

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 1: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C3.html>

Introdução ao curso

Cálculo 3 é principalmente sobre:

1. funções de \mathbb{R} em \mathbb{R}^2 – que o Bortolossi costuma chamar de **curvas parametrizadas**, mas nós vamos chamar de **trajetórias**, e
2. funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} , que vão gerar **superfícies**.

Depois que nós aprendermos o suficiente sobre (1) e (2) nós vamos poder lidar com coisas um pouco mais gerais, como funções $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um **conjunto aberto**.

Nossos primeiros objetivos vão ser:

1. Aprender a representar graficamente algumas trajetórias, usando a idéia de **traço** do Bortolossi (cap.6, p.188), mas escrevendo algumas informações a mais, como “ $t = 0$ ” e “ $t = 1$ ” em alguns pontos,
2. Calcular e representar graficamente **vetores tangentes** a trajetórias (“**vetores velocidade**”),
3. Entender **vetores secantes** (cap.6, p.199),
4. Entender **aproximações de primeira ordem** pra trajetórias, que dão **retas parametrizadas**, e depois **aproximações de segunda ordem**, que vão dar **parábolas parametrizadas**.

...mas hoje nós vamos fazer uma revisão de algumas idéias de GA.

Você já deve ter visto estas duas convenções diferentes para representar pontos e vetores... em **Álgebra Linear** tanto pontos quanto vetores em \mathbb{R}^2 são representados como matrizes-coluna de altura 2:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$$

e em **Geometria Analítica** pontos e vetores são escritos de forma diferente – vetores têm uma seta em cima – e representados graficamente de formas diferentes...

$$(2, 3) + \overrightarrow{(40, 50)} = (42, 53)$$

Vetores como setas

Um **ponto** (a, b) é interpretado graficamente como um ponto (a, b) de \mathbb{R}^2 , e um **vetor** $\overrightarrow{(c, d)}$ é interpretado como um **deslocamento**, e desenhado como uma **seta**.

Se o vetor $\overrightarrow{(c, d)}$ aparece sozinho a representação gráfica dele é **qualquer** seta que anda c unidades pra direita e d unidades pra cima. Às vezes a gente pensa que $\overrightarrow{(c, d)}$ é o conjunto de *todas* as setas assim – o conjunto de todas as setas “equipolentes” a esta; veja a p.9 do livro do CEDERJ.

Uma convenção (temporária)

O **resultado** da expressão $(a, b) + \overrightarrow{(c, d)}$ é o ponto $(a + c, b + d)$, mas a representação gráfica dele vai ser:

1) o ponto (a, b) ,

2) uma seta indo de (a, b) para $(a + c, b + d)$,

3) o ponto $(a + c, b + d)$,

4) anotações dos lados dos pontos (a, b) e $(a + c, b + d)$ dizendo os “nomes” destes pontos e uma anotação do lado da seta $\overrightarrow{(c, d)}$ dizendo o seu “nome” — como nos dois exemplos abaixo (oops! Falta fazer os desenhos!):

(pôr o desenho aqui)

Nesta aula vai ser obrigatório pôr todos os nomes, mas nas outras não.

A representação gráfica de

$$((1, 1) + \overrightarrow{(2, 0)}) + \overrightarrow{(1, 2)} = (1, 1) + (\overrightarrow{(2, 0)} + \overrightarrow{(1, 2)})$$

Vai ser um triângulo feito de três pontos e três setas – os que estão em vermelho aqui:

$$\underbrace{\underbrace{((1, 1) + \overrightarrow{(2, 0)})}_{(3, 1)} + \overrightarrow{(1, 2)}}_{(4, 3)} = (1, 1) + \underbrace{(\overrightarrow{(2, 0)} + \overrightarrow{(1, 2)})}_{\overrightarrow{(3, 2)}}_{(4, 3)}$$

O objetivo do próximo exercício é você lembrar como representar graficamente certas expressões com pontos e vetores usando quase só o olhómetro, quase sem fazer contas.

Veja o vídeo!

Desenhando parábolas (quase) no olhómetro

Digamos que conhecemos A , \vec{v} , e \vec{w} . Então a trajetória

$$P(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$

é uma parábola – e queremos aprender a desenhar os 5 pontos mais fáceis dela, que são $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$, usando o máximo de olhómetro e o mínimo possível de contas...

Veja o vídeo!

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhómetro

1) Sejam $A = (3, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0, 1)}$.

Represente graficamente **num gráfico só**:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (2)

2) Sejam $A = (1, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1, 1)}$.

Represente graficamente **num gráfico só**:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (3)

3) Sejam $A = (1, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1, 1)}$.

Represente graficamente **num gráfico só**:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (4)

4) Sejam $A = (2, 6)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2, -1)}$.

Represente graficamente **num gráfico só**:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Obs: você vai precisar de um gráfico que contenha os pontos $(0,0)$ e $(12,8)$.