Cálculo 3 - 2021.1

Aula 17: algumas funções quadráticas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Nós começamos a ver como pegar uma superfície e um ponto dela e aí obter um plano tangente a essa superfície nesse ponto, e começamos a ver qual é a relação disso com derivadas parciais...

Um plano tangente é uma *aproximação de 1ª ordem*. Nestes exercícios vamos ver um pouco sobre aproximações de 2ª ordem — mas só o suficiente pra gente ter mais motivação pra "notação de físicos" e pra gente aprender a visualizar o que certas contas importantes querem dizer.

O que a gente vai ver aqui tem muito a ver com as superfícies quádricas que costumam ser vistas rapinho no final do curso de GA, mas vamos usar alguns truques pro nosso ponto base não precisar ser o zero. Veja as figuras 3D daqui...

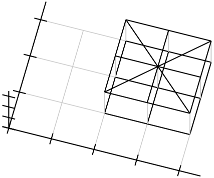
`https://en.wikipedia.org/wiki/Quadric`

A equação da superfície
Nós vamos usar esta equação pra nossa superfície:

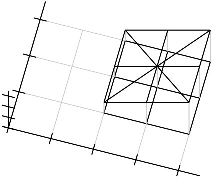
$$
\begin{array}{rcl}
z & = & z(x,y) \\
  & = & z(x_1,y_1) \\
  & = & a + b\cdot(x_1-x_0) + c\cdot(y_1-y_0) \\
  & + & d\cdot(x_1-x_0)^2 + e\cdot(x_1-x_0)(y_1-y_0) \\
  & + & f\cdot(y_1-y_0)^2 \\
  & = & a + b\Delta x + c\Delta y + d\Delta x^2 + e\Delta x\Delta y + f\Delta y^2
\end{array}
$$

Repare que vamos usar $x = x_1$ e $y = y_1$ pra podermos usar as convenções $\Delta x = x_1 - x_0$ e $\Delta y = y_1 - y_0$ sem precisamos definir nada extra.

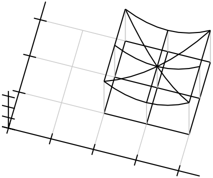
Nas figuras dos próximos slides vamos sempre usar $x_0 = 3$ e $y_0 = 2$.



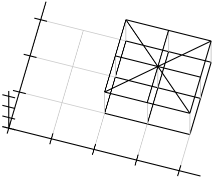
$z = 2$



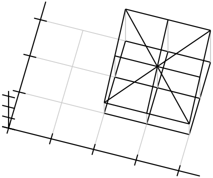
$z = 2 + \Delta x$



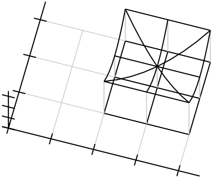
$z = 2 + \Delta x^2$



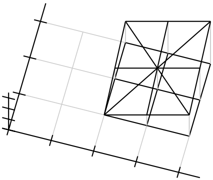
$z = 2$



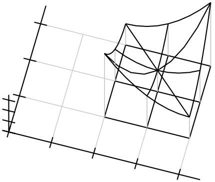
$z = 2 + \Delta y$



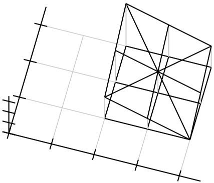
$z = 2 + \Delta y^2$



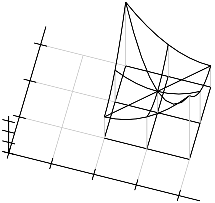
$$z = 2 + (\Delta x + \Delta y)$$



$$z = 2 + (\Delta x + \Delta y)^2$$



$$z = 2 + (\Delta y - \Delta x)$$



$$z = 2 + (\Delta y - \Delta x)^2$$

Exercício 1.
Faça o diagram de numerozinhos de cada uma das superfícies abaixo. Considere que os pontos que nos interessam são só os em que $x \in \{x_0 - 1, x_0, x_0 + 1\}$ e $y \in \{x_0 - 1, x_0, x_0 + 1\}$. Veja o vídeo pra entender!

a) $z = 2$
b) $z = x$
c) $z = \Delta x$
d) $z = \Delta x^2$
e) $z = \Delta x^2 + 2$
f) $z = y$
g) $z = \Delta y$
h) $z = \Delta y^2$
i) $z = \Delta y^2 + 2$
j) $z = \Delta x^2 + \Delta y^2$
k) $z = \Delta x^2 + \Delta y^2 + 2$
l) $z = \Delta x + \Delta y$
m) $z = (\Delta x + \Delta y)^2$
n) $z = (\Delta x + \Delta y)^2 + 2$

Exercício 2.
Relembre o que era o "estudo do sinal de uma função" que você deve ter visto em Cálculo 1, e faça um diagramas indicando em que intervalos cada uma das funções abaixo é positiva, negativa, ou zero.
(Veja o segundo vídeo!)

a) x
b) $x+1$
c) $x(x+1)$
d) $4-x$
e) $x(x+1)(4-x)$

Exercício 3.

Agora adapte essa idéia do diagrama do sinal para $\mathbb{R}^2$,
no quadrado com $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ e $y \in [y_0 - 1, y_0 + 1]$,
e faça o diagrama do sinal para cada uma das funções abaixo.
Veja o segundo vídeo pra explicações e exemplos!

a) Δx
b) Δx^2
c) Δy
d) $\Delta x \Delta y$
e) $\Delta x + \Delta y$
f) $\Delta x - \Delta y$
g) $(\Delta x + \Delta y)^2$
h) $(\Delta x - \Delta y)^2$
i) $(\Delta x + \Delta y)(\Delta x - \Delta y)$
j) $(\Delta x + \Delta y)\Delta x$
k) $-(\Delta x + \Delta y)^2$

Exercício 4.
A partir de agora vamos considerar que:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x(t) \\ & = & x(t_1) \\ & = & x_0 + \alpha \cdot (t_1 - t_0) \\ & = & x_0 + \alpha \Delta t \\ y & = & y(t) \\ & = & y(t_1) \\ & = & y_0 + \beta \cdot (t_1 - t_0) \\ & = & y_0 + \beta \Delta t \end{array}$$

Onde $t_0 = 5$; x_0 e y_0 continuam os mesmos de antes, e α e β são constantes cujos valores podem depender do contexto.

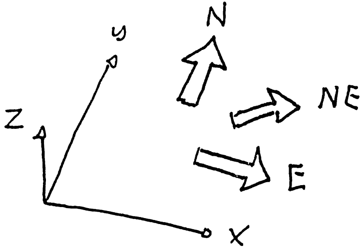
Exercício 4 (cont.)
A trajetória $(x(t), y(t))$ é sempre um movimento retilíneo uniforme pra quaisquer valores de α e β.

a) Calcule $\overrightarrow{(x_t, y_t)}$.

Cada escolha de valores para α e β dá uma trajetória diferente. Nos itens abaixo você vai visualizar algumas dessas trajetórias e vai desenhá-las no papel — desta forma aqui: você vai marcar no plano os pontos $(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$ para $\Delta t = -1, 0, 1$, vai escrever "$\Delta t = -1$", "$\Delta t = 0$" e "$\Delta t = 1$" do lado dos pontos correspondentes a esses valores de Δt, e ao lado de cada desenho você vai escrever os valores de α e β.

b) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
c) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Exercício 4 (cont.)
...e além disso você vai escrever algo como "Leste" (ou "E"), "Noroeste" (ou "NW") do lado de cada um dos seus desenhos de trajetórias pra indicar em que direção o ponto (x, y) está andando. Use a convenção que costuma ser usada em mapas, matemática e videogames, em que o Leste é pra direita e o Norte é pra cima:



Exercício 4 (cont.)

d) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = -1$ e diga o nome da direção dela.

e) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = -1$, $\beta = 1$. e diga o nome da direção dela.

f) Quais são os valores mais simples de α e β — onde “simples” quer dizer “0, 1 ou -1” — que fazem a trajetória ir pro nordeste? E pro sudoeste?

Nos próximos exercícios eu vou me referir a essas trajetórias em que α e β são números “simples” pelos nomes das direções delas.

O significado geométrico de z_t

Nós sabemos calcular z, z_t e z_{tt} a partir de t,
e sabemos calcular z, z_t e z_{tt} em t_0.

Com um pouquinho de esforço você deve ser
capaz de visualizar o que acontece perto de t_0...
o valor da primeira derivada, $(z_t)(t_0)$, diz o seguinte:

$$\begin{array}{lcl}
z \text{ aumenta quando } t \text{ aumenta (``crescente'')} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) > 0 \\
z \text{ ``fica horizontal'' quando } t \text{ aumenta} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) = 0 \\
z \text{ diminui quando } t \text{ aumenta (``decrescente'')} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) < 0
\end{array}$$

Veja o vídeo!!!

`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-3.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=VwowES6EM3Y`

O significado geométrico de z_{tt}

Nos casos em que z "fica horizontal" nós vamos usar a segunda derivada, $(z_{tt})(t_0)$, pra ver se o gráfico de $z(t)$ "parece uma parábola" ao redor de t_0, e se essa parábola tem concavidade pra cima ou pra baixo:

$$\begin{array}{lcl}
\text{concavidade pra cima} & \iff & (z_{tt})(t_0) > 0 \\
\text{“parece horizontal”} & \iff & (z_{tt})(t_0) = 0 \\
\text{concavidade pra baixo} & \iff & (z_{tt})(t_0) < 0
\end{array}$$

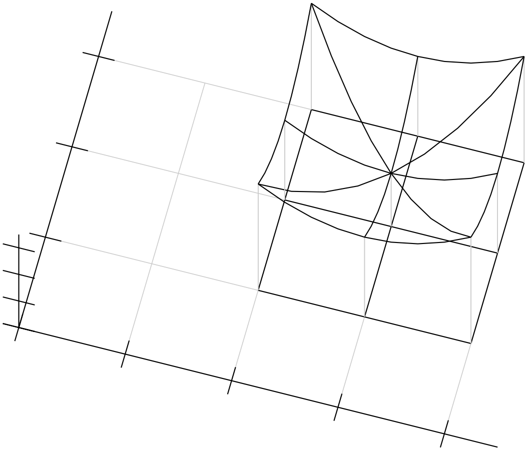
Eu usei muitos termos informais de propósito. No próximo exercício você vai tentar descobrir sem fazer contas qual é o comportamento da z em torno de t_0, e no outro exercício você vai fazer as contas e vai ver se o seu olhômetro funcionou direito.

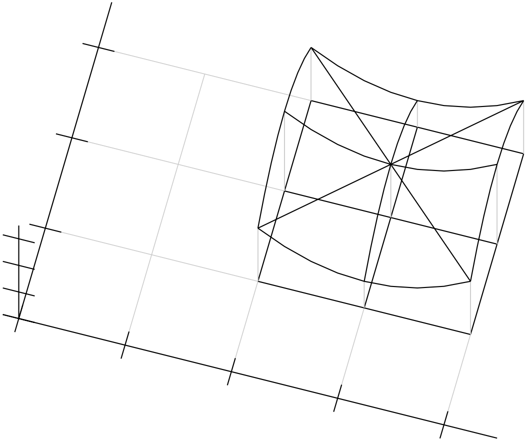
Exercício 5.
Em cada um dos desenhos dos próximos slides diga o que acontece quando a trajetória $(x(t), y(t))$ anda em uma das oito direções simples, que são:

norte, nordeste, leste, sudeste,
sul, sudoeste, oeste, noroeste.

Use estas categorias na suas respostas:

z cresce
z decresce
z faz uma parábola com concavidade pra cima
z faz uma parábola com concavidade pra baixo
z é "muito horizontal"





Calculando z_{tt} em "notação de matemáticos"

Lembre que:

1) estamos usando $z = z(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$,
2) matemáticos odeiam usar os mesmos nomes pra variáveis e pra funções,
3) pra traduzir $z = z(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ pra notação de matemáticos vamos ter que escolher nomes pra "função x", pra "função y" e pra "função z",
4) $z(x, y)$ é uma função de dois argumentos e $z(t) = z(x(t), y(t))$ é uma outra função, de um argumento só,
5) se você quer ser entendido faça as suas definições explicitamente, se possível usando "seja"s e "digamos que"s...

Calculando z_{tt} em "notação de matemáticos" (2)

Digamos que:

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & f(t), \\ y(t) & = & g(t), \\ z(x,y) & = & H(x,t), \\ z(x(t),y(t)) & = & m(t) \end{array}$$

Então

$$\begin{array}{rcl} z_t & = & \frac{d}{dt}z(t) \qquad\qquad (?!?!) \\ & = & \frac{d}{dt}m(t) \\ & = & \frac{d}{dt}z(x(t),y(t)) \\ & = & \frac{d}{dt}H(f(t),g(t)) \\ & = & \frac{\partial}{\partial x}H(f(t),g(t))\frac{d}{dt}f(t) + \frac{\partial}{\partial y}H(f(t),g(t))\frac{d}{dt}g(t) \\ & = & H_x(f(t),g(t))f'(t) + H_y(f(t),g(t))g'(t) \end{array}$$

Calculando z_{tt} em "notação de matemáticos" (3)

Continuando...

$$
\begin{array}{rcll}
z_t & = & z_t(t) & \text{(?!?!)} \\
 & = & \frac{d}{dt}z(t) & \\
 & = & \frac{d}{dt}m(t) & \\
 & = & \frac{d}{dt}z(x(t),y(t)) & \\
 & = & \frac{d}{dt}H(f(t),g(t)) & \\
 & = & \frac{\partial}{\partial x}H(f(t),g(t))\frac{d}{dt}f(t) + \frac{\partial}{\partial y}H(f(t),g(t))\frac{d}{dt}g(t) & \\
 & = & \frac{\partial}{\partial x}z(x(t),y(t))\frac{d}{dt}x(t) + \frac{\partial}{\partial y}z(x(t),y(t))\frac{d}{dt}y(t) & \\
 & = & z_x(x(t),y(t))x_t(t) + z_y(x(t),y(t))y_t(t) & \\
 & = & z_x x_t + z_y y_t &
\end{array}
$$

Os próximos slides são material de apoio pra este vídeo aqui:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-4.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=d0fnURoPI9Q

Do prefácio do Martin Gardner...

(p.14): (...) Here the height of the mercury column relative to the water's temperature is a one-to-one function of one variable. (...) In modern set theory this way of defining a function can be extended to completely arbitrary sets of numbers for a function that is described not by an equation but by a set of rules.

(p.14): For most of the functions encountered in calculus, the domain consists of a single interval of real numbers.

(p.15): We call such a function "continuous" if its graph can be drawn without lifting the pencil from the paper, and "discontinuous" otherwise. (The complete definition of continuity, which is also applicable to functions with more complicated domains, is beyond the scope of this book.)

Do prefácio do Martin Gardner... (2)

(p.15): Note that if a vertical line from the x axis intersects more than one point on a curve, the curve cannot represent a function because it maps an x number to more than one y number. Figure 5 is a graph that clearly is not a function because vertical lines, such as the one shown dotted, intersect the graph at three spots. (It should be noted that Thompson did not use the modern definition of "function." For example the graph shown in Figure 30 of Chapter XI fails this vertical line test, but Thompson considers it a function.)

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=117

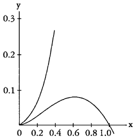


FIG. 30.

$$\begin{aligned}(y-x^2)^2 &= x^5 \\ y-x^2 &= \pm\, x^{5/2} \\ y &= x^2 \pm x^{5/2}\end{aligned}$$

Do capítulo "III. On Relative Growings" do Thompson

Whenever we use differentials dx, dy, dz, etc., the existence of some kind of relation between x, y, z, etc., is implied, and this relation is called a "function" in x, y, z, etc.; the two expressions given above, for instance, namely $\frac{y}{x} = \tan 30°$ and $x^2 + y^2 = \ell^2$, are functions of x and y. Such expressions contain implicitly (that is, contain without distinctly showing it) the means of expressing either x in terms of y or y in terms of x, and for this reason they are called implicit functions in x and y; they can be respectively put into the forms...

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=24

Do capítulo "III. On Relative Growings" do Thompson

(...) We see that an explicit function in x, y, z, etc., is simply something the value of which changes when x, y, z, etc., are changing, either one at the time or several together. Because of this, the value of the explicit function is called the dependent variable, as it depends on the value of the other variable quantities in the function; these other variables are called the independent variables because their value is not determined from the value assumed by the function. For example, if $u = x^2 \sin\theta$, x and θ are the independent variables, and u is the dependent variable.

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=25

Do capítulo "III. On Relative Growings" do Thompson

Sometimes the exact relation between several quantities x, y, z either is not known or it is not convenient to state it; it is only known, or convenient to state, that there is some sort of relation between these variables, so that one cannot alter either x or y or z singly without affecting the other quantities; the existence of a function in x, y, z is then indicated by the notation $F(x, y, z)$ (implicit function) or by $x = F(y, z)$, $y = F(x, z)$ or $z = F(x, y)$ (explicit function). Sometimes the letter f or is used instead of F, so that $y = F(x)$, $y = f(x)$ and $y = (x)$ all mean the same thing, namely, that the value of y depends on the value of x in some way which is not stated.

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=25

Do capítulo "XIII. Other useful dodges" do Thompson

It can be shown that for all functions which can be put into the inverse form, one can always write

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1 \qquad \text{or} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\,.$$

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=139

You will surely realize from this chapter and the preceding, that in many respects the calculus is an art rather than a science: an art only to be acquired, as all other arts are, by practice. Hence you should work many examples, and set yourself other examples, to see if you can work them out, until the various artifices become familiar by use.

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=141

Do capítulo “XIII. Other useful dodges” (2)

Um modo de traduzir esse “$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$” pra “notação de matemáticos” é supor que $y(x) = f(x)$ e $x(y) = g(y)$, e que o nosso ponto base é $(x, y) = (x, f(x))$...

(Também poderia ser $(x, y) = (g(y), y)$).

$$\begin{array}{rcl}
\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} & = & \frac{d}{dx}y \cdot \frac{d}{dy}x \\
& = & \frac{d}{dx}y(x) \cdot \frac{d}{dy}x(y) \\
& = & \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dy}g(y) \\
& = & \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dy}g(y) \\
& = & f'(x) \cdot g'(y) \\
& = & f'(x) \cdot g'(y(x)) \\
& = & f'(x) \cdot g'(f(x))
\end{array}$$

Do capítulo "X. Geometrical Meaning of Differentiation"

Se y é uma função de x,

então $y_x = \frac{dy}{dx}$ também é uma função de x...

ou seja, $y_x = y_x(x)$.

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=90

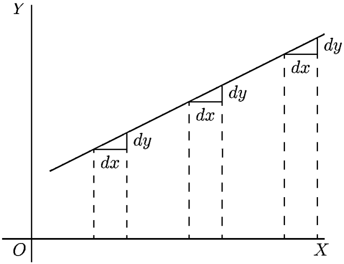


FIG. 12.

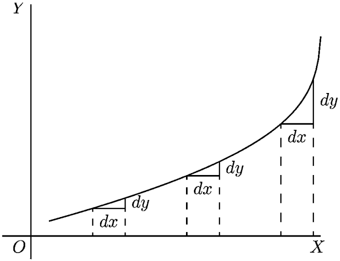


FIG. 13.

"A useful dodge"

O capítulo IX do Thompson —
chamado "IX. Introducing a Useful Dodge" —
é sobre um truque muito bom pra calcular derivadas complicadas que faz muito mais sentido em "notação de físicos" do que em "notação de matemáticos",
e que se baseia em inventar variáveis novas.

Link pro capítulo:

`https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=77`

Exercício 6.
Refaça você mesmo os exemplos (1) até (7) desse capítulo do Thompson pra ter certeza de que você entendeu o truque.

Link pro vídeo com dicas:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-5.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=Ubc7wXK22fM

Derivada direcional (Bortolossi)
O Bortolossi define a derivada direcional deste jeito, na p.296 do capítulo 8 dele:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Digamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que os argumentos da f se chamem x e y, que $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$, que