Cálculo 3 - 2021.1

Aula 25: abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Dê uma olhada no capítulo 4 do Bortolossi...
Comece pela seção 4.1, "Por que funções contínuas são importantes", depois leia a seção 4.3, sobre o Teorema de Weirstrass em n variáveis, e relembre a definição de distância euclidiana na p.139.

Nós vamos começar entendendo as definições das páginas 142 até 148, e vamos reescrevê-las de um jeito bem mais curto.

O melhor modo de entender esses assuntos é discutindo no Telegram os exercícios de hoje.

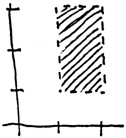
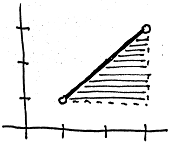
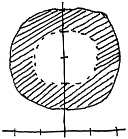
Nós vamos ver como fazer hipóteses sobre os exercícios dos próximos dois slides, como testar essas hipóteses, e como descartar as hipóteses erradas.

Nove subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

(Compare com a p.130 do Bortolossi...)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl}
C_1 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\le 3\,\}, \\
C_2 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\le 3 \ \text{ e } \ 1\le x<4\,\}, \\
C_3 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\le 2\,\}, \\
C_4 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<d((x,y),(1,2))\le 2\,\}, \\
C_5 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\le 2 \ \text{ e } \ 1<x\,\}, \\
C_6 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x\,\},
\end{array}$$

$C_7 =$ , $C_8 =$ , $C_9 =$ .

Exercício 1.
Representе graficamente os conjuntos $C_1, \ldots, C_6$.

Exercício 2.
Represente os conjuntos C_7, C_8, C_9
em “notação de conjuntos” — isto é,
na forma $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots \}$.

Bolas abertas e fechadas
Se P é um ponto de $\mathbb{R}^n$ então a
bola fechada de raio ε em torno de P, $\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P)$, e a
bola aberta de raio ε em torno de P, $\mathsf{B}_\varepsilon(P)$,
são definidas assim:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) \leq \varepsilon \,\} \\ \mathsf{B}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \varepsilon \,\} \end{array}$$

Por exemplo, se $P = 6 \in \mathbb{R}^1$ então:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_2(6) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^1 \mid d(6,Q) \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid d(6,x) \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(6-x)^2} \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x-6 \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2+6 \leq x \leq 2+6 \,\} \\ & = & [4,8] \end{array}$$

Exercício 3.
Representе graficamente:

a) $\overline{\mathsf{B}}_1((2,2))$,
b) $\mathsf{B}_1((2,2))$.

Dica: estes conjuntos vão parecer muito mais com "bolas de verdade" do que o conjunto $\overline{\mathsf{B}}_2(6)$ do slide anterior.

Lembre que a gente desenha a fronteira de um conjunto tracejada quando a gente quer indicar que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto e a gente desenha ela sólida quando quer indicar que os pontos dela pertencem ao conjunto. Veja os desenhos dos conjuntos C_8 e C_9.

Exercício 4.
Aqui você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobrepostas a conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\mathsf{B}_{0.1}((0, 2.5)) \subseteq C_1$
b) $\mathsf{B}_{0.5}((0, 2.5)) \subseteq C_1$
c) $\overline{\mathsf{B}}_{0.5}((0, 2.5)) \subseteq C_1$
d) $\mathsf{B}_{0.1}((1, 3)) \subseteq C_2$
e) $\mathsf{B}_{0.1}((2.5, 2.5)) \subseteq C_2$
f) $\mathsf{B}_1((2, 2)) \subseteq C_3$
g) $\overline{\mathsf{B}}_1((2, 2)) \subseteq C_3$
h) $\mathsf{B}_{0.5}((1, 0.5)) \subseteq C_4$
i) $\mathsf{B}_{0.1}((0.5, 2)) \subseteq C_5$
j) $\mathsf{B}_{0.001}((1.1, 1.01)) \subseteq C_8$

O interior de um conjunto (e conjuntos abertos)
Def: o *interior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int}(A)$,
é definido como:

$$\mathrm{Int}(A) \;\; = \;\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Note que isto sempre é verdade: $\mathrm{Int}(A) \subset A$.
Dizemos que um conjunto A é *aberto* quando $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

Exercício 5.
Seja $A = [2,4] \subset \mathbb{R}^1$.
Verifique que A não é aberto usando
a definição do slide anterior.
Dica: como $A = [2,4]$,

$$\begin{array}{rrcl}
& A & & \text{não é aberto} \\
\Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \mathrm{Int}(A) \\
\Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\
\Leftrightarrow & [2,4] & \not\subseteq & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\}
\end{array}$$

Tente continuar você mesmo usando ou matematiquês ou português.
Você talvez vá precisar de truques que as pessoas costumam aprender
nos primeiros semestres mas acabaram não aprendendo dessa vez
por causa da pandemia...

Exercício 6.

Represente graficamente:

a) $\mathrm{Int}(C_8)$,
b) $\mathrm{Int}(C_4)$,
c) $\mathrm{Int}(C_5)$,
d) $\mathrm{Int}(\mathsf{B}_1((2,2)))$.

O fecho de um conjunto (e conjuntos fechados)
Def: o *fecho* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A}$,
é definido como:

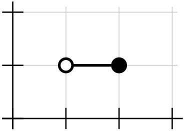
$$\overline{A} \;\; = \;\; \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \,\}$$

Compare com a definição do interior:

$$\mathrm{Int}(A) \;\; = \;\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Isto aqui sempre é verdade: $A \subset \overline{A}$.
Quando $\overline{A} \subset A$ dizemos que A é um conjunto *fechado*.

Exercício 7.
Digamos que:

$D_1 \quad =$ 

Represente graficamente:
a) $\overline{C_8}$
b) $\overline{D_1}$
c) $\mathrm{Int}(D_1)$

Um aviso sobre a P2

Em quase todos os problemas deste PDF é muito mais fácil mostrar que uma resposta está errada do que mostrar que ela está certa... e o método pra mostrar que uma resposta está errada vai ser um dos assuntos principais da P2.

Algumas traduções

$$
\begin{array}{rcl}
A \subset B & = & \forall a \in A. a \in B \\
A = B & = & (A \subset B) \land (B \subset A) \\
\neg(P \land Q) & = & \neg P \lor \neg Q \\
\neg(P \lor Q) & = & \neg P \land \neg Q \\
\neg(\forall a \in A. P(a)) & = & \exists a \in A. \neg P(a) \\
\neg(\exists a \in A. P(a)) & = & \forall a \in A. \neg P(a) \\
x \in \{\, a \in A \mid P(a) \,\} & = & x \in A \land P(x) \\
\neg(P \to Q) & = & P \land \neg Q \\
[20, 42) & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid 20 \le x < 42 \,\} \\
20 \le x < 42 & = & 20 \le x \land x < 42
\end{array}
$$

Lembra que '$\land$' é "e", '$\lor$' é "ou", '$\neg$' é "não", '$\to$' é "implica".

Alguns exemplos de traduções

$$
\begin{array}{l}
[a,b] \subset [20,42) \\
= \quad \forall x \in [a,b].x \in [20,42) \\
= \quad \forall x \in [a,b].20 \le x < 42 \\
= \quad \forall x \in \mathbb{R}.x \in [a,b] \to 20 \le x < 42 \\
= \quad \forall x \in \mathbb{R}.a \le x \le b \to 20 \le x < 42
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\neg([a,b] \subset [20,42)) \\
= \quad \neg(\forall x \in \mathbb{R}.a \le x \le b \to 20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \le b \to 20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \le b) \land (20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \land x \le b) \land (20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.(\neg(a \le x) \lor \neg(x \le b)) \land (20 \le x < 42) \\
= \quad \exists x \in \mathbb{R}.(x < a \lor b < x) \land (20 \le x < 42)
\end{array}
$$