Cálculo 3 - 2021.1

Aula 2: Vetores tangentes em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Introdução

Leia as páginas 187 a 199 do capítulo 6 do Bortolossi.

Nesta aula nós vamos representar curvas parametrizadas pelo traço delas (p.188) com algumas anotações extras – como ‘$t = 0$’, ‘$t = 1$’, ‘$f(\pi)$’ – sobre pontos delas... além disso também vamos desenhar vetores (vetores tangentes!) apoiados em alguns pontos, fazer anotações neles também, e vamos usar tudo isso pra tentar adivinhar (ééééé!) o comportamento de uma curva esquisita.

Exercício 1
Sejam $P(t) = (4,0) + t\overrightarrow{(0,1)}$ e $Q(u) = (0,3) + u\overrightarrow{(2,0)}$.
Represente num gráfico só o traço de $P(t)$ e o de $Q(u)$.
Marque o ponto $P(0)$ e escreva '$t = 0$' do lado dele.
Faça o mesmo para os pontos $P(1)$ ('$t = 1$') e $Q(0)$ e $Q(1)$ ('$u = 0$' e '$u = 1$').

Seja r o traço de $P(t)$ e s o traço de $Q(u)$.
Seja X o ponto de interseção de r e s.
Quais são as coordenadas de X?

Cada ponto de r está "associado" a um valor de t e cada ponto de s a um valor de u. Quais são os valores de t e u associados ao ponto X? Chame-os de t_0 e u_0 e indique-os no seu gráfico – por exemplo, se $t_0 = 99$ e $u_0 = 200$ você vai escrever '$t = 99$' e '$u = 200$' do lado do ponto X.

Exercício 1 (continuação)

Faça o desenho sozinho – talvez você gaste alguns minutos pra decifrar todas as instruções – e depois compare o seu desenho com o dos seus colegas.

Exercício 2
Seja $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.
Represente num gráfico só:
1) o traço de $P(t)$,
2) $P(\frac{\pi}{2}) + P'(\frac{\pi}{2})$, escrevendo '$P(\frac{\pi}{2})$' ao lado do ponto
e '$P'(\frac{\pi}{2})$' ao lado da seta,
3) Idem para estes outros valores de t: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi$.

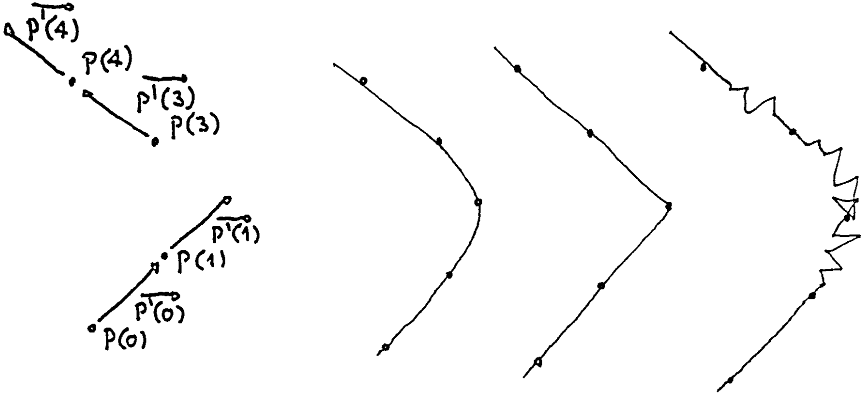
4) Seja $Q(u) = P(\pi) + uP'(\pi)$. Desenhe o traço de $Q(u)$ e anote '$Q(0)$' e '$Q(1)$' nos pontos adequados.

5) O traço de $Q(u)$ é uma reta tangente ao traço de $P(t)$ no ponto $P(\pi)$? Encontre no livro ou no resto da internet uma definição formal de reta tangente e descubra se isto é verdade ou não.

Sobre "adivinhar trajetórias"

Nos próximos dois exercícios nós vamos *começar* a fazer uma coisa que vai ser muito comum aqui nesse curso de Cálculo 3, e que geralmente é inadmissível nos cursos de Cálculo 1: nós vamos tentar "advinhar" como certas trajetórias são a partir de umas poucas informações sobre elas.

Esse "adivinhar" na verdade é "fazer hipóteses razoáveis", e às vezes a gente precisa de mais informações pra descobrir qual hipótese é mais razoável. Na figura do próximo slide eu desenhei à esquerda $P(t)+P'(t)$ para a trajetória de um personagem de videogame em $t=0,1,3,4$, mas existem muitas trajetórias que se passam por esses pontos com essas velocidades. Na primeira figura à direita eu desenhei uma trajetória de uma nave no espaço; na segunda eu desenhei a trajetória de um personagem de um videogame do meu tempo — naquela época nada nos videogames obedecia as leis da Física, e nos meus jogos preferidos o meu personagem era um quadradinho — e na terceira o personagem é atingido por um raio em $t = 1.05$ e ele adquire superpoderes.



Exercício 3

Seja $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$.

Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.

Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.

Você pode pensar que $P(t)$ é a posição do Super Mario Kart no instante t e $P'(t)$ é o *vetor velocidade* dele no instante t (lembre que um vetor tem "direção", "orientação" e "módulo"!)... você só sabe a posição e a velocidade dele em alguns instantes, isto é, em alguns valores de t, e você vai ter que encontrar uma aproximação razoável, olhométrica, pra pista onde ele está correndo.

Exercício 4

Seja $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$.

Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para os seguintes valores de t: $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{2}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \ldots, 2\pi$.

Faça as anotações adequadas nos seu pontos e vetores pra lembrar qual é o t associado a cada um.

Tente usar as informações deste gráfico pra desenhar o traço de $P(t)$. Isto não é nada óbvio – se inspire nas figuras das páginas 208 e 209 do capítulo 6 do Bortolossi e tente conseguir uma hipótese razoável.