Cálculo 3 - 2021.1

Aula 23: o vetor gradiente

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Quando nós vimos trajetórias em $\mathbb{R}^2$ nós aprendemos a ver a derivada de uma trajetória como o vetor velocidade...

No mini-teste 2 vocês aprenderam a visualizar a derivada de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ como dois vetores — veja o vídeo!!!

Agora nós vamos ver um truque que nos permite interpretar a derivada de uma superfície como um vetor — o gradiente.

Comece lendo as páginas 298 até 302 do capítulo 8 do Bortolossi. Nós vamos ver as idéias que ele apresenta numa outra ordem: nós vamos começar desenhando os vetores gradientes de algumas superfícies simples e verificando no olhômetro que eles realmente são ortogonais às curvas de nível e apontam pra direção de maior crescimento da função.

Exercício 1

Sejam:

$F(x,y) = (x-y)y = xy - y^2$,

$G(x,y) = \frac{1}{10}F(x,y) = \frac{(x-y)y}{10} = (xy-y^2)/10$.

Faça os diagramas de numerozinhos das funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ abaixo, desenhando os valores delas nos pontos que têm $x,y \in \{-3,\ldots,3\}$ (49 pontos!):

a) $x-y$

b) y

c) $(x-y)y$

d) $((x-y)y)/10$

e) $G_x(x,y)$

f) $G_y(x,y)$

Exercício 1 (cont.)

g) Desenhe as curvas de nível da função $G(x,y)$.

h) Em cada ponto $(x,y) \in \{-3,\ldots,3\}^2$ desenhe o vetor gradiente $\nabla G(x,y)$. Mais precisamente: para cada ponto $(x,y) \in \{-3,\ldots,3\}^2$ desenhe $(x,y) + \overrightarrow{(G_x(x,y), G_y(x,y))}$.

Exercício 2.
Assista este vídeo:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-gradiente-2.mp4

Sejam:
$z = F(x, y)$,
$(x_0, y_0) = (0, 1)$,
$z_0 = z(x_0, y_0)$,
$C = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x, y) = z_0 \,\}$,

O conjunto C é formado de duas curvas.

a) Encontre as funções $h_{\text{cima}}(x)$ e $h_{\text{baixo}}(x)$
que percorrem essas duas curvas; ou seja,

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h_{\text{cima}}(x) \,\} \\ & \cup & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = h_{\text{baixo}}(x) \,\} \end{array}$$

Exercício 2 (cont.)

b) Represente elas graficamente.
c) Verifique que $h_{\text{cima}}(x_0) = y_0$.
d) Calcule $h'_{\text{cima}}(x)$.
e) Verifique (no olhômetro) se o valor de $h'_{\text{cima}}(x_0)$ faz sentido.

f) Seja $\vec{v} = \overrightarrow{(1, h'_{\text{cima}}(x_0))}$. Desenhe $(x_0, y_0) + \vec{v}$ e verifique — no olhômetro — se este vetor $\vec{v}$ é (ou parece ser...) paralelo ao gráfico da função h_{cima} no ponto (x_0, y_0).

g) Verifique se este vetor $\vec{v}$ é ortogonal ao vetor gradiente ∇F, isto é, $\nabla F(x_0, y_0)$. Aqui você vai fazer a verificação por contas: dois vetores $\overrightarrow{(a,b)}$ e $\overrightarrow{(c,d)}$ são ortogonais se e só se $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd = 0$.

Exercício 3.
Assista este vídeo:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-gradiente-3.mp4

Digamos que $y = y(x)$ e que $z(x, y(x))$ é constante.
Então $\frac{d}{dx} z(x, y(x)) = 0$.
A partir dá pra conseguir uma fórmula que calcula y_x em função de x e de y — sem precisamos encontrar uma fórmula para $y(x)$ (!!!)...

a) Encontre a fórmula para $y_x(x, y)$.
b) Encontre o valor de y_x no ponto $(x, y) = (x_0, y_0) = (0, 1)$.
c) Verifique que o vetor $\overrightarrow{(1, y_x)}$ é ortogonal ao gradiente ∇F no ponto (x_0, y_0).