Cálculo 3 - 2021.1

Aula 14: Notação de físicos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Na página 170–172 do cap.5 o Bortolossi fala de algumas convenções sobre variáveis que ele vai usar o mínimo possível, porque elas às vezes são difíceis de interpretar e às vezes são ambíguas...

Isso é um assunto bem maior e mais complicado do que parece. Quando eu fiz graduação em algumas matérias essas convenções – que eu vou chamar de "notação de físicos" – eram totalmente proibidas, mas em outras elas eram tratadas como algo óbvio que todo mundo sabia usar.

A gente vai aprender alguns dos princípios por trás da "notação de físicos" e vamos como usar essa "notação de físicos" como uma abreviação pra uma notação muito menos ambígua que matemáticos "estritos" aceitam.

Links (pra matemáticos que estiverem lendo isso aqui)
Eu aprendi "notação de físicos" estudando EDPs pelo livro do Fritz John e estudando Cálculo de Variações:
`https://www.springer.com/gp/book/9781461599661` Fritz John
`http://www-users.math.umn.edu/~olver/ln_/cv.pdf` Olver
e um pouco pelos livros do Física do Moysés Nussenzveig.

O "The Language of Mathematics" do Mohan Ganesalingam em coisas muito boas sobre variáveis. Amazon, MAA Reviews.

Andrej Bauer: "The dawn of formalized mathematics".
A partir do slide 15.

Mais links (pra matemáticos)

https://en.wikipedia.org/wiki/Physical_quantity
https://en.wikipedia.org/wiki/Dependent_and_independent_variables
https://en.wikipedia.org/wiki/Variable_(mathematics)
https://en.wikipedia.org/wiki/Variable_(computer_science)

Redish/Gupta: "Making Meaning with Math in Physics: A Semantic Analysis"

Ellermeijer/Heck: "Differences between the use of mathematical entities in mathematics and physics and the consequences for an integrated learning environment." Page 6.

Silvanus P. Thompson: Calculus Made Easy (1910)
Vou usar bastante o livro do Silvanus P. Thompson...
Ele está em inglês, mas descobri uma versão em LaTeX dele feita a partir de uma versão em domínio público — esta aqui:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf

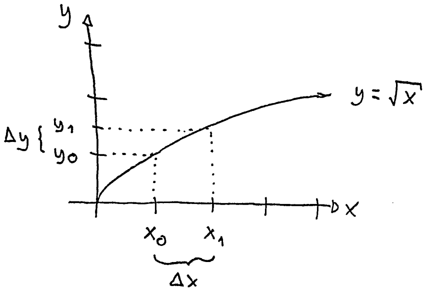
que eu consigo modificar. Vou tentar traduzir algumas páginas dessa versão pra português.

Links pra uma versão em HTML do livro
e pra comentários sobre ela:

https://calculusmadeeasy.org/
https://avidemia.com/calculus-made-easy/
https://news.ycombinator.com/item?id=27991120
https://news.ycombinator.com/from?site=calculusmadeeasy.org

Obs: o Silvanus não distingue dx de Δx.

Um primeiro exemplo
Digamos que $y = \sqrt{x}$.
Podemos considerar que x e y "variam juntos",
"obedecendo certas restrições". O conjunto dos pontos (x, y)
que obedecem essas restrições é $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}\,\}$,
e o gráfico é:



Um primeiro exemplo (2)

Em geral vamos considerar que x_0 é "mais fixo" do que x_1. Quando dizemos "diminua Δx; ele era 1 e passa a ser 0.5" o x_0 não muda e o x_1 sim — e temos $y_0 = \sqrt{x_0}$, $y_1 = \sqrt{x_1}$, $\Delta y = y_1 - y_0$.

O Silvanus Thompson usa os termos "independent variable" e "dependent variable". Neste exemplo nós vamos considerar que x_0 e x_1 são as variáveis independentes, e que a partir dos valores delas dá pra calcular os valores das variáveis dependentes, que são Δx, y_0, y_1, e Δy.

Também daria pra considerar que as variáveis independentes são x_0 e Δx... aí x_1 passaria a ser uma das variáveis dependentes.

O truque de omitir nomes de funções

O "normal" seria a gente dizer que $y = f(x) = \sqrt{x}$, mas os "físicos" às vezes dizem só:

$$y = y(x) = \sqrt{x}$$

e aí em contextos em que a letra y é usada como um nome de função ela é interpretada como f... Aí a gente vai ter coisas como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Veja as contas do próximo slide.

O truque de omitir nomes de funções (2)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= f'(x_0)
\end{aligned}
$$

Exercício 1

Assista este vídeo do 6:13 até o 12:56:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=fMNgr5wDMek

Ele explica como a regra da cadeia vira algo super curto na "notação de físicos".

a) Calcule z_{xx} usando a "notação de físicos".
b) Traduza as suas contas pra notação convencional.

No item a você encontrou uma fórmula geral.
Agora vamos aplicá-las em casos específicos pra testá-la.

c) Especialize as suas contas do item a pro caso $z(y) = \operatorname{sen} y$, $y(x) = e^{4x}$.
d) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(e^{4x})$ pelo método convencional.

Derivadas parciais e derivadas totais
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.

Vamos começar com um caso bem concreto — um que eu usei em EDOs com variáveis separáveis em C2... link:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf

O nosso caso bem concreto vai ser:
$z = z(x, y) = x^2 + y^2$,
$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
quando nós só consideramos o $z = z(x, y) = x^2 + y^2$
as derivadas parciais de z são $z_x = 2x$ e $z_y = 2y$,
mas quando também consideramos o $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$
aí temos $z = z(x, y(x)) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = 1$, e $\frac{dz}{dx} = 0$.

Esta derivada $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} z(x, y(x))$ é chamada de derivada total de z com relação a y.

Exercício 2.
Digamos que $z = z(x, y) = (x + 2)(y + 3)$
e que $y = y(x) = \operatorname{sen} x$.
a) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
b) Calcule $\frac{dz}{dx}$.
c) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Convenção: quando uma expressão como z_x puder ser interpretada tanto como uma derivada parcial quanto como uma derivada total o default é interpretá-la como derivada parcial.

Exercício 3.

Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.
(Isto é uma versão mais geral do exercício 2).

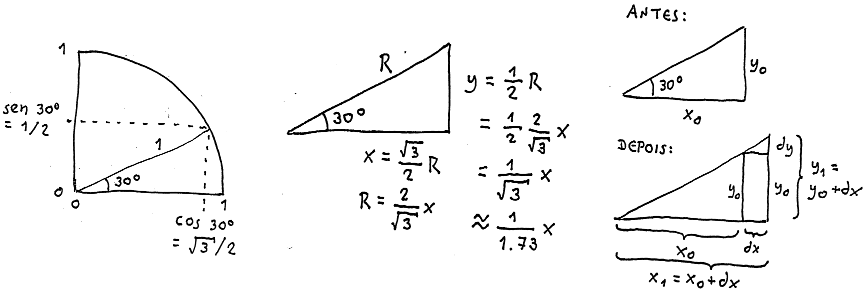
a) Calcule $\frac{d}{dx}z$.

b) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Silvanus Thompson: o exemplo do triângulo (p.10)

Links:

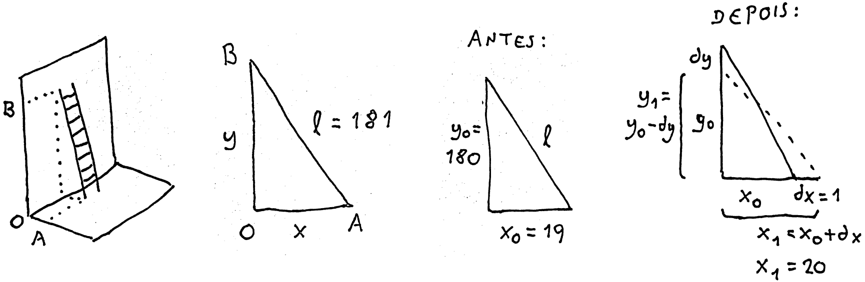
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=21
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-tr.mp4



Silvanus Thompson: o exemplo da escada (p.11)

Links:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=22
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-esc.mp4



Silvanus Thompson: o exemplo da escada: contas

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \ell$$

$$x_0^2 + y_0^2 = \ell^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = \ell^2$$

$$(x_0 + dx)^2 + (y_0 - dy)^2 = \ell^2$$

$$(y_0 - dy)^2 = \ell^2 - x_1^2$$

$$\begin{aligned}
y_0 - dy &= \sqrt{\ell^2 - x_1^2} \\
&= \sqrt{181^2 - 20^2} \\
&= \sqrt{32761 - 400} \\
&= \sqrt{32361} \\
&\approx 179.89
\end{aligned}$$

$$180 - dy = 179.89$$

$$180 - 179.89 = dy$$

$$dy = 0.11$$

$$dx = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.11}{1} = 0.11$$

Tudo que vem depois daqui vai ser reescrito.

Um segundo exemplo

Digamos que o conjunto dos pontos (x, y)
"que obedecem as restrições" é esse aqui:

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5 \}$$

e que $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

Os físicos consideram que "é óbvio" que (em geral!) variáveis "variam continuamente", então se $x_1 = x_0 + \Delta x$ e $y_1 = y_0 + \Delta y$ e Δx é muito pequeno então Δy é muito pequeno também. (Veja o vídeo!...)

O contexto importa muito

Exercício 1 (versão preliminar)

Digamos que: