Cálculo 3 - 2021.1

Aula ??: revisão de planos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Antes de voltar pra superfícies vamos rever algumas coisas sobre planos que às vezes eram vistas em GA...

O material de hoje é uma adaptação disto aqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=45`
`http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=46`

Retas parametrizadas em $\mathbb{R}^3$

Sejam:

$r_1 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_2 = \{\, (2,2,1) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_3 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (0,2,1) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (1,2,1) + t\overrightarrow{(2,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$

Quais destas retas se interceptam? Em que pontos? Em que 't's?
Quais destas retas são paralelas? Quais destas retas são coincidentes?
A terminologia para retas que não se interceptam e não são paralelas é estranha – "retas *reversas*".

As retas acima são *parametrizadas*.
O que é uma *equação de reta* em $\mathbb{R}^3$?
$\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 5y = 6 \,\}$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$;
$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y + 6z = 7 \,\}$ é um *plano* em $\mathbb{R}^3$...

Exercício: encontre
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\,\}$,
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=2\,\}$,
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=1\,\}$,
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=3\,\}$,
três pontos não colineares de $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1\,\}$,
e visualize cada um destes planos.

Alguns dos nossos planos preferidos:
$\pi_{xy}=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\,\}$ (x e y variam, $z=0$)
$\pi_{xz}=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\,\}$ (x e z variam, $y=0$)
$\pi_{yz}=\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\,\}$ (y e z variam, $x=0$)

Uma notação para planos

Notação (temporária):
$[\text{equação}] = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{equação} \,\}$
Obs: $\pi_{xy} = [z=0]$, $\pi_{xz} = [y=0]$, $\pi_{yz} = [x=0]$.

Exercício: visualize:
$\pi_1 = [x=1]$, $\pi_8 = [y=x]$,
$\pi_2 = [y=1]$, $\pi_9 = [y=2x]$,
$\pi_3 = [z=1]$, $\pi_{10} = [z=x]$,
$\pi_4 = [z=4]$, $\pi_{11} = [z=x+1]$,
$\pi_5 = [z=2]$,
Quais deles planos são paralelos?
Quais deles planos se cortam? Onde?

Escolha dois planos destes que se cortam.
Você consegue dizer dois pontos da interseção deles?
Você consegue parametrizar a reta que é a interseção deles?

Faça isto para vários pares de planos que se cortam.

Planos parametrizados

Dá pra parametrizar planos em $\mathbb{R}^3$...

Sejam

$$\pi_6 = \{\, \underbrace{(2,2,0) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a,b \in \mathbb{R} \,\},$$

$$\pi_7 = \{\, \underbrace{(3,2,1) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a,b \in \mathbb{R} \,\}.$$

Calcule e visualize:

$(0,0)_{\Sigma_6}$, $(1,0)_{\Sigma_6}$, $(0,1)_{\Sigma_6}$, $(1,1)_{\Sigma_6}$,
$(0,0)_{\Sigma_7}$, $(1,0)_{\Sigma_7}$, $(0,1)_{\Sigma_7}$, $(1,1)_{\Sigma_7}$,

e resolva:

$(a,b)_{\Sigma_6} = (0,3,0)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,1)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,0)$.

Nossos três modos preferidos de descrever planos em $\mathbb{R}^3$ (por equações) são:
$[z = ax + by + c]$ ("z em função de x e y"),
$[y = ax + bz + c]$ ("y em função de x e z"),
$[x = ay + bz + c]$ ("x em função de y e z").