

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 21: a matriz jacobiana

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C3.html>

Comece relendo o trecho ao redor da página 256 no capítulo 7 do Bortolossi... Hoje nós vamos ver dois jeitos de visualizar o que a matriz jacobiana quer dizer.

Vamos trabalhar em cima de um exemplo só: a função que leva cada número complexo $z \in \mathbb{C}$ em $z^2 \in \mathbb{C}$.

Veja os vídeos!

Vídeo 1:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-matriz-jacobiana.mp4>
<https://www.youtube.com/watch?v=kMGtZk5er9w>

Vídeo 2:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-matriz-jacobiana-2.mp4>
https://www.youtube.com/watch?v=D_YKka3RG9E

Porque a jacobiana de $w = z^2$ é desse jeito?

$$\begin{aligned}
 w &= z^2 \\
 z &= x + iy = (x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 w &= a + ib = (a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= w \\
 &= z^2 \\
 &= (x + iy)^2 \\
 &= x^2 + 2ixy + i^2y^2 \\
 &= x^2 + 2ixy - y^2 \\
 &= (x^2 - y^2) + i(2xy) \\
 &= (x^2 - y^2, 2xy) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \\
 a &= x^2 - y^2 \\
 b &= 2xy
 \end{aligned}$$

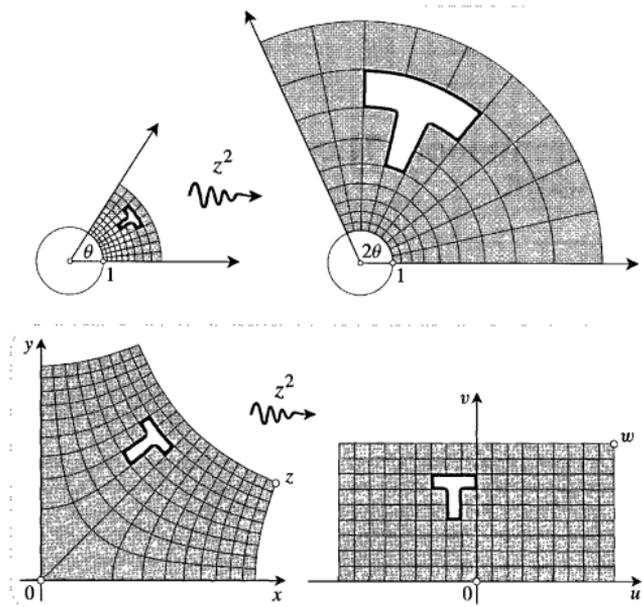
Porque a jacobiana de $w = z^2$ é desse jeito? (2)

$$\begin{aligned}
 w_z \Delta z &= \frac{d\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_x \Delta x + a_y \Delta y \\ b_x \Delta x + b_y \Delta y \end{pmatrix} \\
 &\approx \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} \\
 &= \Delta w
 \end{aligned}$$

Se w_x fosse $\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}$ ao invés de

$\begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}$ isso não daria certo.

Duas figuras do “Visual Complex Analysis” do Needham
Do capítulo 4, páginas 190 e 191...



Exercício 1.

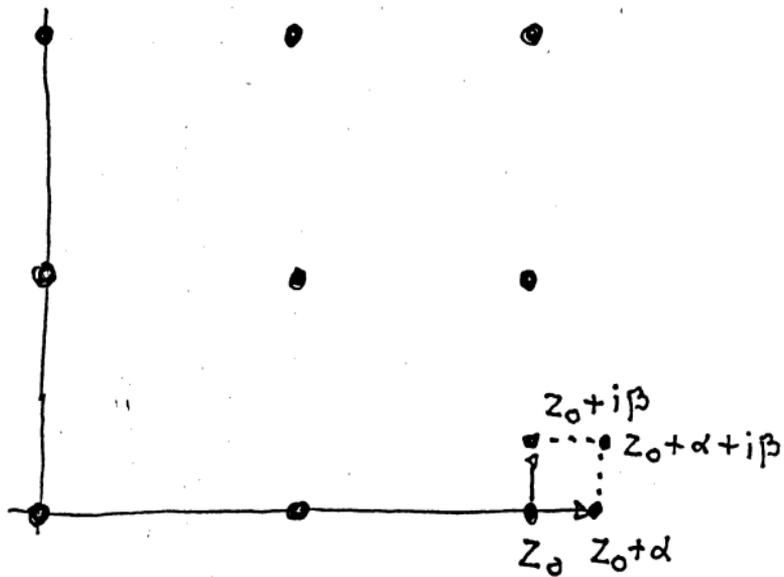
Desenhe um plano pros valores de z , à esquerda, e um plano pros valores de $w = z^2$ à direita, como nas figuras do Needham. Desenhe no planos dos ‘ z ’s os 9 valores de z que têm $x \in \{0, 1, 2\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Pra cada um desses 9 ‘ z s calcule o ‘ w ’ correspondente e desenhe ele no plano dos ‘ w ’s.

Exercícios de
preparação pro
mini-teste

No exercício 1 você descobriu as imagens pela função $z \mapsto w$ de 9 pontos. Agora você vai descobrir as imagens de 9 retângulos.

Sejam α e β dois reais positivos bem pequenos. Vamos fazer os desenhos todos à mão, então você pode usar $\alpha = \beta = 0.2$, ou $\alpha = \beta = 0.1$, algo assim — basta que α^2 e β^2 sejam “desprezíveis” no sentido do Silvanus Thompson (e dos vídeos).

Em cada um dos 9 pontos você vai imaginar um retangulinho de lados α e $i\beta$ “apoiado nele”, como o da figura do próximo slide...



...e você vai usar as derivadas pra encontrar uma *aproximação bastante razoável* pra imagem do retangulinho apoiado em cada um dos 9 ' z_0 's, e vai desenhar essa aproximação apoiada no w_0 correspondente a aquele z_0 .

O vídeo tem montes de explicações e dicas. Links:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-matriz-jacobiana-2.mp4>

https://www.youtube.com/watch?v=D_YKka3RG9E

Se $\gamma = \alpha + i\beta$, então...
 (Veja o vídeo!!!)

$$\begin{aligned}
 w(z_0 + \gamma) &= w(z_0 + (\alpha + i\beta)) \\
 &= w((x_0 + iy_0) + (\alpha + i\beta)) \\
 &= w((x_0 + \alpha) + i(y_0 + \beta)) \\
 &= w(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) \\
 &= w(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) \\
 &= a(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) + ib(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) \\
 &= (a(x_0 + \alpha, y_0 + \beta), b(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)) \\
 &\approx (a + a_x\alpha + a_y\beta, b + b_x\alpha + b_y\beta) \\
 &= (a, b) + (a_x\alpha + a_y\beta, b_x\alpha + b_y\beta) \\
 &= (a, b) + \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
 w(z_0 + \gamma) - w_0 &= \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Exercício 2.

Qual é a imagem pela função $z \mapsto z^2$ da figura abaixo?
Note que o tamanho dos retangulinhos vai depender dos valores de α e β que você escolheu...

