Cálculo 3 - 2021.1

Aula 13: entendendo visualmente derivadas parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Nossa equação do plano preferida

Nós vimos na revisão de planos que não existe uma "equação do plano" só... existem várias, e em geral a gente escolhe usar a que é mais conveniente. Hoje nós vamos preferir uma "equação do plano" que faz com que certas contas sejam muito fáceis de fazer de cabeça — desde que a gente faça elas em ordem lembrando os resultados anteriores.

Exercício 1.
Seja:

$$F(x,y) = 10(x-42) + 100(y-99) + 23$$

Calcule de cabeça:
a) $F(42, 99)$
b) $F(42+1, 99)$
c) $F(42, 99+1)$
d) $F(42+0.23, 99)$
e) $F(42, 99+0.34)$

Exercício 2.

Seja:

$$F(x,y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$$

Calcule de cabeça:

a) $F(x_0, y_0)$
b) $F(x_0 + 1, y_0)$
c) $F(x_0, y_0 + 1)$
d) $F(x_0 + \Delta x, y_0)$
e) $F(x_0, y_0 + \Delta y)$

Exercício 3.

Leia as páginas 170 e 171 do cap.5 do Bortolossi —
a partir da Definição 5.1 dele.

a) Verique que se usarmos $n = 2$ na definição dele temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1 + h, p_2) - f(p_1, p_2)}{h} \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, p_2 + h) - f(p_1, p_2)}{h}
\end{aligned}$$

Agora digamos que $f(x, y) = a(x - p_1) + b(y - p_2) + c$.
Calcule de cabeça:

b) $f(p_1, p_2)$

c) $f(p_1+h, p_2)$, $\frac{f(p_1+h,p_2)-f(p_1,p_2)}{h}$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(p_1+h,p_2)-f(p_1,p_2)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2)$

d) $f(p_1, p_2+h)$, $\frac{f(p_1,p_2+h)-f(p_1,p_2)}{h}$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(p_1,p_2+h)-f(p_1,p_2)}{h}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2)$

Agora leia com atenção o bloco da p.171 do Bortolossi que começa com "CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!"...

Daqui a algumas aulas nós vamos começar a aprender a usar várias notações que o Bortolossi menciona que existem e explica super rápido, mas depois ele diz que vai evitar usar...

Eu chamo elas de "notações de físicos".

Quando a gente definir $G(z, w)$ desta forma

$$G(z, w) = e^z + 4w$$

isso vai querer dizer que a "primeira variável" da G é z e a segunda é w, e que $\frac{\partial}{\partial z}G = D_1G$ e que $\frac{\partial}{\partial w}G = D_2G$...

Se depois usarmos a função G com outras letras como argumentos — por exemplo $G(x, y)$ ou $G(w, z)$ — isso não vai mudar o significado de $\frac{\partial}{\partial z}G$ e $\frac{\partial}{\partial w}G$.

Exercício 4.

Agora digamos que:

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & a(x-x_0)+b(y-y_0)+c \end{array}$$

Esse "$(x,y) \mapsto \ldots$" indica que o nosso nome preferido pra primeira variável (ou argumento) da g é 'x', que o nosso nome preferido pra segunda variável é 'y' — e que $\frac{\partial}{\partial x} g = D_1 g$ e $\frac{\partial}{\partial y} g = D_2 g$.

a) Calcule $\frac{\partial}{\partial x} g(x_0, y_0)$.
b) Calcule $\frac{\partial}{\partial y} g(x_0, y_0)$.

Dica: compare que o exercício 3 e escreva o quando precisar até entender todos os detalhes da tradução. É quase impossível fazer este exercício de cabeça.

Dois videos do semestre passado

Assista estes dois vídeos do semestre passado:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C3-plano-tang-3.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=NYDkZJGZSy8

http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C3-plano-tang-4.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=UVJntqN10fg

Os próximos dois exercícios são adaptações dos exercícios 9 e 10 do semestre passado.

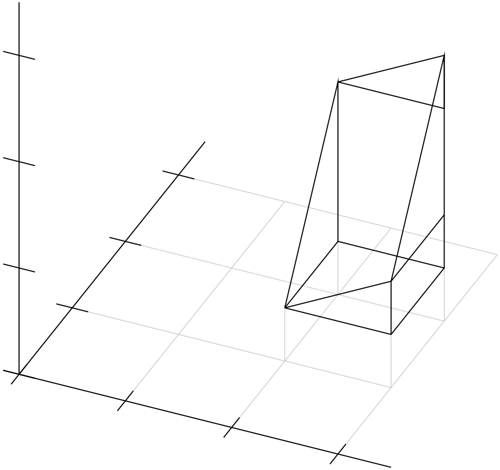
Dica importante: comece com uma F simples

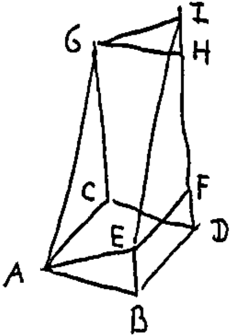
Você pode pensar que a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos próximos dois exercícios é uma função suave qualquer, mas acho que é mais fácil fazer os exercícios em duas etapas... Comece supondo que a F é da forma

$$F(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c,$$

e depois a gente vê como tratar os caso em que a F é mais complicada.

Exercício 5 (adaptado do "exercício 9" do semestre passado)
Olhe para os diagramas do próximo slide. Eu ainda não sei fazer esses diagramas direito no computador, então à direita do diagrama feito por computador eu pus uma versão dele feita à mão com os nomes dos pontos. Digamos que $A = (x_0, y_0, z_0)$, e que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{(1, 0, F_x(x_0, y_0))}$ e $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{(0, 1, F_y(x_0, y_0))}$.
Descubra as coordenadas dos pontos B, C, D, E, F, G, H, I.

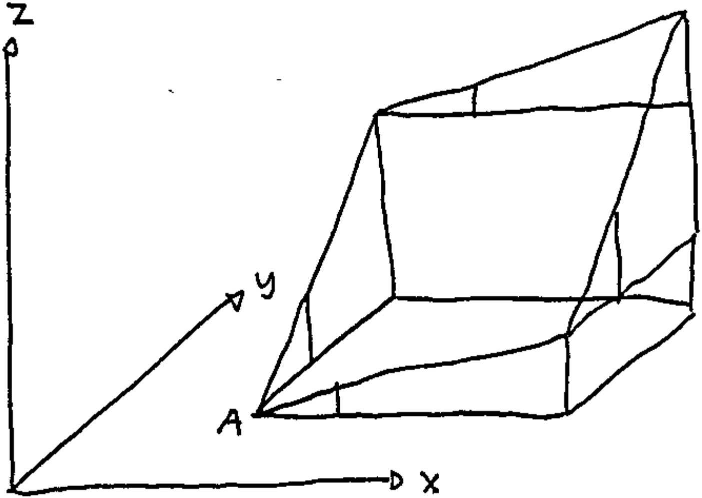



G
I
H
C
F
E
D
A
B

Exercício 6.
(Este exercício generaliza as idéias do exercício anterior).
Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
F & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\
S & = & \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x, y) \,\}, \\
A_0 & = & (x_0, y_0), \\
A & = & (x_0, y_0, F(x_0, y_0)), \\
\vec{v} & = & \overrightarrow{(1, 0, F_x(A_0))}, \\
\vec{w} & = & \overrightarrow{(0, 1, F_y(A_0))}, \\
\alpha, \beta & \in & \mathbb{R}.
\end{array}
$$

a) Identifique no diagrama do próximo slide os pontos:
$A + \vec{v}$, $A + \alpha\vec{v}$, $A + \vec{w}$, $A + \beta\vec{w}$, $A + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$,
Dica: α é aproximadamente 4, e β aproximadamente 2.5.


z
y
x
A

Exercício 6 (cont.)

b) Verifique – visualmente – que os pontos
$A+\vec{v}$, $A+\alpha\vec{v}$, $A+\vec{w}$, $A+\beta\vec{w}$, $A+\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$,
do item (a) estão todos no mesmo plano.

c) Verifique que esse plano é o plano tangente à superfície S no ponto A.