

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 8: curvas de nível e diagramas de numerozinhos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C3.html>

Links:

Sobre “adivinhar trajetórias”:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-vetor-tangente.pdf#page=6>

Diagramas de numerozinhos (2020.2):

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-rcadeia1.pdf#page=14>

Mini-teste sobre cortes em superfícies no olhômetro (2020.2):

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf#page=4>

Questão 1 da P1 de 2020.2:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-P1.pdf#page=8>

Exercício 1.

Sejam:

$$f(x) = x - 2$$

$$g(x) = 6 - x$$

$$h(x) = \min(f(x), g(x))$$

$$w(x) = \max(h(x), 0)$$

$$V(x, y) = w(x)$$

$$H(x, y) = w(y)$$

$$P(x, y) = \min(V(x, y), H(x, y))$$

$$C(x, y) = \max(V(x, y), H(x, y))$$

a) Faça os gráficos de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $w(x)$.

(Dica: isto é bem parecido com a questão 1 da P1 de 2020.2).

b) Faça os diagramas de numerozinhos de $V(x, y)$, $H(x, y)$, $P(x, y)$, $C(x, y)$.

Exercício 1 (cont.)

Represente graficamente, em 3D com perspectiva improvisada, as superfícies abaixo. Isto é bem parecido com a questão 1f da P1 de 2020.2.

c) $z = V(x, y)$

d) $z = H(x, y)$

e) $z = P(x, y)$

f) $z = C(x, y)$

Exercício 2.

Sejam S_V , S_H , S_P e S_C estas superfícies,
e $X(x_0)$, $Y(y_0)$, $Z(z_0)$ estes planos:

$$\begin{aligned}S_V &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = V(x, y) \}, \\S_H &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = H(x, y) \}, \\S_P &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = P(x, y) \}, \\S_C &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = C(x, y) \}, \\X(x_0) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0 \}, \\Y(y_0) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = y_0 \}, \\Z(z_0) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_0 \},\end{aligned}$$

Exercício 2 (cont.)

Represente graficamente em perspectiva improvisada:

- a) $S_P \cap Z(1)$,
- b) $S_C \cap Z(1)$,
- d) $S_V \cap Z(1)$,
- e) $S_V \cap Z(1)$,

Agora desenhe num gráfico só a superfície S_P
e estes quatro cortes:

- f) $S_P \cap X(3)$,
- g) $S_P \cap X(4)$,
- h) $S_P \cap Y(4)$,
- i) $S_P \cap Z(1)$.

Dica: os itens f, g, h e i são parecidos com este mini-teste:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf>

Exercício 3.

Este é um exercício pra fazer todo olhometro, só olhando pras figuras que você já fez — os diagramas de numerozinhos e as figuras 3D. *Se você não conseguir tente de novo, descanse, tente mais uma vez, repita, etc — e discuta com os seus colegas!*

Exercício 3 (cont.)

Considere a superfície em que $z = P(x, y)$.

a₀) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$. Quanto é z neste ponto?

a₁) Digamos que $(x_1, y_1) = (x_0 + 0.1, y_0)$; ou seja a gente andou 0.1 pra direita. Quanto é z neste ponto?

a₂) Digamos que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0 + 0.1)$; ou seja a gente andou 0.1 pra cima a partir de (x_0, y_0) . Quanto é z neste ponto?

a₃) Digamos que $(x_3, y_3) = (x_0 + 0.1, y_0 + 0.1)$. dá pra chegar nele a partir de (x_1, y_1) andando 0.1 pra cima, e também dá pra chegar nele a partir de (x_2, y_2) andando 0.1 pra direita. Quanto vale z em (x_3, y_3) ?

Exercício 3 (cont.)

Considere a superfície em que $z = P(x, y)$.

b₀) Digamos que $(x_0, y_0) = (4, 3)$. Quanto é z neste ponto?

b₁) Digamos que $(x_1, y_1) = (x_0 + 0.1, y_0)$; ou seja a gente andou 0.1 pra direita. Quanto é z neste ponto?

b₂) Digamos que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0 + 0.1)$; ou seja a gente andou 0.1 pra cima a partir de (x_0, y_0) . Quanto é z neste ponto?

b₃) Digamos que $(x_3, y_3) = (x_0 + 0.1, y_0 + 0.1)$. dá pra chegar nele a partir de (x_1, y_1) andando 0.1 pra cima, e também dá pra chegar nele a partir de (x_2, y_2) andando 0.1 pra direita. Quanto vale z em (x_3, y_3) ?

Exercício 4.

O que você acabou de fazer no exercício 3 costuma ser feito em linguagem matemática e numa notação bem compacta, como:

$$\begin{array}{c}
 (P(x_0 + \underbrace{\Delta x}_{\text{deslocamento em } x}, y_0) - P(\underbrace{x_0, y_0}_{\text{ponto original}})) / \Delta x \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ponto novo}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{z original}} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{z novo}} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{deslocamento em } z} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{taxa de variação}}
 \end{array}$$

Agora você vai tentar fazer uma série de itens como os do exercício 3, mas na notação nova, e fazendo tudo de cabeça.

Exercício 4 (cont.)

Calcule **sem escrever nada**:

a) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e $\Delta x = 0.1$.

Calcule $(P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0))/\Delta x$.

b) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e $\Delta x = 0.2$.

Calcule $(P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0))/\Delta x$.

b) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e $\Delta y = 0.1$.

Calcule $(P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0))/\Delta y$.