer pra quaisquer α, t_0 e $(h_1, h_2, \ldots)$, com as devidas adaptações...

Exercício 5

Aqui nós vamos tentar fazer uma figura parecida com a do caso anterior, mas com $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $h_0 = \frac{\pi}{2}$, $0 < \ldots < h_3 < h_2 < h_1 < h_0$, $\lim_{j\to\infty} h_j = 0$. Comece com esta figura aqui,



e encontre valores razoáveis para h_1, h_2 e h_3 que te permitam completar o desenho no olhômetro fazendo as contas de cabeça com aproximações bem grosseiras.

(Não olhe pro que vem depois daqui)

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{F(\underbrace{\underbrace{\underbrace{x_0}_{?}+\underbrace{\Delta x}_{?}}_{?},\underbrace{y_0}_{?}}_{?})}_{?}-\underbrace{F(\underbrace{\underbrace{x_0}_{?},\underbrace{y_0}_{?}}_{?})}_{?})}_{?}\,/\,\underbrace{\Delta x}_{?}}_{?}$$

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 5: Séries de Taylor e MacLaurin

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Mini-revisão de séries de Taylor

Nos meus cursos de Cálculo 2 eu costumo fazer uma introdução rápida a Séries de Taylor pra convencer as pessoas de que a fórmula abaixo é verdade... (mas no semestre passado não deu tempo)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad (*)$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a Série de Taylor de f no ponto 0 é:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (**)$$

onde $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

Mini-revisão de séries de Taylor (2)

Sejam derivs e derivs_0 as seguintes operações:

$\mathsf{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', \ldots)$

$\mathsf{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)$

Repare que $\mathsf{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de funções e $\mathsf{derivs}_0(f)$ retorna uma sequência infinita de números.

Um exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) & = & ax^2 + bx + c, & \qquad & f(0) & = & c, \\
f'(x) & = & 2ax + b, & & f'(0) & = & b, \\
f''(x) & = & 2a, & & f''(0) & = & 2a, \\
f'''(x) & = & 0, & & f'''(0) & = & 0,
\end{array}$$

$\mathsf{derivs}(f) = (ax^2 + bx + c,\ 2ax + b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots)$

$\mathsf{derivs}_0(f) = (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots)$

Mini-revisão de séries de Taylor (3)
...e neste caso os termos do somatório são todos zero a partir de $k = 3$:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ & = & \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f(0)'}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots \\ & = & c + bx + ax^2 + 0 + \ldots \end{array}$$

E neste caso a igualdade da fórmula $(**)$ é verdade.

Mini-revisão de séries de Taylor (4)

Exercício 1 (pra você se convencer de que a fórmula (∗∗) vale sempre que a função f for um polinômio).

Seja $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}(f)$.

b) Calcule $\mathsf{derivs}_0(f)$.

c) Expanda o somatório $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ e verifique que neste caso a igualdade (∗∗) é verdade (como no slide anterior).

Exercício 2.

Para cada uma das 'f's abaixo calcule $\mathsf{derivs}(f)$ e $\mathsf{derivs}_0(f)$.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \cos x$

d) $f(x) = \cos 2x$

Mini-revisão de séries de Taylor (5)

No caso geral – em que a f não é polinomial – a expansão do somatório na fórmula (∗∗) dá uma soma com infinitos termos não-zero... e isto às vezes é formalizado desta forma:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)$$

À medida que o N cresce a expressão $\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ – a série de Taylor de f em $x = 0$ truncada até grau N – vira um polinômio com mais termos, e cada polinômio novo com mais termos que o anterior é uma aproximação melhor para a função f.

A série de Taylor truncada até grau N às vezes vai ser chamada de aproximação de grau N ou de polinômio de Taylor de grau N.

Mini-revisão de séries de Taylor (6)

Os detalhes são bem complicados – você vai ver todas as contas horríveis que demonstram as estimativas de erro numa matéria do Fábio – mas deve dar pra entender a idéia geral a partir dos desenhos e animações das páginas da Wikipedia.

Dê uma olhada em:

https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Taylor

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series#Approximation_error_and_convergence

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s_theorem

principalmente nas figuras que comparam aproximações de grau 1, 2, 3, etc. As páginas da Wikipedia em português têm menos figuras que as em inglês, então eu pus os links pras páginas em inglês também.

Exercício 3.
Escreva como polinômios:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ para $f(x) = e^x$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ para $f(x) = \cos x$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ para $f(x) = \cos 2x$

Exercício 4.

Em cada um dos itens abaixo encontre os polinômios
$g_0(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$,
$g_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$,
$g_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$,
e represente graficamente as funções $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ num gráfico só. Use os truques da aula passada!

a) $f(x) = e^x$
b) $f(x) = \cos x$
c) $f(x) = \cos 2x$

A série de Taylor no ponto a

Compare as duas igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ f(x-a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

A segunda é mais geral que a primeira: se fizermos a substituição $a := 0$ na segunda obtemos a primeira. A segunda é a série de Taylor "geral" — lembre que no slide 2 eu só defini a "série de Taylor no ponto 0"... A primeira é chamada de "série de Maclaurin". Eu às vezes confundo os dois nomes e acho que acabei gravando o vídeo com os nomes trocados. =(

Ponto base

As contas com a série de Taylor "no ponto a" parecem difíceis principalmente porque a maioria das pessoas está tão acostumada a fazer expansões como estas

$$\begin{array}{rcl} 10(x-a) & = & 10x - 10a \\ (x-a)^2 & = & x^2 - 2ax + a^2 \end{array}$$

que elas fazem elas no automático — e essas expansões vão deixar as contas **MUITO** piores. A gente vai ter que se acostumar a não fazer isso... quando o nosso "ponto base" for o ponto a a gente vai ter que tratar $(x-a)$ como algo mais "simples" que x, e em algumas situações quando aparecer um x sozinho vai ser até melhor trocá-lo por $(x-a)+a$.

Polinômios em $(x-a)$

Um polinômio de grau N em x é uma soma da forma:

$$\sum_{k=0}^{N} b_k x^k$$

e um polinômio de grau N em $(x-a)$ é uma soma da forma:

$$\sum_{k=0}^{N} c_k (x-a)^k$$

onde os 'b_k's e 'c_k's são expressões que não dependem de x.

Exercício 5.

a) Converta $(x+10)^2 + 3x + 4$ para um polinômio em x.
b) Converta x^2 para um polinômio em $(x-10)$.
c) Converta $(x+10)^2 + 3x + 4$ para um polinômio em $(x-10)$.

Dica 1: quem são $N, b_0, \ldots, b_N, c_0, \ldots, c_N$?
Dica 2: você pode terminar cada resposta sua com um passo como este aqui:

$$42(x-5)^3 + 200(x-5)^2 + 99(x-5)^0 \quad = \quad \sum_{k=0}^{3} c_k (x-5)^k$$

se $N = 3$, $c_3 = 42$, $c_2 = 200$, $c_1 = 0$, $c_0 = 99$.

Desenhos Desanimados

Quando eu era criança todos os meus amigos
adoravam Speed Racer:
http://www.youtube.com/watch?v=suCm1w_KTiY
eu detestava — eu achava que a animação era péssima.

Anos depois um amigo meu inventou um termo genial
pra esse tipo de desenho com poucos frames por segundo:
desenhos desanimados.

Nos próximos exercícios nós vamos fazer desenhos ainda
mais desanimados que os episódios do Speed Racer
pra entender como é que as retas tangentes e as
melhores aproximações por parábolas variam.

Exercício 6

Seja $P(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma trajetória.
(Vamos usar trajetórias diferentes em itens diferentes).
Seja:

$$Q(\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta t)^k}{k!} P^{(k)}(t_0)$$

Vamos usar 't_0's e 'n's diferentes em itens diferentes.

Assista este vídeo:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-taylor.mp4
Ele explica um truque pra desenhar parábolas que vai ser útil nos itens em que n for 2.

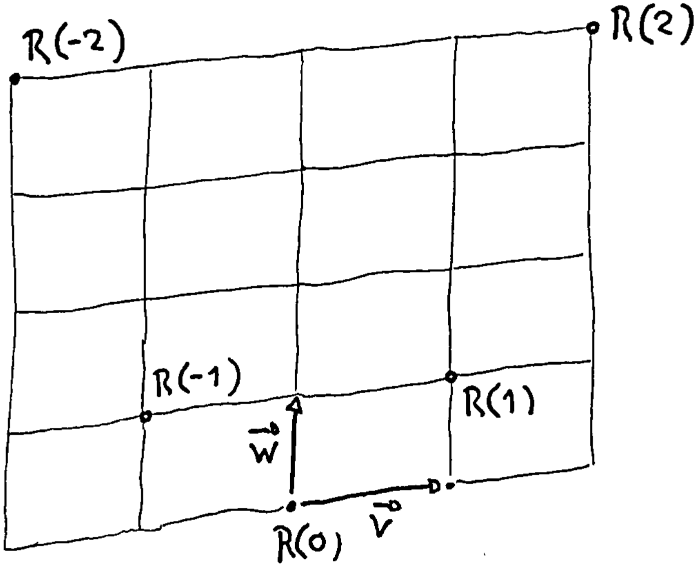
Dica importante: dá pra fazer os desenhos do exercício 6 sem contas se vocês souberem $P(t_0)$, $P'(t_0)$, $P''(t_0)$...

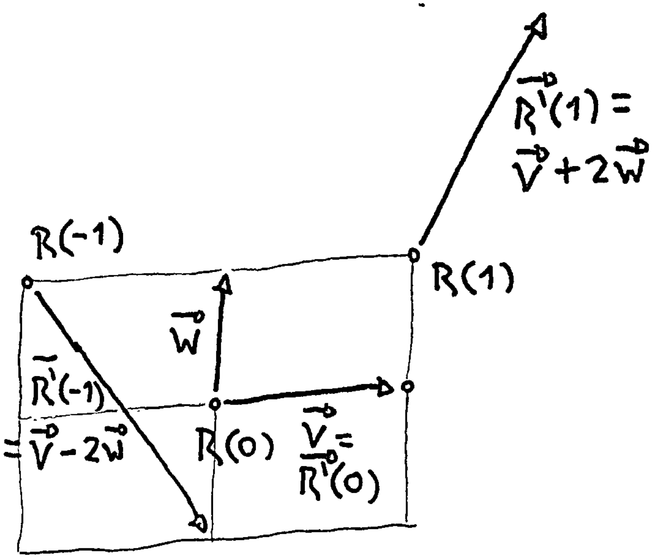
Dois jeitos de desenhar parábolas

Assista o vídeo:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-taylor-pa.mp4

SE $R(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$

ENTÃO TEMOS DOIS JEITOS
RÁPIDOS PRA DESENHAR
UMA APROXIMAÇÃO PRA
TRAJETÓRIA DE $R(t)$ -
QUE É UMA PARÁBOLA
PARAMETRIZADA...


R(-2)
R(2)
R(-1)
R(1)
$\vec{w}$
$\vec{v}$
R(0)



$\vec{R}'(1) =$
$\vec{v} + 2\vec{w}$
$R(-1)$
$R(1)$
$\vec{w}$
$\vec{R}'(-1)$
$= \vec{v} - 2\vec{w}$
$R(0)$
$\vec{v} =$
$\vec{R}'(0)$

Exercício 6 (cont.)

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 1$.
a) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
b) Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
c) Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 0$.
a') Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
b') Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
c') Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 2$.
a") Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
b") Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
c") Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Exercício 6 (cont.)

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, t)$ e $n = 1$.
d) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
e) Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
f) Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, t)$ e $n = 0$.
d') Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
e') Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
f') Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, t)$ e $n = 2$.
d") Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
e") Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
f") Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Exercício 6 (cont.)

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 1$.
g) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
h) Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
i) Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 0$.
g') Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
h') Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
i') Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 2$.
g") Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
h") Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
i") Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Exercício 6 (cont.)

Nos próximos itens considere que $P(t) = (0,3) + t\overrightarrow{(2,1)}$ e $n = 2$.
j) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
k) Seja $t_0 = 1$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
i) Seja $t_0 = 2$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (t, t^2)$ e $n = 2$.
m) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
n) Seja $t_0 = 1$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
o) Seja $t_0 = 2$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 7: Cortes em superfícies

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

No semestre passado eu achei que todo mundo ia achar que visualizar cortes em superfícies era a coisa mais fácil do mundo, deixei isso pro final do semestre, e me ferrei. Dessa vez vou apresentar cortes o mais cedo possível, de vários jeitos diferentes, e nós vamos usar esses cortes pra muitas coisas (pra vocês exercitarem o olhômetro de vocês bastante).

Comece lendo as páginas 81–100 do capítulo 3 do Bortolossi.

Repare que ele prefere usar funções que têm definições curtas, como $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Nós vamos usar bastante funções que dão superfícies fáceis de lembrar e em que é fácil calcular a altura da superfície em cada ponto de cabeça, mas que são definidas ou por casos usando mínimos e máximos.

Exercício 1.

Faça toda a questão 1 da P1 do semestre passado:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-P1.pdf#page=3

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 8: curvas de nível e diagramas de numerozinhos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Links:

Sobre “adivinhar trajetórias”:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-vetor-tangente.pdf#page=6

Diagramas de numerozinhos (2020.2):
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-rcadeia1.pdf#page=14

Mini-teste sobre cortes em superfícies no olhômetro (2020.2):
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf#page=4

Questão 1 da P1 de 2020.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-P1.pdf#page=8

Exercício 1.
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x-2 \\ g(x) & = & 6-x \\ h(x) & = & \min(f(x), g(x)) \\ w(x) & = & \max(h(x), 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} V(x,y) & = & w(x) \\ H(x,y) & = & w(y) \\ P(x,y) & = & \min(V(x,y), H(x,y)) \\ C(x,y) & = & \max(V(x,y), H(x,y)) \end{array}$$

a) Faça os gráficos de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $w(x)$.
(Dica: isto é bem parecido com a questão 1 da P1 de 2020.2).
b) Faça os diagramas de numerozinhos de $V(x,y)$, $H(x,y)$, $P(x,y)$, $C(x,y)$.

Exercício 1 (cont.)

Represente graficamente, em 3D com perspectiva improvisada, as superfícies abaixo. Isto é bem parecido com a questão 1f da P1 de 2020.2.

c) $z = V(x, y)$
d) $z = H(x, y)$
e) $z = P(x, y)$
f) $z = C(x, y)$

Exercício 2.
Sejam S_V, S_H, S_P e S_C estas superfícies,
e $X(x_0)$, $Y(y_0)$, $Z(z_0)$ estes planos:

$$\begin{array}{rcl}
S_V & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = V(x,y)\,\}, \\
S_H & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = H(x,y)\,\}, \\
S_P & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = P(x,y)\,\}, \\
S_C & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = C(x,y)\,\}, \\
X(x_0) & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0\,\}, \\
Y(y_0) & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = y_0\,\}, \\
Z(z_0) & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_0\,\},
\end{array}$$

Exercício 2 (cont.)
Represente graficamente em perspectiva improvisada:
a) $S_P \cap Z(1)$,
b) $S_C \cap Z(1)$,
d) $S_V \cap Z(1)$,
e) $S_V \cap Z(1)$,

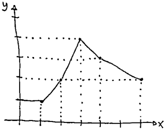
Agora desenhe num gráfico só a superfície S_P
e estes quatro cortes:
f) $S_P \cap X(3)$,
g) $S_P \cap X(4)$,
h) $S_P \cap Y(4)$,
i) $S_P \cap Z(1)$.

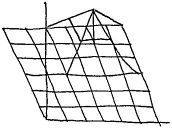
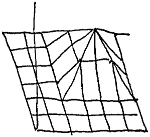
Dica: os itens f, g, h e i são parecidos com este mini-teste:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf

Exercício 3.
Este é um exercício pra fazer todo olhômetro, só olhando pras figuras que você já fez — os diagramas de numerozinhos e as figuras 3D. *Se você não conseguir tente de novo, descanse, tente mais uma vez, repita, etc — e discuta com os seus colegas!*

Vídeo sobre o exercício 3:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-curvas-de-nivel-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=usBNtNyZRCA

Figuras que eu usei no vídeo:



Exercício 3 (cont.)

Considere a superfície em que $z = P(x, y)$.

a$_0$) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$. Quanto é z neste ponto?

a$_1$) Digamos que $(x_1, y_1) = (x_0 + 0.1, y_0)$; ou seja a gente andou 0.1 pra direita. Quanto é z neste ponto?

a$_2$) Digamos que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0 + 0.1)$; ou seja a gente andou 0.1 pra cima a partir de (x_0, y_0). Quanto é z neste ponto?

a$_3$) Digamos que $(x_3, y_3) = (x_0 + 0.1, y_0 + 0.1)$. dá pra chegar nele a partir de (x_1, y_1) andando 0.1 pra cima, e também dá pra chegar nele a partir de (x_2, y_2) andando 0.1 pra direita. Quanto vale z em (x_3, y_3)?

Exercício 3 (cont.)

Considere a superfície em que $z = P(x, y)$.

b_0) Digamos que $(x_0, y_0) = (4, 3)$. Quanto é z neste ponto?

b_1) Digamos que $(x_1, y_1) = (x_0 + 0.1, y_0)$; ou seja a gente andou 0.1 pra direita. Quanto é z neste ponto?

b_2) Digamos que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0 + 0.1)$; ou seja a gente andou 0.1 pra cima a partir de (x_0, y_0). Quanto é z neste ponto?

b_3) Digamos que $(x_3, y_3) = (x_0 + 0.1, y_0 + 0.1)$. dá pra chegar nele a partir de (x_1, y_1) andando 0.1 pra cima, e também dá pra chegar nele a partir de (x_2, y_2) andando 0.1 pra direita. Quanto vale z em (x_3, y_3)?

Exercício 4.
O que você acabou de fazer no exercício 3 costuma ser feito em linguagem matemática e numa notação bem compacta, como:

$$\underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{P(\underbrace{x_0+\underbrace{\Delta x}_{\text{deslocamento em }x},y_0}_{\text{ponto novo}})}_{z\text{ novo}} - \underbrace{P(\underbrace{x_0,y_0}_{\text{ponto original}})}_{z\text{ original}}\right)}_{\text{deslocamento em }z} / \Delta x}_{\text{taxa de variação}}$$

Agora você vai tentar fazer uma série de itens como os do exercício 3, mas na notação nova, e fazendo tudo de cabeça.

Exercício 4 (cont.)
Calcule sem escrever nada:

a) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e $\Delta x = 0.1$.
Calcule $(P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0))/\Delta x$.

b) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e $\Delta x = 0.2$.
Calcule $(P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0))/\Delta x$.

c) Digamos que $(x_0, y_0) = (4, 3)$ e $\Delta y = 0.1$.
Calcule $(P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0))/\Delta y$.

d) Digamos que $(x_0, y_0) = (4, 3)$ e $\Delta x = 0.1$.
Calcule $(P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0))/\Delta y$.

O que você fez nos exercícios anteriores correponde a calcular derivadas parciais por limites, e é bem parecido com o que a gente faz no início de Cálculo 1... Depois a gente aprende a calcular derivadas “por contas”, usando regras de derivação, e a gente quase não mexe mais com limites.

Em Cálculo 3 a gente vai precisar voltar à definição de derivada parcial como limite várias vezes pra gente conseguir visualizar certas derivadas complicadas em várias dimensões... então a gente geralmente vai alternar entre os dois jeitos de calcular derivadas parciais.

Exercício 5.
O exercício [01] da seção 5.5 do livro do Bortolossi, na página 177 do capítulo 5, pede pra vocês calcularem algumas derivadas parciais "por contas"/"por regras de derivação". Os itens abaixo são adaptados do exercício [01] dele. Sejam:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) &=& 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1, \\ g(x,y) &=& xe^y + y\,\mathrm{sen}(x), \\ h(x,y) &=& \sqrt{x^2+4y^2}, \\ m(x,y) &=& (x^3-y^2)^2. \end{array}$$

a) Calcule $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$.
b) Calcule $g_x(x,y)$ e $g_y(x,y)$.
c) Calcule $h_x(x,y)$ e $h_y(x,y)$.
d) Calcule $m_x(x,y)$ e $m_y(x,y)$.

Exercício 5 (cont.)

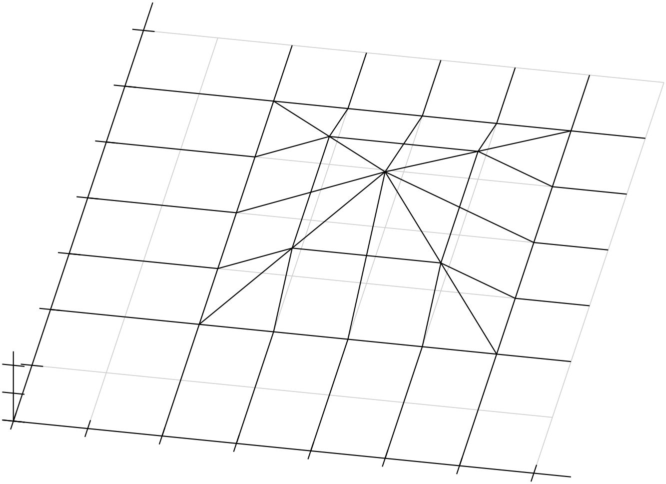
e) Calcule $f(10,2)$, $f_x(10,2)$, $f_y(10,2)$.

f) Calcule $f(y,x)$, $f_x(y,x)$, $f_y(y,x)$.

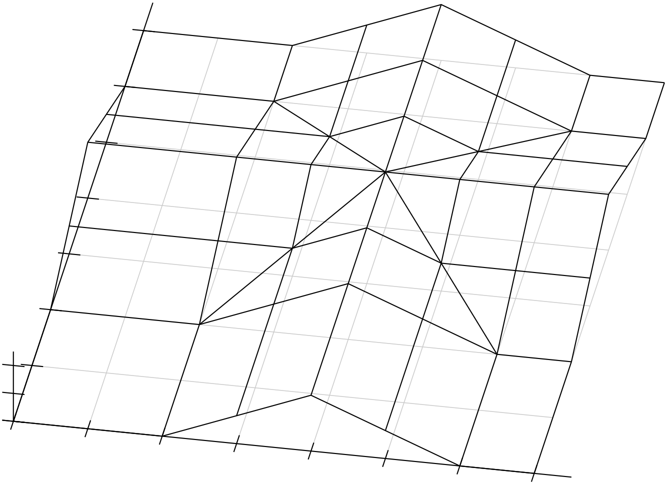
g) Calcule $f(x,x)$, $f_x(x,x)$, $f_y(x,x)$.

h) Calcule $h(y,x)$, $h_x(y,x)$, $h_y(y,x)$.

Pirâmide



Cruz



Cálculo 3 - 2021.1

Aula ??: revisão de planos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Antes de voltar pra superfícies vamos rever algumas coisas sobre planos que às vezes eram vistas em GA...

O material de hoje é uma adaptação disto aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=45
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=46

Retas parametrizadas em $\mathbb{R}^3$
Sejam:
$r_1 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_2 = \{\, (2,2,1) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_3 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (0,2,1) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (1,2,1) + t\overrightarrow{(2,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$

Quais destas retas se interceptam? Em que pontos? Em que 't's?
Quais destas retas são paralelas? Quais destas retas são coincidentes?
A terminologia para retas que não se interceptam e não são paralelas é estranha – "retas *reversas*".

As retas acima são *parametrizadas*.
O que é uma *equação de reta* em $\mathbb{R}^3$?
$\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 5y = 6 \,\}$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$;
$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y + 6z = 7 \,\}$ é um *plano* em $\mathbb{R}^3$...

Exercício: encontre
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\,\}$,
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=2\,\}$,
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1\,\}$,
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=3\,\}$,
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\,\}$,
e visualize cada um destes planos.

Alguns dos nossos planos preferidos:
$\pi_{xy}=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\,\}$ (x e y variam, $z=0$)
$\pi_{xz}=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\,\}$ (x e z variam, $y=0$)
$\pi_{yz}=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\,\}$ (y e z variam, $x=0$)

Uma notação para planos

Notação (temporária):
$[\text{equação}] = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{equação} \,\}$
Obs: $\pi_{xy} = [z = 0]$, $\pi_{xz} = [y = 0]$, $\pi_{yz} = [x = 0]$.

Exercício: visualize:

$\pi_1 = [x = 1]$, $\qquad \pi_8 = [y = x]$,
$\pi_2 = [y = 1]$, $\qquad \pi_9 = [y = 2x]$,
$\pi_3 = [z = 1]$, $\qquad \pi_{10} = [z = x]$,
$\pi_4 = [z = 4]$, $\qquad \pi_{11} = [z = x + 1]$,
$\pi_5 = [z = 2]$,

Quais deles planos são paralelos?
Quais deles planos se cortam? Onde?

Escolha dois planos destes que se cortam.
Você consegue dizer dois pontos da interseção deles?
Você consegue parametrizar a reta que é a interseção deles?

Faça isto para vários pares de planos que se cortam.

Planos parametrizados
Dá pra parametrizar planos em $\mathbb{R}^3$...
Sejam
$\pi_6 = \{\, \underbrace{(2,2,0) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a,b \in \mathbb{R} \,\},$
$\pi_7 = \{\, \underbrace{(3,2,1) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a,b \in \mathbb{R} \,\}.$
Calcule e visualize:
$(0,0)_{\Sigma_6}$, $(1,0)_{\Sigma_6}$, $(0,1)_{\Sigma_6}$, $(1,1)_{\Sigma_6}$,
$(0,0)_{\Sigma_7}$, $(1,0)_{\Sigma_7}$, $(0,1)_{\Sigma_7}$, $(1,1)_{\Sigma_7}$,
e resolva:
$(a,b)_{\Sigma_6} = (0,3,0)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,1)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,0)$.

Nossos três modos preferidos de descrever planos em $\mathbb{R}^3$ (por equações) são:
$[z = ax + by + c]$ (“z em função de x e y”),
$[y = ax + bz + c]$ (“y em função de x e z”),
$[x = ay + bz + c]$ (“x em função de y e z”).

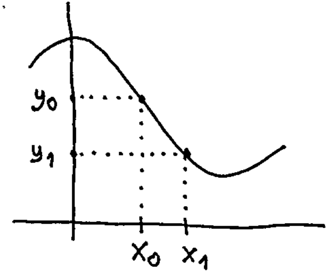
Cálculo 3 - 2021.1

Mini-teste 1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Em $\mathbb{R}^2$ nós sabemos levantar pontos do eixo x pra uma curva $y = f(x)$, e sabemos projetar estes pontos no eixo vertical...



...e também sabemos projetar esses pontos numa reta tangente à nossa curva $y = f(x)$, mas aí tanto as contas quanto os desenhos são mais complicados.

Introdução (2)

O passo seguinte é aprendermos a fazer algo parecido com trajetórias e superfícies em $\mathbb{R}^3$, e usando planos tangentes além de retas tangentes. Os desenhos vão ficar bem mais complicados, as contas também, e as contas vão ficar praticamente impossíveis de entender se a gente não souber visualizar o que elas querem dizer.

Eu preciso que vocês comecem a fazer os desenhos de vocês, e comecem a praticar isso bastante. Eu não conheço nenhum lugar – livro, artigo, site, o que for – que ensine direito as técnicas pra fazer os desenhos que a gente precisa fazer em C3 de um jeito que os desenhos fiquem claros, então estou tendo que inventar um jeito de ensinar isso. A gente vai começar vendo os tipos de desenhos que as pessoas aprenderam a fazer em C3 no semestre passado, mas dessa vez um jeito bem mais organizado, e agora cada técnica que a gente vai usar vai ter nome.

Links

Alguns links pra desenhos que aprendemos
a usar e a fazer no semestre passado:

Cortes no olhômetro numa superfície curva:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-rcadeia1.pdf#page=27

Tem vários desenhos no PDF sobre plano tangente –
veja principalmente as páginas 10, 23 e da 27 em diante...
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-plano-tang.pdf#page=10
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-plano-tang.pdf#page=23

Leia a "Dica 7", que é sobre desenhos feitos pra você mesmo,
desenhos feitos pra um colega que seja seu amigo, e desenhos
feitos pra que todo mundo entenda...
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1-dicas.pdf#page=7

Este mini-teste vai ser sobre desenhos ainda mais básicos do que os dos links da página anterior. As questões vão ser baseadas nas questões daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-planos.pdf

As regras vão ser as mesmas dos mini-testes do semestre passado:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf#page=2

(Leia com muita atenção!!!!!!!!!!!)

As questões vão ser disponibilizadas às 20:00 da sexta 23/julho/2021 e vocês vão ter até as 20:00 do sábado 24/julho/2021 pra entregar as respostas.

Questão 1

(0.2 pts) Sejam:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 & = & [z=1], \\ \pi_2 & = & [x+y=3], \\ r & = & \pi_1 \cap \pi_2, \end{array}$$

e sejam A e B dois pontos da reta r —
que você vai escolher e dizer as coordenadas deles.

Represente graficamente π_1, π_2, r, A e B.

Lembre que o desafio principal é fazer desenhos
que fiquem muito claros e legíveis!

Questão 2

(0.3 pts) Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
(a,b)_{\Sigma_3} & = & (3,1,1) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}, \\
(c,d)_{\Sigma_4} & = & (2,1,3) + c\overrightarrow{(-1,1,0)} + d\overrightarrow{(0,0,1)}, \\
\pi_3 & = & \{\,(a,b)_{\Sigma_3} \mid a,b \in \mathbb{R}\,\} \\
\pi_4 & = & \{\,(c,d)_{\Sigma_4} \mid c,d \in \mathbb{R}\,\}
\end{array}$$

Represente graficamente, se possível num desenho só:

a) $(0,0)_{\Sigma_3}$, $(1,0)_{\Sigma_3}$, $(0,1)_{\Sigma_3}$,

b) $(0,0)_{\Sigma_4}$, $(1,0)_{\Sigma_4}$, $(0,1)_{\Sigma_4}$,

c) os planos π_3 e π_4,

d) os pontos $(-2,1)_{\Sigma_3}$ e $(1,-2)_{\Sigma_4}$.

Dicas pra questão 2

Depois de fazer os itens a e b você deve ser capaz de descobrir os planos π_3 e π_4 no olhômetro, já que você já tem três pontos de cada um.

Dê nomes curtos para os pontos $(3,1,1)$ e $(2,1,3)$ e para os quatro vetores.

Desenhe os vetores que você acha que podem deixar o seu desenho mais fácil de entender.

Escreva quantas coisas do lado do seu desenho quanto você quiser.

Se você quiser fazer uma anotação do lado de um ponto ou vetor mas você achar que a anotação é grande demais você pode escrever ela mais longe e usar uma seta.

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 13: entendendo visualmente derivadas parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Nossa equação do plano preferida

Nós vimos na revisão de planos que não existe uma "equação do plano" só... existem várias, e em geral a gente escolhe usar a que é mais conveniente. Hoje nós vamos preferir uma "equação do plano" que faz com que certas contas sejam muito fáceis de fazer de cabeça — desde que a gente faça elas em ordem lembrando os resultados anteriores.

Exercício 1.
Seja:

$$F(x, y) = 10(x - 42) + 100(y - 99) + 23$$

Calcule de cabeça:
a) $F(42, 99)$
b) $F(42 + 1, 99)$
c) $F(42, 99 + 1)$
d) $F(42 + 0.23, 99)$
e) $F(42, 99 + 0.34)$

Exercício 2.

Seja:

$$F(x,y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$$

Calcule de cabeça:

a) $F(x_0, y_0)$
b) $F(x_0 + 1, y_0)$
c) $F(x_0, y_0 + 1)$
d) $F(x_0 + \Delta x, y_0)$
e) $F(x_0, y_0 + \Delta y)$

Exercício 3.

Leia as páginas 170 e 171 do cap.5 do Bortolossi —
a partir da Definição 5.1 dele.

a) Verique que se usarmos $n = 2$ na definição dele temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1 + h, p_2) - f(p_1, p_2)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, p_2 + h) - f(p_1, p_2)}{h}\end{aligned}$$

Agora digamos que $f(x, y) = a(x - p_1) + b(y - p_2) + c$.
Calcule de cabeça:

b) $f(p_1, p_2)$

c) $f(p_1 + h, p_2)$, $\frac{f(p_1+h,p_2)-f(p_1,p_2)}{h}$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(p_1+h,p_2)-f(p_1,p_2)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2)$

d) $f(p_1, p_2 + h)$, $\frac{f(p_1,p_2+h)-f(p_1,p_2)}{h}$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(p_1,p_2+h)-f(p_1,p_2)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2)$

Agora leia com atenção o bloco da p.171 do Bortolossi que começa com "CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!"...

Daqui a algumas aulas nós vamos começar a aprender a usar várias notações que o Bortolossi menciona que existem e explica super rápido, mas depois ele diz que vai evitar usar...

Eu chamo elas de "notações de físicos".

Quando a gente definir $G(z,w)$ desta forma

$$G(z,w) = e^z + 4w$$

isso vai querer dizer que a "primeira variável" da G é z e a segunda é w, e que $\frac{\partial}{\partial z}G = D_1G$ e que $\frac{\partial}{\partial w}G = D_2G$...

Se depois usarmos a função G com outras letras como argumentos — por exemplo $G(x,y)$ ou $G(w,z)$ — isso não vai mudar o significado de $\frac{\partial}{\partial z}G$ e $\frac{\partial}{\partial w}G$.

Exercício 4.
Agora digamos que:

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & a(x-x_0)+b(y-y_0)+c \end{array}$$

Esse "$(x,y) \mapsto \ldots$" indica que o nosso nome preferido pra primeira variável (ou argumento) da g é 'x', que o nosso nome preferido pra segunda variável é 'y' — e que $\frac{\partial}{\partial x} g = D_1 g$ e $\frac{\partial}{\partial y} g = D_2 g$.

a) Calcule $\frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0)$.
b) Calcule $\frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0)$.

Dica: compare que o exercício 3 e escreva o quando precisar até entender todos os detalhes da tradução. É quase impossível fazer este exercício de cabeça.

Dois videos do semestre passado

Assista estes dois vídeos do semestre passado:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C3-plano-tang-3.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=NYDkZJGZSy8

http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C3-plano-tang-4.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=UVJntqN10fg

Os próximos dois exercícios são adaptações dos exercícios 9 e 10 do semestre passado.

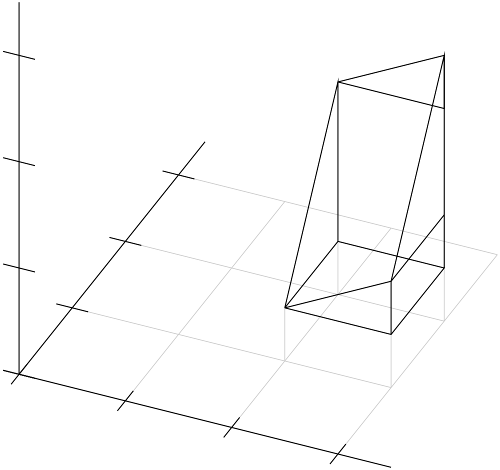
Dica importante: comece com uma F simples

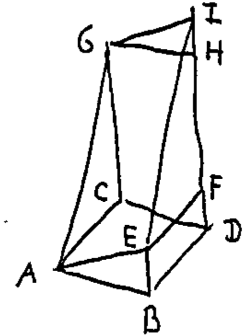
Você pode pensar que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos próximos dois exercícios é uma função suave qualquer, mas acho que é mais fácil fazer os exercícios em duas etapas... Comece supondo que a F é da forma

$$F(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c,$$

e depois a gente vê como tratar os caso em que a F é mais complicada que isso.

Exercício 5 (adaptado do "exercício 9" do semestre passado)
Olhe para os diagramas do próximo slide. Eu ainda não sei fazer esses diagramas direito no computador, então à direita do diagrama feito por computador eu pus uma versão dele feita à mão com os nomes dos pontos. Digamos que $A = (x_0, y_0, z_0)$, e que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{(1, 0, F_x(x_0, y_0))}$ e $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{(0, 1, F_y(x_0, y_0))}$.
Descubra as coordenadas dos pontos B, C, D, E, F, G, H, I.

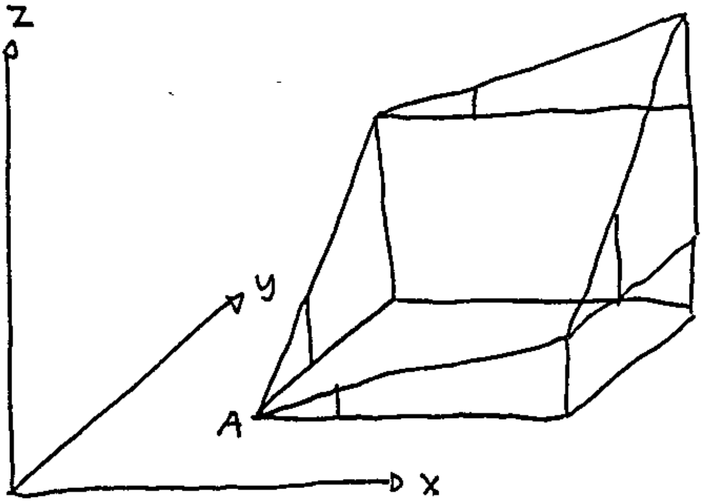



I
G
H
C
F
D
E
A
B

Exercício 6.
(Este exercício generaliza as idéias do exercício anterior).
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ S & = & \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\,\}, \\ A_0 & = & (x_0, y_0), \\ A & = & (x_0, y_0, F(x_0, y_0)), \\ \vec{v} & = & \overrightarrow{(1, 0, F_x(A_0))}, \\ \vec{w} & = & \overrightarrow{(0, 1, F_y(A_0))}, \\ \alpha, \beta & \in & \mathbb{R}. \end{array}$$

a) Identifique no diagrama do próximo slide os pontos:
$A + \vec{v}$, $A + \alpha\vec{v}$, $A + \vec{w}$, $A + \beta\vec{w}$, $A + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$,
Dica: α é aproximadamente 4, e β aproximadamente 2.5.


z
y
x
A

Exercício 6 (cont.)

b) Verifique – visualmente – que os pontos
$A + \vec{v}$, $A + \alpha\vec{v}$, $A + \vec{w}$, $A + \beta\vec{w}$, $A + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$,
do item (a) estão todos no mesmo plano.

c) Verifique que esse plano é o plano tangente
à superfície S no ponto A.

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 14: Notação de físicos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Na página 170–172 do cap.5 o Bortolossi fala de algumas convenções sobre variáveis que ele vai usar o mínimo possível, porque elas às vezes são difíceis de interpretar e às vezes são ambíguas...

Isso é um assunto bem maior e mais complicado do que parece. Quando eu fiz graduação em algumas matérias essas convenções – que eu vou chamar de "notação de físicos" – eram totalmente proibidas, mas em outras elas eram tratadas como algo óbvio que todo mundo sabia usar.

A gente vai aprender alguns dos princípios por trás da "notação de físicos" e vamos como usar essa "notação de físicos" como uma abreviação pra uma notação muito menos ambígua que matemáticos "estritos" aceitam.

Links (pra matemáticos que estiverem lendo isso aqui)
Eu aprendi "notação de físicos" estudando EDPs pelo livro do Fritz John e estudando Cálculo de Variações:
`https://www.springer.com/gp/book/9781461599661` Fritz John
`http://www-users.math.umn.edu/~olver/ln_/cv.pdf` Olver
e um pouco pelos livros do Física do Moysés Nussenzveig.

O "The Language of Mathematics" do Mohan Ganesalingam em coisas muito boas sobre variáveis. Amazon, MAA Reviews.

Andrej Bauer: "The dawn of formalized mathematics".
A partir do slide 15.

Mais links (pra matemáticos)

https://en.wikipedia.org/wiki/Physical_quantity
https://en.wikipedia.org/wiki/Dependent_and_independent_variables
https://en.wikipedia.org/wiki/Variable_(mathematics)
https://en.wikipedia.org/wiki/Variable_(computer_science)

Redish/Gupta: "Making Meaning with Math in Physics: A Semantic Analysis"

Ellermeijer/Heck: "Differences between the use of mathematical entities in mathematics and physics and the consequences for an integrated learning environment." Page 6.

Silvanus P. Thompson: Calculus Made Easy (1910)

Vou usar bastante o livro do Silvanus P. Thompson...
Ele está em inglês, mas descobri uma versão em LaTeX dele feita a partir de uma versão em domínio público — esta aqui:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf

que eu consigo modificar. Vou tentar traduzir algumas páginas dessa versão pra português.

Links pra uma versão em HTML do livro
e pra comentários sobre ela:

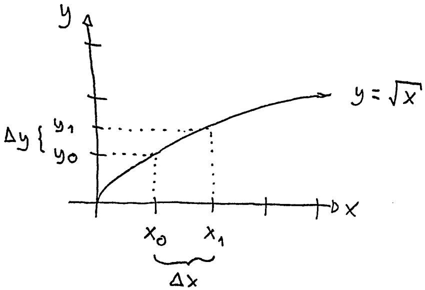
https://calculusmadeeasy.org/
https://avidemia.com/calculus-made-easy/
https://news.ycombinator.com/item?id=27991120
https://news.ycombinator.com/from?site=calculusmadeeasy.org

Obs: o Silvanus não distingue dx de Δx.

Um primeiro exemplo

Digamos que $y = \sqrt{x}$.

Podemos considerar que x e y “variam juntos”, “obedecendo certas restrições”. O conjunto dos pontos (x, y) que obedecem essas restrições é $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}\,\}$, e o gráfico é:



Um primeiro exemplo (2)
Em geral vamos considerar que x_0 é "mais fixo" do que x_1. Quando dizemos "diminua Δx; ele era 1 e passa a ser 0.5" o x_0 não muda e o x_1 sim — e temos $y_0 = \sqrt{x_0}$, $y_1 = \sqrt{x_1}$, $\Delta y = y_1 - y_0$.

O Silvanus Thompson usa os termos "independent variable" e "dependent variable". Neste exemplo nós vamos considerar que x_0 e x_1 são as variáveis independentes, e que a partir dos valores delas dá pra calcular os valores das variáveis dependentes, que são Δx, y_0, y_1, e Δy.

Também daria pra considerar que as variáveis independentes são x_0 e Δx... aí x_1 passaria a ser uma das variáveis dependentes.

O truque de omitir nomes de funções

O “normal” seria a gente dizer que $y = f(x) = \sqrt{x}$, mas os “físicos” às vezes dizem só:

$$y = y(x) = \sqrt{x}$$

e aí em contextos em que a letra y é usada como um nome de função ela é interpretada como f...
Aí a gente vai ter coisas como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Veja as contas do próximo slide.

O truque de omitir nomes de funções (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= f'(x_0)
\end{aligned}
$$

Exercício 1

Assista este vídeo do 6:13 até o 12:56:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=fMNgr5wDMek

Ele explica como a regra da cadeia vira algo super curto na "notação de físicos".

a) Calcule z_{xx} usando a "notação de físicos".
b) Traduza as suas contas pra notação convencional.

No item a você encontrou uma fórmula geral.
Agora vamos aplicá-las em casos específicos pra testá-la.

c) Especialize as suas contas do item a pro caso
$z(y) = \operatorname{sen} y$, $y(x) = e^{4x}$.
d) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(e^{4x})$ pelo método convencional.

Derivadas parciais e derivadas totais
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.

Vamos começar com um caso bem concreto — um que eu usei em EDOs com variáveis separáveis em C2... link:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf

O nosso caso bem concreto vai ser:
$z = z(x, y) = x^2 + y^2$,
$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
quando nós só consideramos o $z = z(x, y) = x^2 + y^2$
as derivadas parciais de z são $z_x = 2x$ e $z_y = 2y$,
mas quando também consideramos o $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$
aí temos $z = z(x, y(x)) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = 1$, e $\frac{dz}{dx} = 0$.

Esta derivada $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} z(x, y(x))$ é chamada de derivada total de z com relação a y.

Exercício 2.
Digamos que $z = z(x,y) = (x+2)(y+3)$
e que $y = y(x) = \operatorname{sen} x$.
a) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
b) Calcule $\frac{dz}{dx}$.
c) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Convenção: quando uma expressão como z_x puder ser interpretada tanto como uma derivada parcial quanto como uma derivada total o default é interpretá-la como derivada parcial.

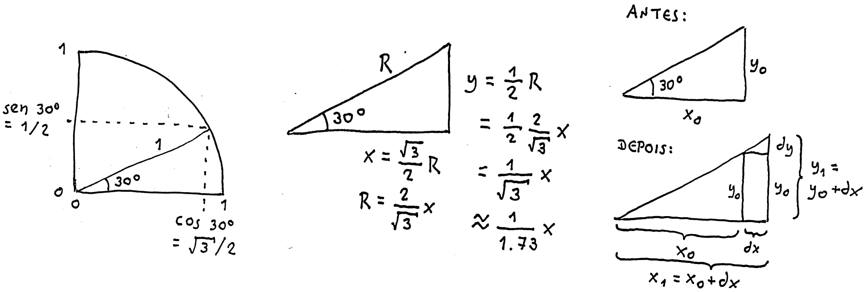
Exercício 3.
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.
(Isto é uma versão mais geral do exercício 2).
a) Calcule $\frac{d}{dx}z$.
b) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Silvanus Thompson: o exemplo do triângulo (p.10)

Links:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=21

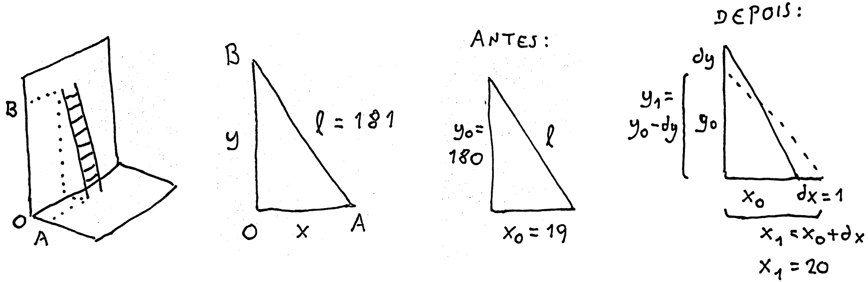
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-tr.mp4



Silvanus Thompson: o exemplo da escada (p.11)

Links:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=22
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-esc.mp4

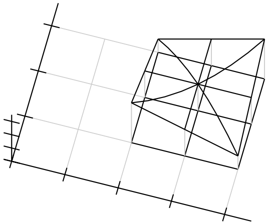


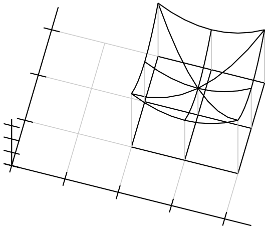
Silvanus Thompson: o exemplo da escada: contas

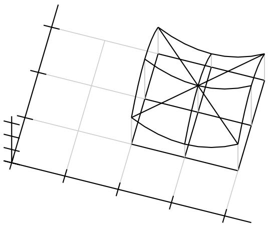
$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\ell$$
$$x_0^2+y_0^2=\ell^2$$
$$x_1^2+y_1^2=\ell^2$$
$$(x_0+dx)^2+(y_0-dy)^2=\ell^2$$
$$(y_0-dy)^2=\ell^2-x_1^2$$
$$\begin{aligned}y_0-dy &= \sqrt{\ell^2-x_1^2}\\ &= \sqrt{181^2-20^2}\\ &= \sqrt{32761-400}\\ &= \sqrt{32361}\\ &\approx 179.89\end{aligned}$$
$$180-dy=179.89$$
$$180-179.89=dy$$
$$dy=0.11$$
$$dx=1$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{0.11}{1}=0.11$$

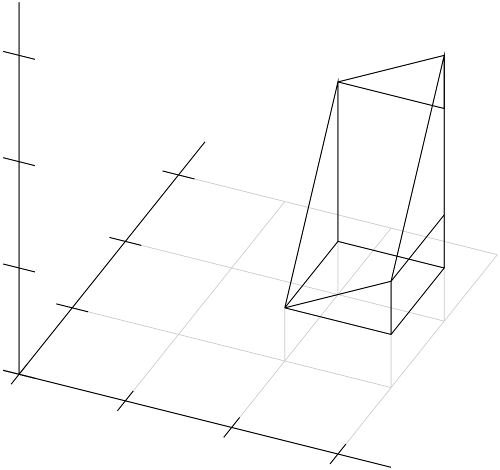
Tudo que vem depois daqui vai ser reescrito.

Quadratics - tests









Um segundo exemplo
Digamos que o conjunto dos pontos (x, y)
"que obedecem as restrições" é esse aqui:

$$\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5\,\}$$

e que $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

Os físicos consideram que "é óbvio" que (em geral!) variáveis "variam continuamente", então se $x_1 = x_0 + \Delta x$ e $y_1 = y_0 + \Delta y$ e Δx é muito pequeno então Δy é muito pequeno também.
(Veja o vídeo!...)

O contexto importa muito

Exercício 1 (versão preliminar)
Digamos que:

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 17: algumas funções quadráticas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução
Nós começamos a ver como pegar uma superfície e um ponto dela e aí obter um plano tangente a essa superfície nesse ponto, e começamos a ver qual é a relação disso com derivadas parciais...

Um plano tangente é uma *aproximação de 1ª ordem*.
Nestes exercícios vamos ver um pouco sobre aproximações de 2ª ordem — mas só o suficiente pra gente ter mais motivação pra "notação de físicos" e pra gente aprender a visualizar o que certas contas importantes querem dizer.

O que a gente vai ver aqui tem muito a ver com as superfícies quádricas que costumam ser vistas rapinho no final do curso de GA, mas vamos usar alguns truques pro nosso ponto base não precisar ser o zero. Veja as figuras 3D daqui...

`https://en.wikipedia.org/wiki/Quadric`

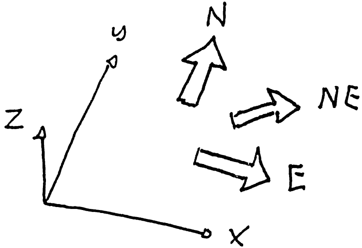
Exercício 4 (cont.)
A trajetória $(x(t), y(t))$ é sempre um movimento retilíneo uniforme pra quaisquer valores de α e β.

a) Calcule $\overrightarrow{(x_t, y_t)}$.

Cada escolha de valores para α e β dá uma trajetória diferente. Nos itens abaixo você vai visualizar algumas dessas trajetórias e vai desenhá-las no papel — desta forma aqui: você vai marcar no plano os pontos $(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$ para $\Delta t = -1, 0, 1$, vai escrever "$\Delta t = -1$", "$\Delta t = 0$" e "$\Delta t = 1$" do lado dos pontos correspondentes a esses valores de Δt, e ao lado de cada desenho você vai escrever os valores de α e β.

b) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
c) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Exercício 4 (cont.)
...e além disso você vai escrever algo como "Leste" (ou "E"), "Noroeste" (ou "NW") do lado de cada um dos seus desenhos de trajetórias pra indicar em que direção o ponto (x, y) está andando. Use a convenção que costuma ser usada em mapas, matemática e videogames, em que o Leste é pra direita e o Norte é pra cima:



Exercício 4 (cont.)

d) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = -1$
e diga o nome da direção dela.

e) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = -1$, $\beta = 1$.
e diga o nome da direção dela.

f) Quais são os valores mais simples de α e β —
onde "simples" quer dizer "0, 1 ou -1" — que fazem
a trajetória ir pro nordeste? E pro sudoeste?

Nos próximos exercícios eu vou me referir a essas
trajetórias em que α e β são números "simples"
pelos nomes das direções delas.

O significado geométrico de z_t

Nós sabemos calcular z, z_t e z_{tt} a partir de t,
e sabemos calcular z, z_t e z_{tt} em t_0.

Com um pouquinho de esforço você deve ser
capaz de visualizar o que acontece perto de t_0...
o valor da primeira derivada, $(z_t)(t_0)$, diz o seguinte:

$$\begin{array}{lcl}
z \text{ aumenta quando } t \text{ aumenta (``crescente'')} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) > 0 \\
z \text{ ``fica horizontal'' quando } t \text{ aumenta} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) = 0 \\
z \text{ diminui quando } t \text{ aumenta (``decrescente'')} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) < 0
\end{array}$$

Veja o vídeo!!!

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-3.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=VwowES6EM3Y

O significado geométrico de z_{tt}

Nos casos em que z "fica horizontal" nós vamos usar a segunda derivada, $(z_{tt})(t_0)$, pra ver se o gráfico de $z(t)$ "parece uma parábola" ao redor de t_0, e se essa parábola tem concavidade pra cima ou pra baixo:

$$\begin{array}{lcl}
\text{concavidade pra cima} & \Longleftrightarrow & (z_{tt})(t_0) > 0 \\
\text{``parece horizontal''} & \Longleftrightarrow & (z_{tt})(t_0) = 0 \\
\text{concavidade pra baixo} & \Longleftrightarrow & (z_{tt})(t_0) < 0
\end{array}$$

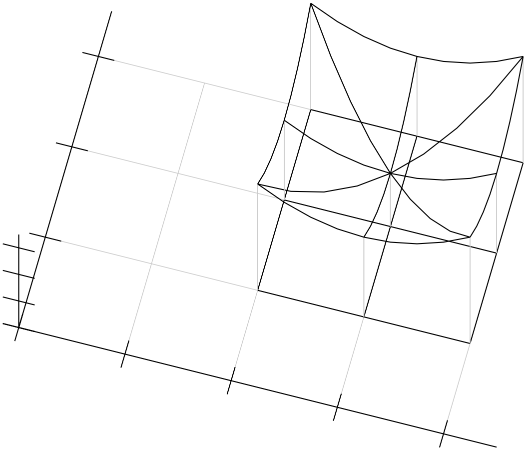
Eu usei muitos termos informais de propósito. No próximo exercício você vai tentar descobrir sem fazer contas qual é o comportamento da z em torno de t_0, e no outro exercício você vai fazer as contas e vai ver se o seu olhômetro funcionou direito.

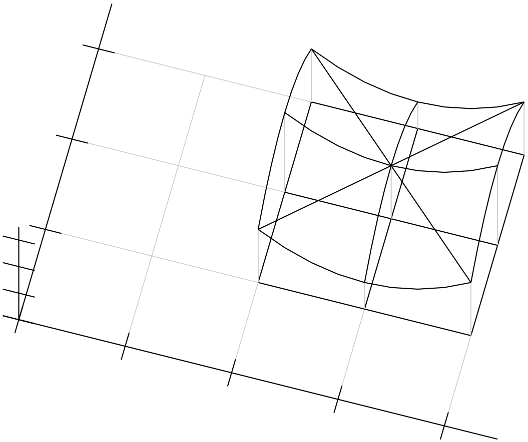
Exercício 5.
Em cada um dos desenhos dos próximos slides diga o que acontece quando a trajetória $(x(t), y(t))$ anda em uma das oito direções simples, que são:

norte, nordeste, leste, sudeste,
sul, sudoeste, oeste, noroeste.

Use estas categorias na suas respostas:

z cresce
z decresce
z faz uma parábola com concavidade pra cima
z faz uma parábola com concavidade pra baixo
z é "muito horizontal"





Calculando z_{tt} em "notação de matemáticos"

Lembre que:

1) estamos usando $z = z(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$,
2) matemáticos odeiam usar os mesmos nomes pra variáveis e pra funções,
3) pra traduzir $z = z(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ pra notação de matemáticos vamos ter que escolher nomes pra "função x", pra "função y" e pra "função z",
4) $z(x, y)$ é uma função de dois argumentos e $z(t) = z(x(t), y(t))$ é uma outra função, de um argumento só,
5) se você quer ser entendido faça as suas definições explicitamente, se possível usando "seja"s e "digamos que"s...

Calculando z_{tt} em "notação de matemáticos" (2)

Digamos que:

$$\begin{array}{rcl}
x(t) & = & f(t), \\
y(t) & = & g(t), \\
z(x,y) & = & H(x,t), \\
z(x(t),y(t)) & = & m(t)
\end{array}$$

Então

$$\begin{array}{rcl}
z_t & = & \frac{d}{dt}z(t) \qquad\qquad (?!?!) \\
 & = & \frac{d}{dt}m(t) \\
 & = & \frac{d}{dt}z(x(t),y(t)) \\
 & = & \frac{d}{dt}H(f(t),g(t)) \\
 & = & \frac{\partial}{\partial x}H(f(t),g(t))\frac{d}{dt}f(t) + \frac{\partial}{\partial y}H(f(t),g(t))\frac{d}{dt}g(t) \\
 & = & H_x(f(t),g(t))f'(t) + H_y(f(t),g(t))g'(t)
\end{array}$$

Calculando z_{tt} em "notação de matemáticos" (3)

Continuando...

$$
\begin{array}{rcll}
z_t & = & z_t(t) & \textcolor{red}{(?!?!)} \\
 & = & \frac{d}{dt}z(t) & \\
 & = & \frac{d}{dt}m(t) & \\
 & = & \frac{d}{dt}z(x(t),y(t)) & \\
 & = & \frac{d}{dt}H(f(t),g(t)) & \\
 & = & \frac{\partial}{\partial x}H(f(t),g(t))\frac{d}{dt}f(t)+\frac{\partial}{\partial y}H(f(t),g(t))\frac{d}{dt}g(t) & \\
 & = & \frac{\partial}{\partial x}z(x(t),y(t))\frac{d}{dt}x(t)+\frac{\partial}{\partial y}z(x(t),y(t))\frac{d}{dt}y(t) & \\
 & = & z_x(x(t),y(t))x_t(t)+z_y(x(t),y(t))y_t(t) & \\
 & = & z_xx_t+z_yy_t &
\end{array}
$$

Os próximos slides são material de apoio pra este vídeo aqui:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-4.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=d0fnURoPI9Q

Do prefácio do Martin Gardner...

(p.14): (...) Here the height of the mercury column relative to the water's temperature is a one-to-one function of one variable. (...) In modern set theory this way of defining a function can be extended to completely arbitrary sets of numbers for a function that is described not by an equation but by a set of rules.

(p.14): For most of the functions encountered in calculus, the domain consists of a single interval of real numbers.

(p.15): We call such a function "continuous" if its graph can be drawn without lifting the pencil from the paper, and "discontinuous" otherwise. (The complete definition of continuity, which is also applicable to functions with more complicated domains, is beyond the scope of this book.)

Do prefácio do Martin Gardner... (2)

(p.15): Note that if a vertical line from the x axis intersects more than one point on a curve, the curve cannot represent a function because it maps an x number to more than one y number. Figure 5 is a graph that clearly is not a function because vertical lines, such as the one shown dotted, intersect the graph at three spots. (It should be noted that Thompson did not use the modern definition of "function." For example the graph shown in Figure 30 of Chapter XI fails this vertical line test, but Thompson considers it a function.)

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=117

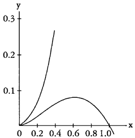


FIG. 30.

$$\begin{aligned}(y-x^2)^2 &= x^5 \\ y-x^2 &= \pm\, x^{5/2} \\ y &= x^2 \pm x^{5/2}\end{aligned}$$

Do capítulo "III. On Relative Growings" do Thompson

Whenever we use differentials dx, dy, dz, etc., the existence of some kind of relation between x, y, z, etc., is implied, and this relation is called a "function" in x, y, z, etc.; the two expressions given above, for instance, namely $\frac{y}{x} = \tan 30°$ and $x^2 + y^2 = \ell^2$, are functions of x and y. Such expressions contain implicitly (that is, contain without distinctly showing it) the means of expressing either x in terms of y or y in terms of x, and for this reason they are called implicit functions in x and y; they can be respectively put into the forms...

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=24

Do capítulo “III. On Relative Growings” do Thompson

(...) We see that an explicit function in x, y, z, etc., is simply something the value of which changes when x, y, z, etc., are changing, either one at the time or several together. Because of this, the value of the explicit function is called the dependent variable, as it depends on the value of the other variable quantities in the function; these other variables are called the independent variables because their value is not determined from the value assumed by the function. For example, if $u = x^2 \sin\theta$, x and θ are the independent variables, and u is the dependent variable.

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=25

Do capítulo “III. On Relative Growings” do Thompson

Sometimes the exact relation between several quantities x, y, z either is not known or it is not convenient to state it; it is only known, or convenient to state, that there is some sort of relation between these variables, so that one cannot alter either x or y or z singly without affecting the other quantities; the existence of a function in x, y, z is then indicated by the notation $F(x, y, z)$ (implicit function) or by $x = F(y, z)$, $y = F(x, z)$ or $z = F(x, y)$ (explicit function). Sometimes the letter f or is used instead of F, so that $y = F(x)$, $y = f(x)$ and $y = (x)$ all mean the same thing, namely, that the value of y depends on the value of x in some way which is not stated.

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=25

Do capítulo "XIII. Other useful dodges" do Thompson

It can be shown that for all functions which can be put into the inverse form, one can always write

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1 \qquad \text{or} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \,.$$

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=139

You will surely realize from this chapter and the preceding, that in many respects the calculus is an art rather than a science: an art only to be acquired, as all other arts are, by practice. Hence you should work many examples, and set yourself other examples, to see if you can work them out, until the various artifices become familiar by use.

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=141

Do capítulo “XIII. Other useful dodges” (2)

Um modo de traduzir esse “$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$” pra “notação de matemáticos” é supor que $y(x)=f(x)$ e $x(y)=g(y)$, e que o nosso ponto base é $(x,y)=(x,f(x))$...

(Também poderia ser $(x,y)=(g(y),y)$).

$$\begin{array}{rcl}
\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} & = & \frac{d}{dx}y\cdot\frac{d}{dy}x \\
& = & \frac{d}{dx}y(x)\cdot\frac{d}{dy}x(y) \\
& = & \frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{d}{dy}g(y) \\
& = & \frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{d}{dy}g(y) \\
& = & f'(x)\cdot g'(y) \\
& = & f'(x)\cdot g'(y(x)) \\
& = & f'(x)\cdot g'(f(x))
\end{array}$$

Do capítulo "X. Geometrical Meaning of Differentiation"

Se y é uma função de x,
então $y_x = \frac{dy}{dx}$ também é uma função de x...
ou seja, $y_x = y_x(x)$.

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=90

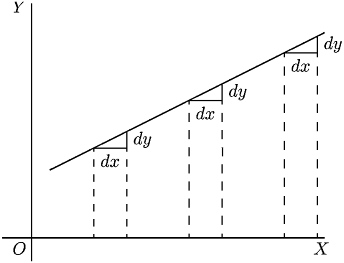


Fig. 12.

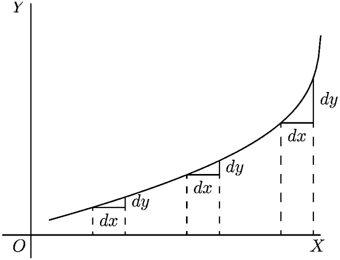


Fig. 13.

“A useful dodge”

O capítulo IX do Thompson —
chamado “IX. Introducing a Useful Dodge” —
é sobre um truque muito bom pra calcular derivadas complicadas que faz muito mais sentido em “notação de físicos” do que em “notação de matemáticos”,
e que se baseia em inventar variáveis novas.

Link pro capítulo:
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=77

Exercício 6.
Refaça você mesmo os exemplos (1) até (7) desse capítulo do Thompson pra ter certeza de que você entendeu o truque.

Link pro vídeo com dicas:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-5.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=Ubc7wXK22fM

Derivada direcional (Bortolossi)
O Bortolossi define a derivada direcional deste jeito, na p.296 do capítulo 8 dele:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Digamos que $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que os argumentos da f se chamem x e y, que $\mathbf{p}=(x_0,y_0)$, que o vetor $\mathbf{v}$ seja (α,β), e que $z=z(x,y)=f(x,y)$.
Então isto vira:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial z}{\partial(\alpha,\beta)}(x_0,y_0) & = & \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{z((x_0,y_0)+\varepsilon(\alpha,\beta)) - z(x_0,y_0)}{\varepsilon} \\
 & = & \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{z(x_0+\varepsilon\alpha, y_0+\varepsilon\beta) - z(x_0,y_0)}{\varepsilon}
\end{array}$$

Uma gambiarra...
Digamos que ε seja muito pequeno ("infinitesimal").
O Bortolossi explica — leia as páginas 291 a 294 dele! —
que os casos mais básicos, que queremos generalizar,
são estes: $\frac{\partial f}{\partial(1{,}0)} = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial(0{,}1)} = \frac{\partial f}{\partial y}$.
Então:

$$\begin{array}{rcl} z(x_0 + \varepsilon\alpha, y_0 + \varepsilon\beta) & \approx & z(x_0, y_0) + z_x(x_0, y_0) \cdot \varepsilon\alpha + z_y(x_0, y_0) \cdot \varepsilon\beta \\ & = & z + z_x\varepsilon\alpha + z_y\varepsilon\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} z(x_0 + \varepsilon\alpha, y_0 + \varepsilon\beta) - z(x_0, y_0) & \approx & z_x\varepsilon\alpha + z_y\varepsilon\beta \\ \dfrac{z(x_0 + \varepsilon\alpha, y_0 + \varepsilon\beta) - z(x_0, y_0)}{\varepsilon} & \approx & z_x\alpha + z_y\beta \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{z(x_0 + \varepsilon\alpha, y_0 + \varepsilon\beta) - z(x_0, y_0)}{\varepsilon} & = & z_x\alpha + z_y\beta \end{array}$$

Uma gambiarra... (2)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial(\alpha,\beta)}(x_0,y_0) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z((x_0,y_0)+\varepsilon(\alpha,\beta))-z(x_0,y_0)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(x_0+\varepsilon\alpha,y_0+\varepsilon\beta)-z(x_0,y_0)}{\varepsilon} \\
&= z_x(x_0,y_0)\cdot\alpha+z_y(x_0,y_0)\cdot\beta \\
\frac{\partial z}{\partial(\alpha,\beta)} &= z_x\cdot\alpha+z_y\cdot\beta \\
&= \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \\
&= Dz\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 21: a matriz jacobiana

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Comece relendo o trecho ao redor da
página 256 no capítulo 7 do Bortolossi...
Hoje nós vamos ver dois jeitos de visualizar
o que a matriz jacobiana quer dizer.

Vamos trabalhar em cima de um exemplo só:
a função que leva cada número complexo $z \in \mathbb{C}$
em $z^2 \in \mathbb{C}$.

Veja os vídeos!

Vídeo 1:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-matriz-jacobiana.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=kMGtZk5er9w

Vídeo 2:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-matriz-jacobiana-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=D_YKka3RG9E

Porque a jacobiana de $w = z^2$ é desse jeito?

$$\begin{array}{rcl} w &=& z^2 \\ z &=& x+iy \quad = \quad (x,y) \quad = \quad \binom{x}{y} \\ w &=& a+ib \quad = \quad (a,b) \quad = \quad \binom{a}{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \binom{a}{b} &=& w \\ &=& z^2 \\ &=& (x+iy)^2 \\ &=& x^2+2ixy+i^2y^2 \\ &=& x^2+2ixy-y^2 \\ &=& (x^2-y^2)+i(2xy) \\ &=& (x^2-y^2, 2xy) \quad = \quad \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \\ a &=& x^2-y^2 \\ b &=& 2xy \end{array}$$

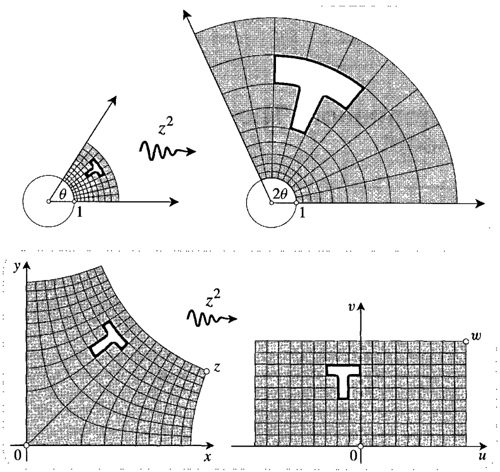
Porque a jacobiana de $w = z^2$ é desse jeito? (2)

$$\begin{array}{rcl}
w_z \Delta z & = & \frac{d\binom{a}{b}}{d\binom{x}{y}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} a_x \Delta x + a_y \Delta y \\ b_x \Delta x + b_y \Delta y \end{pmatrix} \\
& \approx & \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} \\
& = & \Delta w
\end{array}$$

Se w_x fosse $\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}$ ao invés de $\begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}$ isso não daria certo.

Duas figuras do "Visual Complex Analysis" do Needham

Do capítulo 4, páginas 190 e 191...



Exercício 1.

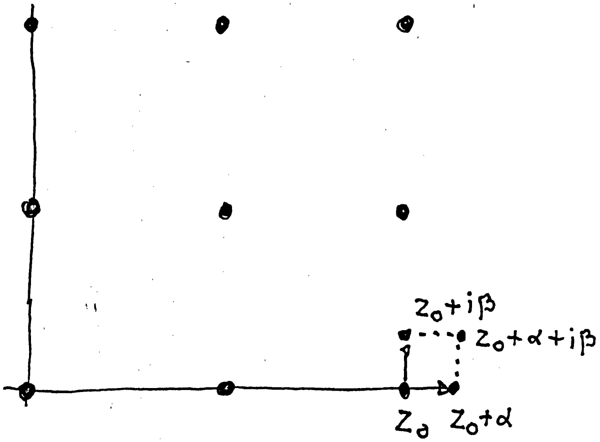
Desenhe um plano pros valores de z, à esquerda, e um plano pros valores de $w = z^2$ à direita, como nas figuras do Needham. Desenhe no planos dos 'z's os 9 valores de z que têm $x \in \{0, 1, 2\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Pra cada um desses 9 'zs calcule o 'w correspondente e desenhe ele no plano dos 'w's.

Exercícios de preparação pro mini-teste

No exercício 1 você descobriu as imagens pela função $z \mapsto w$ de 9 *pontos*. Agora você vai descobrir as imagens de 9 *retângulos*.

Sejam α e β dois reais positivos bem pequenos. Vamos fazer os desenhos todos à mão, então você pode usar $\alpha = \beta = 0.2$, ou $\alpha = \beta = 0.1$, algo assim — basta que α^2 e β^2 sejam "desprezíveis" no sentido do Silvanus Thompson (e dos vídeos).

Em cada um dos 9 pontos você vai imaginar um retangulinho de lados α e $i\beta$ "apoiado nele", como o da figura do próximo slide...


$z_0+i\beta$
$z_0+\alpha+i\beta$
z_0
$z_0+\alpha$

...e você vai usar as derivadas pra encontrar uma *aproximação bastante razoável* pra imagem do retangulinho apoiado em cada um dos 9 'z_0's, e vai desenhar essa aproximação apoiada no w_0 correspondente a aquele z_0.

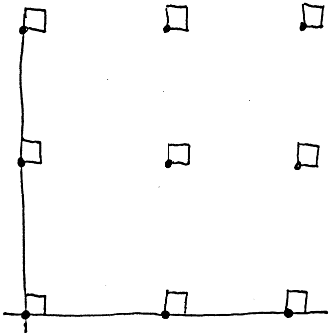
O vídeo tem montes de explicações e dicas. Links:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-matriz-jacobiana-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=D_YKka3RG9E

Se $\gamma = \alpha + i\beta$, então...
(Veja o vídeo!!!)

$$
\begin{array}{rcl}
w(z_0+\gamma) & = & w(z_0+(\alpha+i\beta)) \\
& = & w((x_0+iy_0)+(\alpha+i\beta)) \\
& = & w((x_0+\alpha)+i(y_0+\beta)) \\
& = & w(x_0+\alpha, y_0+\beta) \\
& = & w(x_0+\alpha, y_0+\beta) \\
& = & a(x_0+\alpha, y_0+\beta)+ib(x_0+\alpha, y_0+\beta) \\
& = & (a(x_0+\alpha, y_0+\beta), b(x_0+\alpha, y_0+\beta)) \\
& \approx & (a+a_x\alpha+a_y\beta, b+b_x\alpha+b_y\beta) \\
& = & (a,b)+(a_x\alpha+a_y\beta, b_x\alpha+b_y\beta) \\
& = & (a,b)+\begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
w(z_0+\gamma)-w_0 & = & \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Exercício 2.
Qual é a imagem pela função $z \mapsto z^2$ da figura abaixo?
Note que o tamanho dos retangulinhos vai depender dos valores de α e β que você escolheu...



Cálculo 3 - 2021.1

Mini-teste 2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Regras
As regras vão ser as mesmas dos
mini-testes do semestre passado:
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf#page=2`

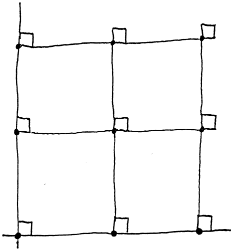
Leia com muita atenção!!!!!!!!!!!

As questões vão ser disponibilizadas às 20:00 da sexta 27/agosto/2021 e vocês vão ter até as 20:00 do sábado 28/agosto/2021 pra entregar as respostas.

Este mini-teste vale 0.5 pontos a mais na P1.

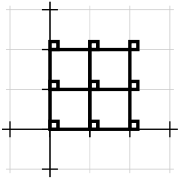
Questão 1 (e única).
Esta questão é exatamente equal à que começamos a fazer na aula antes do mini-teste...
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-matriz-jacobiana.pdf#page=7
...mas com um desenho um pouquinho mais complicado.

Descubra qual a imagem da figura abaixo pela função $z \mapsto z^2$ e faça um desenho razoavelmente preciso dela.

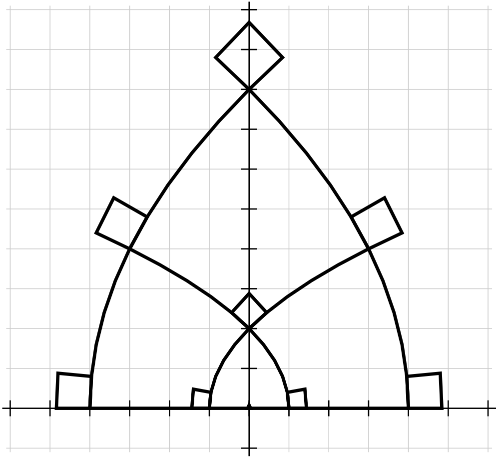


Gabarito

(Usei $a = b = 0.2$)



$\mapsto$



Um jeito de fazer as contas

$$
\begin{aligned}
w_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{w(x_0+\Delta x, y_0) - w}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a(x_0+\Delta x, y_0), b(x_0+\Delta x, y_0)) - (a,b)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + a_x\Delta x, b + b_x\Delta x) - (a,b)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a_x\Delta x, b_x\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a_x, b_x)\Delta x}{\Delta x} \\
&= \overrightarrow{(a_x, b_x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_y &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{w(x_0, y_0+\Delta y) - w}{\Delta y} \\
&= \overrightarrow{(a_y, b_y)}
\end{aligned}
$$

$$w = (a,b) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

$$w_z = \frac{d\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)}{d\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$w_x = \overrightarrow{(a_x, b_x)} = \overrightarrow{(2x, 2y)}$$

$$w_y = \overrightarrow{(a_y, b_y)} = \overrightarrow{(-2y, 2x)}$$

Em $(x,y) = (2,0)$ temos $w = (4,0)$, $w_x = \overrightarrow{(4,0)}$, $w_y = \overrightarrow{(0,4)}$

Em $(x,y) = (2,1)$ temos $w = (3,4)$, $w_x = \overrightarrow{(4,2)}$, $w_y = \overrightarrow{(-2,4)}$

Em $(x,y) = (2,2)$ temos $w = (0,8)$, $w_x = \overrightarrow{(4,4)}$, $w_y = \overrightarrow{(-4,4)}$

Em $(x,y) = (1,2)$ temos $w = (-3,4)$, $w_x = \overrightarrow{(2,4)}$, $w_y = \overrightarrow{(-4,2)}$

$$w(1.2, 2) \approx w(1,2) + w_x(1,2) \cdot 0.2 = (-3,4) + 0.2 \cdot \overrightarrow{(2,4)}$$

$$w(1, 2.2) \approx w(1,2) + w_y(1,2) \cdot 0.2 = (-3,4) + 0.2 \cdot \overrightarrow{(-4,2)}$$

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 23: o vetor gradiente

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Quando nós vimos trajetórias em $\mathbb{R}^2$ nós aprendemos a ver a derivada de uma trajetória como o vetor velocidade...

No mini-teste 2 vocês aprenderam a visualizar a derivada de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ como dois vetores — veja o vídeo!!!

Agora nós vamos ver um truque que nos permite interpretar a derivada de uma superfície como um vetor — o gradiente.

Comece lendo as páginas 298 até 302 do capítulo 8 do Bortolossi. Nós vamos ver as idéias que ele apresenta numa outra ordem: nós vamos começar desenhando os vetores gradientes de algumas superfícies simples e verificando no olhômetro que eles realmente são ortogonais às curvas de nível e apontam pra direção de maior crescimento da função.

Exercício 1

Sejam:

$F(x,y) = (x-y)y = xy - y^2,$

$G(x,y) = \frac{1}{10}F(x,y) = \frac{(x-y)y}{10} = (xy-y^2)/10.$

Faça os diagramas de numerozinhos das funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ abaixo, desenhando os valores delas nos pontos que têm $x, y \in \{-3, \ldots, 3\}$ (49 pontos!):

a) $x - y$

b) y

c) $(x-y)y$

d) $((x-y)y)/10$

e) $G_x(x,y)$

f) $G_y(x,y)$

Exercício 1 (cont.)

g) Desenhe as curvas de nível da função $G(x, y)$.

h) Em cada ponto $(x, y) \in \{-3, \ldots, 3\}^2$ desenhe o vetor gradiente $\nabla G(x, y)$. Mais precisamente: para cada ponto $(x, y) \in \{-3, \ldots, 3\}^2$ desenhe $(x, y) + \overrightarrow{(G_x(x, y), G_y(x, y))}$.

Exercício 2.
Assista este vídeo:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-gradiente-2.mp4

Sejam:
$z = F(x, y)$,
$(x_0, y_0) = (0, 1)$,
$z_0 = z(x_0, y_0)$,
$C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x, y) = z_0 \,\}$,

O conjunto C é formado de duas curvas.

a) Encontre as funções $h_{\text{cima}}(x)$ e $h_{\text{baixo}}(x)$
que percorrem essas duas curvas; ou seja,

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h_{\text{cima}}(x) \,\} \\ & \cup & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h_{\text{baixo}}(x) \,\} \end{array}$$

Exercício 2 (cont.)

b) Represente elas graficamente.
c) Verifique que $h_{\text{cima}}(x_0) = y_0$.
d) Calcule $h'_{\text{cima}}(x)$.
e) Verifique (no olhômetro) se o valor de $h'_{\text{cima}}(x_0)$ faz sentido.

f) Seja $\vec{v} = \overrightarrow{(1, h'_{\text{cima}}(x_0))}$. Desenhe $(x_0, y_0) + \vec{v}$ e verifique — no olhômetro — se este vetor $\vec{v}$ é (ou parece ser...) paralelo ao gráfico da função h_{cima} no ponto (x_0, y_0).

g) Verifique se este vetor $\vec{v}$ é ortogonal ao vetor gradiente ∇F, isto é, $\nabla F(x_0, y_0)$. Aqui você vai fazer a verificação por contas: dois vetores $\overrightarrow{(a, b)}$ e $\overrightarrow{(c, d)}$ são ortogonais se e só se $\overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = ac + bd = 0$.

Exercício 3.
Assista este vídeo:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-gradiente-3.mp4

Digamos que $y = y(x)$ e que $z(x, y(x))$ é constante.
Então $\frac{d}{dx} z(x, y(x)) = 0$.
A partir dá pra conseguir uma fórmula que calcula y_x em função de x e de y — sem precisamos encontrar uma fórmula para $y(x)$ (!!!)...

a) Encontre a fórmula para $y_x(x, y)$.
b) Encontre o valor de y_x no ponto $(x, y) = (x_0, y_0) = (0, 1)$.
c) Verifique que o vetor $\overrightarrow{(1, y_x)}$ é ortogonal ao gradiente ∇F no ponto (x_0, y_0).

Cálculo 3 - 2021.1

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Regras e dicas

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT2.pdf

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 20:00 do dia 3/setembro/2021 e deve ser entregue até as 20:00 do dia 4/setembro/2021.

Todas as questões são baseadas em exercícios deste PDF:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-gradiente.pdf

Vou me referir a ele como “[G]” (de “Gradiente”).

Questão 1.
(Total: 2.5 pts)

a) **(0.5 pts)** Faça o exercício (1c) do [G].
b) **(1.0 pts)** Faça o exercício (1g) do [G].
c) **(1.0 pts)** Faça o exercício (1h) do [G].

Questão 2.
(Total: 4.5 pts)

Faça os itens abaixo do exercício 2 do [G], mas considerando que $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

a) **(1.0 pts)** Faça o item (2a) do [G].
b) **(0.5 pts)** Faça o item (2b) do [G].
c) **(0.5 pts)** Faça o item (2c) do [G].
d) **(0.5 pts)** Faça o item (2d) do [G].

e) **(1.0 pts)** Faça o item (2e) do [G], mas mostrando como representar graficamente $h'_{\text{cima}}(x_0)$ e explicando porque o seu resultado "faz sentido".

f) **(0.5 pts)** Faça o item (2f) do [G].
g) **(0.5 pts)** Faça o item (2g) do [G].

Questão 3.
(Total: 2.0 pts)

Faça os itens abaixo do exercício 3 do [G], mas considerando que $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

a) **(1.0 pts)** Faça o item (3a) do [G].
b) **(0.5 pts)** Faça o item (3b) do [G].
c) **(0.5 pts)** Faça o item (3c) do [G].

Questão 4.
(Total: 1.0 pts)

Generalize o seu item (3c) — refaça ele considerando que o ponto (x_0, y_0) é um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$, não necessariamente o ponto $(-1, 1)$.

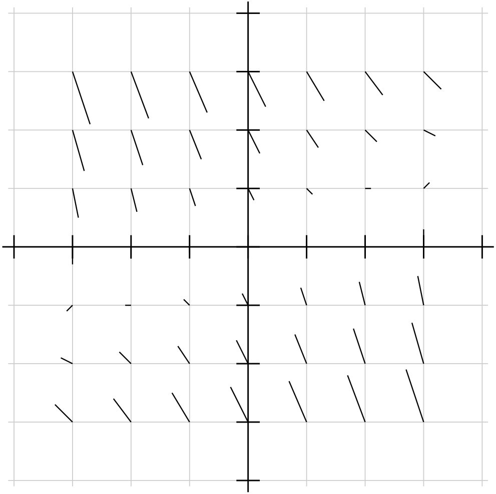
Questão 1: gabarito

1a) $(x-y)y =$
(0.5)

-18	-15	-12	-9	-6	-3	0
-10	-8	-6	-4	-2	0	2
-4	-3	-2	-1	0	1	2
0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	-1	-2	-3	-4
2	0	-2	-4	-6	-8	-10
0	-3	-6	-9	-12	-15	-18

1b) (Vou desenhar as curvas de nível à mão)
(1.0)

Questão 1: gabarito (cont.)
(Imagine que os tracinhos são setinhas)

1c) $\nabla G = \overrightarrow{(\frac{y}{10}, \frac{x-2y}{10})} =$ 
(1.0)

Questão 2: gabarito

2a) $h_{\text{cima}}(x) = (x + \sqrt{x^2+8})/2, \quad h_{\text{baixo}}(x) = (x - \sqrt{x^2+8})/2$
(1.0)

2b) (Vou desenhar o gráfico à mão)
(0.5)

2c) $h_{\text{cima}}(x_0) = (-1 + \sqrt{(-1)^2+8})/2 = 1 = y_0$
(0.5)

2d) $h'_{\text{cima}}(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+8}} + \frac{1}{2}$
(0.5)

2e) $h'_{\text{cima}}(x_0) = \frac{-1}{2\sqrt{(-1)^2+8}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
(1.0)
(falta o desenho)

2f) $\vec{v} = \overrightarrow{(1, \frac{1}{3})}$; desenhar
(0.5)

2g) $\nabla F = \overrightarrow{(y, x-2y)}$; $\nabla F(x_0,y_0) = \overrightarrow{(1, -1-2\cdot 1)} = \overrightarrow{(1,-3)}$;
(0.5)
$\vec{v} \cdot \nabla F(x_0,y_0) = \overrightarrow{(1, \frac{1}{3})} \cdot \overrightarrow{(1,-3)} = 1 - 1 = 0$

Questão 3: gabarito

a) $\frac{d}{dz}z = 0$, $\frac{d}{dz}z = z_x + z_y y_x$, $y_x = -\frac{z_x}{z_y}$;
(1.0)
se $z = (x-y)y = xy - y^2$ então $z_x = y$, $z_y = x - 2y$,
$y_x = -\frac{y}{x-2y}$.

b) Em $(x,y) = (-1,1)$ temos $y_x = -\frac{1}{-1-2\cdot 1} = \frac{1}{3}$.
(0.5)

c) Em $(x,y) = (0,1)$ temos
(0.5)
$\overrightarrow{(1,y_x)} \cdot \nabla F = \overrightarrow{(1,\frac{1}{3})} \cdot \overrightarrow{(1,-3)} = 1 - 1 = 0$.

Questão 4: gabarito
(1.0 pts)

$\frac{d}{dz}z = 0$, $\frac{d}{dz}z = z_x + z_y y_x$, $y_x = -\frac{z_x}{z_y}$;
se $z = (x-y)y = xy - y^2$ então $z_x = y$, $z_y = x - 2y$,
$y_x = -\frac{y}{x-2y}$.

Temos $\nabla F = \overrightarrow{(y, x-2y)}$ (num ponto (x,y) qualquer).
$\overrightarrow{(1, y_x)} \cdot \nabla F = \overrightarrow{(1, -\frac{y}{x-2y})} \cdot \overrightarrow{(y, x-2y)} = y + (-\frac{y}{x-2y} \cdot (x-2y)) = 0$.

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 25: abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução
Dê uma olhada no capítulo 4 do Bortolossi...
Comece pela seção 4.1, “Por que funções contínuas são importantes”, depois leia a seção 4.3, sobre o Teorema de Weirstrass em n variáveis, e relembre a definição de distância euclidiana na p.139.

Nós vamos começar entendendo as definições das páginas 142 até 148, e vamos reescrevê-las de um jeito bem mais curto.

O melhor modo de entender esses assuntos é
discutindo no Telegram os exercícios de hoje.

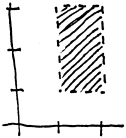
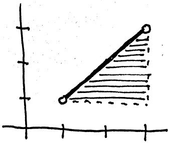
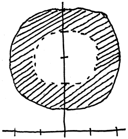
Nós vamos ver como fazer hipóteses sobre os exercícios dos próximos dois slides, como testar essas hipóteses, e como descartar as hipóteses erradas.

Nove subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

(Compare com a p.130 do Bortolossi...)

Sejam:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\le 3\,\},\\
C_2 &= \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\le 3 \ \text{ e } \ 1\le x<4\,\},\\
C_3 &= \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\le 2\,\},\\
C_4 &= \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<d((x,y),(1,2))\le 2\,\},\\
C_5 &= \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\le 2 \ \text{ e } \ 1<x\,\},\\
C_6 &= \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x\,\},
\end{aligned}
$$

$C_7 =$  , $C_8 =$  , $C_9 =$  .

Exercício 1.
Represente graficamente os conjuntos $C_1, \ldots, C_6$.

Exercício 2.
Represente os conjuntos C_7, C_8, C_9
em "notação de conjuntos" — isto é,
na forma $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots \}$.

Bolas abertas e fechadas

Se P é um ponto de $\mathbb{R}^n$ então a *bola fechada de raio ε em torno de P*, $\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P)$, e a *bola aberta de raio ε em torno de P*, $\mathsf{B}_\varepsilon(P)$, são definidas assim:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) \leq \varepsilon \,\} \\ \mathsf{B}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \varepsilon \,\} \end{array}$$

Por exemplo, se $P = 6 \in \mathbb{R}^1$ então:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_2(6) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^1 \mid d(6,Q) \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid d(6,x) \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(6-x)^2} \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x-6 \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2+6 \leq x \leq 2+6 \,\} \\ & = & [4,8] \end{array}$$

Exercício 3.
Represente graficamente:

a) $\overline{\mathsf{B}}_1((2,2))$,
b) $\mathsf{B}_1((2,2))$.

Dica: estes conjuntos vão parecer muito mais com "bolas de verdade" do que o conjunto $\overline{\mathsf{B}}_2(6)$ do slide anterior.

Lembre que a gente desenha a fronteira de um conjunto tracejada quando a gente quer indicar que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto e a gente desenha ela sólida quando quer indicar que os pontos dela pertencem ao conjunto. Veja os desenhos dos conjuntos C_8 e C_9.

Exercício 4.
Aqui você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobrepostas a conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\mathsf{B}_{0.1}((0,2.5)) \subseteq C_1$
b) $\mathsf{B}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
c) $\overline{\mathsf{B}}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
d) $\mathsf{B}_{0.1}((1,3)) \subseteq C_2$
e) $\mathsf{B}_{0.1}((2.5,2.5)) \subseteq C_2$
f) $\mathsf{B}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
g) $\overline{\mathsf{B}}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
h) $\mathsf{B}_{0.5}((1,0.5)) \subseteq C_4$
i) $\mathsf{B}_{0.1}((0.5,2)) \subseteq C_5$
j) $\mathsf{B}_{0.001}((1.1,1.01)) \subseteq C_8$

O interior de um conjunto (e conjuntos abertos)
Def: o *interior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int}(A)$,
é definido como:

$$\mathrm{Int}(A) \;\; = \;\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Note que isto sempre é verdade: $\mathrm{Int}(A) \subset A$.
Dizemos que um conjunto A é *aberto* quando $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

Exercício 5.
Seja $A = [2,4] \subset \mathbb{R}^1$.
Verifique que A não é aberto usando a definição do slide anterior.
Dica: como $A = [2,4]$,

$$\begin{array}{rrcl}
 & A & & \text{não é aberto} \\
\Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \mathrm{Int}(A) \\
\Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\
\Leftrightarrow & [2,4] & \not\subseteq & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\}
\end{array}$$

Tente continuar você mesmo usando ou matematiquês ou português. Você talvez vá precisar de truques que as pessoas costumam aprender nos primeiros semestres mas acabaram não aprendendo dessa vez por causa da pandemia...

Exercício 6.

Represente graficamente:

a) $\mathrm{Int}(C_8)$,
b) $\mathrm{Int}(C_4)$,
c) $\mathrm{Int}(C_5)$,
d) $\mathrm{Int}(\mathsf{B}_1((2,2)))$.

O fecho de um conjunto (e conjuntos fechados)
Def: o *fecho* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A}$,
é definido como:

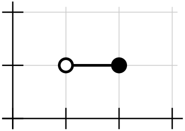
$$\overline{A} \;\; = \;\; \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \,\}$$

Compare com a definição do interior:

$$\mathrm{Int}(A) \;\; = \;\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Isto aqui sempre é verdade: $A \subset \overline{A}$.
Quando $\overline{A} \subset A$ dizemos que A é um conjunto *fechado*.

Exercício 7.
Digamos que:

$D_1 \quad =$ 

Represente graficamente:
a) $\overline{C_8}$
b) $\overline{D_1}$
c) $\mathrm{Int}(D_1)$

Um aviso sobre a P2
Em quase todos os problemas deste PDF é muito mais fácil mostrar que uma resposta está errada do que mostrar que ela está certa... e o método pra mostrar que uma resposta está errada vai ser um dos assuntos principais da P2.

Algumas traduções

$$\begin{array}{rcl}
A \subset B & = & \forall a \in A. a \in B \\
A = B & = & (A \subset B) \land (B \subset A) \\
\neg(P \land Q) & = & \neg P \lor \neg Q \\
\neg(P \lor Q) & = & \neg P \land \neg Q \\
\neg(\forall a \in A. P(a)) & = & \exists a \in A. \neg P(a) \\
\neg(\exists a \in A. P(a)) & = & \forall a \in A. \neg P(a) \\
x \in \{\, a \in A \mid P(a) \,\} & = & x \in A \land P(x) \\
\neg(P \to Q) & = & P \land \neg Q \\
[20, 42) & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x < 42 \,\} \\
20 \leq x < 42 & = & 20 \leq x \land x < 42
\end{array}$$

Lembra que '$\land$' é "e", '$\lor$' é "ou", '$\neg$' é "não", '$\to$' é "implica".

Alguns exemplos de traduções

$$
\begin{array}{l}
[a,b] \subset [20,42) \\
= \quad \forall x \in [a,b].x \in [20,42) \\
= \quad \forall x \in [a,b].20 \le x < 42 \\
= \quad \forall x \in \mathbb{R}.x \in [a,b] \to 20 \le x < 42 \\
= \quad \forall x \in \mathbb{R}.a \le x \le b \to 20 \le x < 42
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\neg([a,b] \subset [20,42)) \\
= \quad \neg(\forall x \in \mathbb{R}.a \le x \le b \to 20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \le b \to 20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \le b) \land (20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \land x \le b) \land (20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.(\neg(a \le x) \lor \neg(x \le b)) \land (20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.(x < a \lor b < x) \land (20 \le x < 42)
\end{array}
$$

Cálculo 3 - 2021.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Regras e dicas

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf`
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT2.pdf`

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 23:30 do dia 15/setembro/2021 e deve ser entregue até as 23:30 do dia 17/setembro/2021. Talvez o Classroom esteja com a data de entrega errada, como se o prazo fosse só de 24 horas.

Pra fazer essa prova você vai precisar de idéias que a gente viu durante o curso todo. Se você precisar saber onde estão as idéias necessárias pra resolver algum item pergunte no grupo do Telegram da turma que eu respondo com um link pros slides, vídeos, ou livros em que aquela idéia aparece.

Questão 1.
(Total: 5.5 pts)

Você deve ter lido que "o gradiente de uma função aponta pra direção de maior crescimento dela". Nesta questão nós vamos ver um modo de provar isto — num caso particular em $\mathbb{R}^2$.
O caso geral vai ser este aqui:

$$\begin{array}{rcl}
F & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\
P_0 & \in & \mathbb{R}^2 \\
\vec{v} & = & \nabla F(P_0) \\
\vec{v} & = & \overrightarrow{(a,b)} \\
\vec{u} & \perp & \vec{v},\ \text{obedecendo}\ ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \\
A & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P_0, Q) = ||\vec{v}||\,\} \\
B & = & \{P_0 + \overrightarrow{(\pm a, \pm b)}\} \cup \{P_0 + \overrightarrow{(\pm b, \pm a)}\} \\
\theta & \in & \mathbb{R} \\
\vec{w} & = & (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{u}
\end{array}$$

Questão 1 (cont.)
O caso particular vai ser o da coluna da direita abaixo:

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ P_0 & \in & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} & = & \nabla F(P_0) \\ \vec{v} & = & \overrightarrow{(a,b)} \\ \vec{u} & \perp & \vec{v}, \text{ obedecendo } ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \\ A & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P_0, Q) = ||\vec{v}||\,\} \\ B & = & \{P_0 + \overrightarrow{(\pm a, \pm b)}\} \cup \{P_0 + \overrightarrow{(\pm b, \pm a)}\} \\ \theta & \in & \mathbb{R} \\ \vec{w} & = & (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{u} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F(x,y) & = & 10 - 2x + y \\ P_0 & = & (3,2) \\ \vec{v} & = & \nabla F(P_0) \\ \vec{u} & = & \overrightarrow{(1,2)} \end{array}$$

Dica: neste caso particular o conjunto B vai ser um conjunto de 8 pontos equidistantes de P_0, todos com coordenadas inteiras.

Questão 1 (cont.)
Nesse caso particular,

a) **(0.2 pts)** Dê as coordenadas dos 8 pontos de B.

b) **(0.2 pts)** Represente graficamente num gráfico só:
P_0, $P_0 + \vec{v}$ e $P_0 + \vec{u}$ (como setas), A, B.

c) **(0.5 pts)** Faça um diagrama de numerozinhos pra função F, mas no qual você só vai indicar os valores de $F(x, y)$ nos pontos em que $(x, y) \in B$ e em $(x, y) = P_0$.

d) **(0.1 pts)** Seja P_1 o ponto de B no qual $F(x, y)$ assume o maior valor. Diga as coordenadas de P_1 e faça um círculo em torno de P_1 na figura que você fez no item (c).

e) **(1.0 pts)** Acrescente à figura do seu item (c) as curvas de nível da $F(x, y)$ que passam pelos pontos de B.

Questão 1 (cont.)
Ainda nesse caso particular,

f) **(0.5 pts)** Verifique que P_1 é um ponto da forma $P_0 + \alpha\vec{v}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Qual é o valor de α?

g) **(0.5 pts)** Sejam P_2 e P_3 os dois pontos de B em que temos $F(P_0) = F(P_2) = F(P_3)$. Diga as coordenadas de P_2 e P_3 e verifique que tanto P_2 quanto P_3 são da forma $P_0 + \beta\vec{u}$. Qual é o valor de β associado ao P_2? E qual é o valor de β associado ao P_3?

Questão 1 (cont.)
Ainda nesse caso particular...

h) **(0.5 pts)** Na "notação de físicos" podemos dizer que "$\vec{w}$ é função de θ", e podemos escrever isto assim: $\vec{w} = \vec{w}(\theta)$. Represente graficamente num gráfico só, separado dos gráficos anteriores: P_0, o conjunto A, e $P_0 + \vec{w}(\theta)$ para estes valores de θ: $0°$, $45°$, $90°$. Não esqueça de indicar qual é o θ associado a cada seta!

i) **(1.0 pts)** Encontre uma fórmula para $F(P_0 + \vec{w}(\theta))$. Simplifique o resultado dela o máximo que puder.

j) **(0.5 pts)** Encontre uma fórmula para $\frac{d}{d\theta}F(P_0 + \vec{w}(\theta))$. Simplifique o resultado dela o máximo que puder.

Questão 1 (cont.)
Ainda nesse caso particular...

k) **(0.5 pts)** Seja $z = z(\theta) = F(P_0 + \vec{w}(\theta))$, pra abreviar. Faça o gráfico de $z(\theta)$ — com θ crescendo pra direita e z crescendo pra cima — e mostre no gráfico para quais valores de θ o valor de z é maximo e mínimo.

Questão 2.
(Total: 3.0 pts)

Aqui nós vamos generalizar a questão 1 —
pra um caso particular bem mais geral que o anterior,
que é o da coluna da direita abaixo:

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ P_0 & \in & \mathbb{R}^2 \\ \vec{v} & = & \nabla F(P_0) \\ \vec{v} & = & \overrightarrow{(a,b)} \\ \vec{u} & \perp & \vec{v},\ \text{obedecendo } ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \\ A & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(P_0, Q) = ||\vec{v}||\,\} \\ B & = & \{P_0 + \overrightarrow{(\pm a, \pm b)}\} \cup \{P_0 + \overrightarrow{(\pm b, \pm a)}\} \\ \theta & \in & \mathbb{R} \\ \vec{w} & = & (\cos\theta)\vec{v} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{u} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F(x,y) & = & \alpha x + \beta y + \gamma \\ (\alpha,\beta) & \neq & (0,0) \\ \vec{u} & = & \overrightarrow{(b,-a)} \end{array}$$

Questão 2 (cont.)
Seja $z = z(\theta) = F(P_0 + \vec{w}(\theta))$, pra abreviar.

a) **(1.0 pts)** Encontre uma fórmula para $z(\theta)$.
Simplifique o resultado dela o máximo que puder.

b) **(1.0 pts)** Encontre uma fórmula para $\frac{d}{d\theta}z(\theta)$.
Simplifique o resultado dela o máximo que puder.

c) **(1.0 pts)** Faça o gráfico de $z(\theta)$ — com θ crescendo pra direita e z crescendo pra cima — e mostre no gráfico para quais valores de θ o valor de z é maximo e mínimo.

Questão 3.
(Total: 2.0 pts)

Na última aula antes da prova nós começamos a fazer esse "Exercício 5" aqui, mas não terminamos...
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-abertos-e-fechados.pdf#page=9

Use as "traduções" dos slides 14 e 15 desse PDF sobre abertos e fechados pra traduzir isto aqui pra uma outra expressão que seja "a mais simples possível":

$$[2, 4] \text{ não é aberto}$$

Questão 3 (cont.)

Dá pra definir formalmente o que quer dizer esse "mais simples possível" entre aspas, mas a definição formal é meio horrível. A dica é que no slide 14 desse PDF, cujo título é "Algumas traduções", cada igualdade da tabela é desta forma:

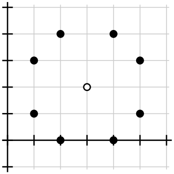
$$\text{expressão “mais complicada”} \quad = \quad \text{expressão “mais simples”}$$

com a expressão "mais simples" à direita.

Gabarito

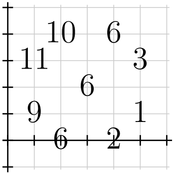
Questões 1a até 1e

(Os desenhos estão muito incompletos)

1a) 

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(2,4),(4,4),} \\ (1,3), & (5,3), \\ (1,1), & (5,1), \\ \multicolumn{2}{c}{(2,0),(4,0)} \end{array}$$

1b) $\begin{array}{rcl} \vec{v} &=& \overrightarrow{(-2,1)} \\ \vec{u} &=& \overrightarrow{(1,2)} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{rcl} P_0 &=& (3,2) \\ P_0+\vec{v} &=& (1,3) \\ P_0+\vec{u} &=& (4,4) \end{array}$

1c) 

1d) $P_1 = (1,3)$

Questões 1f até 1h

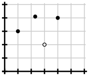
1f) $P_1 = (1,3) = P_0 + 1\vec{v} = (3,2) + 1\overrightarrow{(-2,1)}$

1g) $P_2 = (2,0) = P_0 + (-1)\cdot\vec{u} = (3,2) + (-1)\cdot\overrightarrow{(1,2)}$

$P_3 = (4,4) = P_0 + 1\cdot\vec{u} = (3,2) + 1\cdot\overrightarrow{(1,2)}$

1h)

$$\begin{array}{rcll}
\vec{w}(0^\circ) & = & (\cos 0^\circ)\vec{v} + (\operatorname{sen} 0^\circ)\vec{v} & = \overrightarrow{(-2,1)} + \overrightarrow{(0,0)} \\
\vec{w}(45^\circ) & = & (\cos 45^\circ)\vec{v} + (\operatorname{sen} 45^\circ)\vec{v} & = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(-2,1)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(1,2)} \\
\vec{w}(90^\circ) & = & (\cos 90^\circ)\vec{v} + (\operatorname{sen} 90^\circ)\vec{v} & = \overrightarrow{(0,0)} + \overrightarrow{(1,2)} \\
P_0 + \vec{w}(0^\circ) & = & (3,2) + \overrightarrow{(-2,1)} & \\
P_0 + \vec{w}(45^\circ) & = & (3,2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(-1,3)} & \\
P_0 + \vec{w}(90^\circ) & = & (3,2) + \overrightarrow{(1,2)} &
\end{array}$$



Questões 1i e 1j

1i)

$$\begin{array}{rcl}
F(P_0+\vec{w}(\theta)) & = & F((3,2)+(\cos\theta)\overrightarrow{(-2,1)}+(\operatorname{sen}\theta)\overrightarrow{(1,2)}) \\
& = & F((3,2)+\overrightarrow{(-2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta,\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta)}) \\
& = & F((3-2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta,2+\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta)) \\
& = & 10-2(3-2\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)+(2+\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta) \\
& = & 10-6+4\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta+2+\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta \\
& = & 6+5\cos\theta
\end{array}$$

1j)

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{d\theta}F(P_0+\vec{w}(\theta)) & = & \frac{d}{d\theta}(6+5\cos\theta) \\
& = & -5\operatorname{sen}\theta
\end{array}$$

Questões 2a e 2b

2a) Temos $\vec{v} = \nabla F(P_0) = \overrightarrow{(\alpha, \beta)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(a, b)}$,
Então $\alpha = a$ e $\beta = b$. Aí:

$$\begin{array}{rcl}
z(\theta) & = & F(P_0 + \vec{w}(\theta)) \\
& = & F((x_0, y_0) + (\cos\theta)\overrightarrow{(a, b)} + (\operatorname{sen}\theta)\overrightarrow{(b, -a)}) \\
& = & F((x_0, y_0) + \overrightarrow{((\cos\theta)a + (\operatorname{sen}\theta)b, (\cos\theta)b - (\operatorname{sen}\theta)a)}) \\
& = & \alpha(x_0 + (\cos\theta)a + (\operatorname{sen}\theta)b) + \beta(y_0 + (\cos\theta)b - (\operatorname{sen}\theta)a) + \gamma \\
& = & \alpha(x_0 + (\cos\theta)\alpha + (\operatorname{sen}\theta)\beta) + \beta(y_0 + (\cos\theta)\beta - (\operatorname{sen}\theta)\alpha) + \gamma \\
& = & \alpha x_0 + \alpha^2(\cos\theta) + \alpha\beta(\operatorname{sen}\theta) + \beta y_0 + \beta^2(\cos\theta) - \alpha\beta(\operatorname{sen}\theta) + \gamma \\
& = & \alpha x_0 + \alpha^2(\cos\theta) + \beta y_0 + \beta^2(\cos\theta) + \gamma \\
& = & (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2)(\cos\theta) \\
& = & F(P_0) + (\alpha^2 + \beta^2)(\cos\theta)
\end{array}$$

2b) $$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{d\theta} z(\theta) & = & \frac{d}{d\theta}((\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) + (\alpha^2 + \beta^2)(\cos\theta)) \\
& = & (\alpha^2 + \beta^2)(-\operatorname{sen}\theta)
\end{array}$$

Gabarito da 3

Lembre que $A = [2,4]$. Temos:

$$\begin{array}{rrcl}
 & A & \text{não é aberto} & \\
\Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \mathrm{Int}(A) \\
\Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\
\Leftrightarrow & [2,4] & \not\subseteq & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].\ x \notin \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\} \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].\neg(x \in \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\}) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].\neg(x \in [2,4] \land \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(x) \subseteq [2,4]) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].(\neg x \in [2,4]) \lor (\neg\, \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(x) \subseteq [2,4]) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].(\neg x \in [2,4]) \lor (\forall \varepsilon > 0.\neg(\mathsf{B}_\varepsilon(x) \subseteq [2,4])) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].(\neg x \in [2,4]) \lor (\forall \varepsilon > 0.\neg(\forall y \in \mathsf{B}_\varepsilon(x).\ y \in [2,4])) \\
\Leftrightarrow & \exists x \in [2,4].(\neg x \in [2,4]) \lor (\forall \varepsilon > 0.\ \exists y \in \mathsf{B}_\varepsilon(x).\ \neg y \in [2,4])) \\
\Leftrightarrow & \ldots
\end{array}$$