Cálculo 3 - 2021.1

Aula 5: Séries de Taylor e MacLaurin

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Mini-revisão de séries de Taylor

Nos meus cursos de Cálculo 2 eu costumo fazer uma introdução rápida a Séries de Taylor pra convencer as pessoas de que a fórmula abaixo é verdade... (mas no semestre passado não deu tempo)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad (*)$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a Série de Taylor de f no ponto 0 é:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (**)$$

onde $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

Mini-revisão de séries de Taylor (2)

Sejam derivs e derivs_0 as seguintes operações:

$\mathsf{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', \ldots)$

$\mathsf{derivs}_0(f) = (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots)$

Repare que $\mathsf{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de funções e $\mathsf{derivs}_0(f)$ retorna uma sequência infinita de números.

Um exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & ax^2 + bx + c, \\
f'(x) & = & 2ax + b, \\
f''(x) & = & 2a, \\
f'''(x) & = & 0,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & c, \\
f'(0) & = & b, \\
f''(0) & = & 2a, \\
f'''(0) & = & 0,
\end{array}$$

$\mathsf{derivs}(f) = (ax^2 + bx + c,\ 2ax + b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots)$

$\mathsf{derivs}_0(f) = (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots)$

Mini-revisão de séries de Taylor (3)
...e neste caso os termos do somatório são todos zero
a partir de $k = 3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f(0)'}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \\ &= c + bx + ax^2 + 0 + \ldots \end{aligned}$$

E neste caso a igualdade da fórmula $(**)$ é verdade.

Mini-revisão de séries de Taylor (4)

Exercício 1 (pra você se convencer de que a fórmula $(**)$ vale sempre que a função f for um polinômio).

Seja $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}(f)$.

b) Calcule $\mathsf{derivs}_0(f)$.

c) Expanda o somatório $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ e verifique que neste caso a igualdade $(**)$ é verdade (como no slide anterior).

Exercício 2.

Para cada uma das 'f's abaixo calcule $\mathsf{derivs}(f)$ e $\mathsf{derivs}_0(f)$.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \cos x$

d) $f(x) = \cos 2x$

Mini-revisão de séries de Taylor (5)

No caso geral – em que a f não é polinomial – a expansão do somatório na fórmula (∗∗) dá uma soma com infinitos termos não-zero... e isto às vezes é formalizado desta forma:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)$$

À medida que o N cresce a expressão $\sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ – a série de Taylor de f em $x = 0$ truncada até grau N – vira um polinômio com mais termos, e cada polinômio novo com mais termos que o anterior é uma aproximação melhor para a função f.

A série de Taylor truncada até grau N às vezes vai ser chamada de aproximação de grau N ou de polinômio de Taylor de grau N.

Mini-revisão de séries de Taylor (6)

Os detalhes são bem complicados – você vai ver todas as contas horríveis que demonstram as estimativas de erro numa matéria do Fábio – mas deve dar pra entender a idéia geral a partir dos desenhos e animações das páginas da Wikipedia.

Dê uma olhada em:

https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Taylor

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series#Approximation_error_and_convergence

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s_theorem

principalmente nas figuras que comparam aproximações de grau 1, 2, 3, etc. As páginas da Wikipedia em português têm menos figuras que as em inglês, então eu pus os links pras páginas em inglês também.

Exercício 3.

Escreva como polinômios:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ para $f(x) = e^x$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ para $f(x) = \cos x$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ para $f(x) = \cos 2x$

Exercício 4.

Em cada um dos itens abaixo encontre os polinômios
$g_0(x) = \sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$,
$g_1(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$,
$g_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$,
e represente graficamente as funções $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ num gráfico só. Use os truques da aula passada!

a) $f(x) = e^x$
b) $f(x) = \cos x$
c) $f(x) = \cos 2x$

A série de Taylor no ponto a

Compare as duas igualdades abaixo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ f(x-a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \end{aligned}$$

A segunda é mais geral que a primeira: se fizermos a substituição $a := 0$ na segunda obtemos a primeira. A segunda é a série de Taylor "geral" — lembre que no slide 2 eu só defini a "série de Taylor no ponto 0"... A primeira é chamada de "série de Maclaurin". Eu às vezes confundo os dois nomes e acho que acabei gravando o vídeo com os nomes trocados. =(

Ponto base

As contas com a série de Taylor “no ponto a” parecem difíceis principalmente porque a maioria das pessoas está tão acostumada a fazer expansões como estas

$$\begin{array}{rcl} 10(x-a) & = & 10x - 10a \\ (x-a)^2 & = & x^2 - 2ax + a^2 \end{array}$$

que elas fazem elas no automático — e essas expansões vão deixar as contas **MUITO** piores. A gente vai ter que se acostumar a não fazer isso... quando o nosso “ponto base” for o ponto a a gente vai ter que tratar $(x-a)$ como algo mais “simples” que x, e em algumas situações quando aparecer um x sozinho vai ser até melhor trocá-lo por $(x-a)+a$.

Polinômios em $(x - a)$

Um polinômio de grau N em x é uma soma da forma:

$$\sum_{k=0}^{N} b_k x^k$$

e um polinômio de grau N em $(x - a)$ é uma soma da forma:

$$\sum_{k=0}^{N} c_k (x - a)^k$$

onde os 'b_k's e 'c_k's são expressões que não dependem de x.

Exercício 5.
a) Converta $(x+10)^2+3x+4$ para um polinômio em x.
b) Converta x^2 para um polinômio em $(x-10)$.
c) Converta $(x+10)^2+3x+4$ para um polinômio em $(x-10)$.

Dica 1: quem são $N, b_0, \ldots, b_N, c_0, \ldots, c_N$?
Dica 2: você pode terminar cada resposta sua com um passo como este aqui:

$$42(x-5)^3+200(x-5)^2+99(x-5)^0 \quad = \quad \sum_{k=0}^{3} c_k(x-5)^k$$

se $N=3$, $c_3=42$, $c_2=200$, $c_1=0$, $c_0=99$.

Desenhos Desanimados

Quando eu era criança todos os meus amigos
adoravam Speed Racer:
http://www.youtube.com/watch?v=suCm1w_KTiY
eu detestava — eu achava que a animação era péssima.

Anos depois um amigo meu inventou um termo genial
pra esse tipo de desenho com poucos frames por segundo:
desenhos desanimados.

Nos próximos exercícios nós vamos fazer desenhos ainda
mais desanimados que os episódios do Speed Racer
pra entender como é que as retas tangentes e as
melhores aproximações por parábolas variam.

Exercício 6

Seja $P(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma trajetória.
(Vamos usar trajetórias diferentes em itens diferentes).
Seja:

$$Q(\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta t)^k}{k!} P^{(k)}(t_0)$$

Vamos usar 't_0's e 'n's diferentes em itens diferentes.

Assista este vídeo:

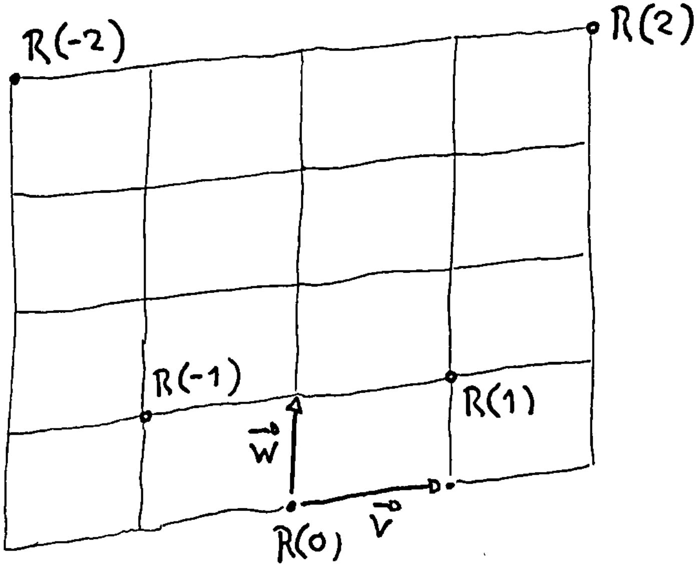
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-taylor.mp4
Ele explica um truque pra desenhar parábolas que vai ser útil nos itens em que n for 2.

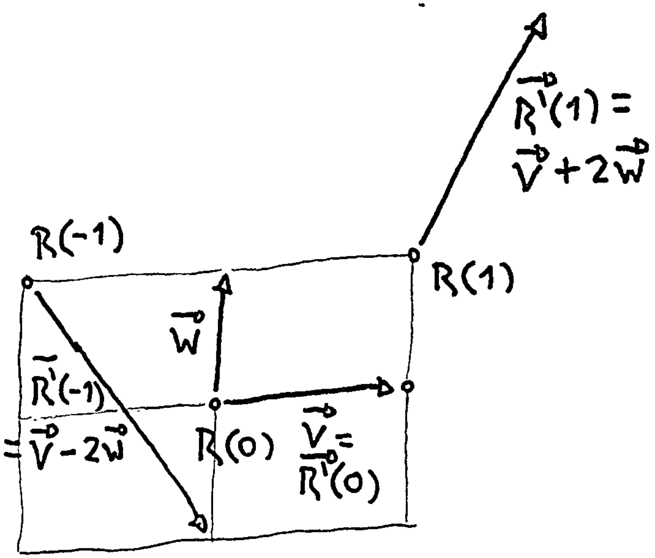
Dica importante: dá pra fazer os desenhos do exercício 6 sem contas se vocês souberem $P(t_0)$, $P'(t_0)$, $P''(t_0)$...

Dois jeitos de desenhar parábolas

Assista o vídeo:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-taylor-pa.mp4

SE $R(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$
ENTÃO TEMOS DOIS JEITOS
RÁPIDOS PRA DESENHAR
UMA APROXIMAÇÃO PRA
TRAJETÓRIA DE $R(t)$ -
QUE É UMA PARÁBOLA
PARAMETRIZADA...


R(-2)
R(2)
R(-1)
R(1)
$\vec{w}$
R(0)
$\vec{v}$



$\vec{R}'(1) =$
$\vec{v} + 2\vec{w}$
$R(-1)$
$R(1)$
$\vec{w}$
$\vec{R}'(-1)$
$= \vec{v} - 2\vec{w}$
$R(0)$
$\vec{v} =$
$\vec{R}'(0)$

Exercício 6 (cont.)

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 1$.
a) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
b) Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
c) Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 0$.
a') Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
b') Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
c') Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 2$.
a") Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
b") Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
c") Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Exercício 6 (cont.)

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, t)$ e $n = 1$.
d) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
e) Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
f) Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, t)$ e $n = 0$.
d') Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
e') Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
f') Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos t, t)$ e $n = 2$.
d") Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
e") Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
f") Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Exercício 6 (cont.)

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 1$.
g) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
h) Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
i) Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 0$.
g') Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
h') Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
i') Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$ e $n = 2$.
g") Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
h") Seja $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
i") Seja $t_0 = \pi$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Exercício 6 (cont.)

Nos próximos itens considere que $P(t) = (0,3) + t\overrightarrow{(2,1)}$ e $n = 2$.
j) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
k) Seja $t_0 = 1$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
i) Seja $t_0 = 2$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.

Nos próximos itens considere que $P(t) = (t, t^2)$ e $n = 2$.
m) Seja $t_0 = 0$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
n) Seja $t_0 = 1$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.
o) Seja $t_0 = 2$. Desenhe $\{\, Q(\Delta t) \mid \Delta t \in \mathbb{R} \,\}$.