Cálculo 2 - 2021.2

Segunda prova (P2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Regras e dicas

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes, exceto que a prova será disponibilizada às 22:00 da quinta, 3/fev/2022, e você deverá entregá-la até as 22:00 do sábado, 5/fev/2022.

Importante

Os símbolos "[MVG]", "[RP2]" e "[EVS]"
nas questões são referências a estes PDFs:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-mud-var-gamb.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-revisao-pra-P2.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-edovs.pdf

Nas questões 1 e 2 desta prova você **VAI TER QUE** usar a notação das caixinhas de truques do [MVG].

Questão 1.
(Total: 3.0 pts)
Obs: esta questão é muito parecida
com o exercício 3 do [RP2].

a) **(2.0 pts)** Use a substituição $c = \cos\theta$ pra integrar

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^3 (\cos\theta)^3 \, d\theta.$$

b) **(1.0 pts)** Confira a sua resposta derivando-a.

Introdução à questão 2

Os livros costumam ensinar Substituição Trigonométrica exatamente do jeito que o Daniel Miranda faz na seção 8.4 do livro dele — que é um jeito que só funciona pra pessoas com muito mais memória que eu. Pra mim o jeito que usa a caixinha de truques que está explicada aqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-contas-em-C2.pdf#page=8`

é bem mais fácil...

Você **VAI TER QUE** usá-lo na questão 2.

Introdução à questão 2 (cont.)

Dá pra resolver a questão 2 usando mudanças de variáveis bem simples. O objetivo da questão 2 é treinar você pra resolver integrais que só podem ser resolvidas por substituição trigonométrica, então se você resolver a 2 por outros métodos você vai estar treinando outras coisas e contornando o objetivo da questão. Releia o "VAI TER QUE" que eu pus em negrito no slide anterior!

Em alguns outros lugares da prova eu também pedi que a resolução seja feita por um determinando método ou posta num determinado formato. Recomendo que você leve esses pedidos muito a sério.

Questão 2.
(Total: 3.0 pts)

a) **(2.0 pts)** Use o método do slide anterior pra integrar

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds.$$

b) **(1.0 pts)** Confira a sua resposta derivando-a.

Introdução à questão 3

Na parte do curso sobre EDOs com variáveis separáveis nos vimos um método para resolvê-las...

Nós vimos porque o método funciona — a "demonstração" dele tem umas gambiarras bem difíceis de formalizar — e vimos que podemos aplicar o método mesmo sem entender ele direito, só usando o '[:=]'...

Pra "aplicar o método" nós primeiro usamos o '[:=]' pra obter várias "soluções gerais", e depois pra procurar a solução que passa por um certo ponto (x, y) dado nós precisamos escolher a "solução geral" certa, ajustar umas constantes nela, e depois precisamos testar essa solução.

Introdução à questão 3 (cont.)

Nos slides 19 e 20 do [EVS] eu falei sobre de três tipos de soluções gerais: um com '$\pm\sqrt{\ldots}$' , um com '$+\sqrt{\ldots}$', e um com '$-\sqrt{\ldots}$'.

Às vezes os enunciados vão dizer qual tipo você vai ter que usar e às vezes você vai ter que descobrir o tipo certo.

Uma dica pra questão 3

No slide 21 do [EVS] eu defini as fórmulas [EDOVSG1] e [EDOVSG2]. A [EDOVSG1] é bem grande, e eu recomendo **MUITO** que antes de fazer a questão 3 você copie ela numa folha de papel e recorte-a — como você fez com a [S2I] no início do curso, aqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=10`

Questão 3.
(Total: 5.0 pts)
Seja $(*)$ esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y} \qquad (*)$$

a) **(1.0 pts)** Encontre uma substituição para a [EDOVSG2] que dá a solução geral da EDO $(*)$ com '$\pm\sqrt{\ldots}$' e chame o resultado desta substituição de [Daigoro]. A sua resposta deve ser algo desta forma:

$$[\text{Daigoro}] \quad = \quad [\text{EDOVSG2}] \begin{bmatrix} f(x) = ? \\ g(y) = ? \\ F(x) = ? \\ G(y) = ? \\ G^{-1}(y) = ? \end{bmatrix} \quad = \quad (?)$$

Questão 3 (cont.)

b) **(1.0 pts)** Encontre uma substituição para a [EDOVSG2] que dá a solução da EDO $(*)$ que passa pelo ponto $(x, y) = (2, 3)$. Aqui você vai ter que usar '$+\sqrt{\ldots}$' ou '$-\sqrt{\ldots}$', e a sua resposta deve ser algo desta forma:

$$[\text{Itto}] \quad = \quad [\text{EDOVSG2}] \begin{bmatrix} f(x)=? \\ g(y)=? \\ F(x)=? \\ G(y)=? \\ G^{-1}(y)=? \\ C_3=? \end{bmatrix} \quad = \quad (?)$$

c) **(1.0 pts)** Verifique a sua solução obedece $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$.
d) **(1.0 pts)** Verifique a sua solução passa pelo ponto $(2, 3)$.

Questão 3 (cont.)

e) **(1.0 pts)** Mostre qual é o resultado de aplicar a substituição que você obteve no item (b) na [EDOVSG1]. O resultado deve ser algo desta forma:

$$[\text{Ogami}] \quad = \quad [\text{EDOVSG1}]\begin{bmatrix} f(x)=? \\ g(y)=? \\ F(x)=? \\ G(y)=? \\ G^{-1}(y)=? \\ C_3=? \end{bmatrix} \quad = \quad (?)$$

Questão 1: gabarito

a)
$$\begin{array}{l}
\int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^3\,d\theta \\
= \int (\operatorname{sen}\theta)^2(\cos\theta)^3(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
= \int (1-c^2)(c)^3(-1)\,dc \\
= \int (c^2-1)(c)^3\,dc \\
= \int c^5 - c^3\,dc \\
= \frac{c^6}{6} - \frac{c^4}{4} \\
= \frac{(\cos\theta)^6}{6} - \frac{(\cos\theta)^4}{4}
\end{array}
\qquad
\left[\begin{array}{c}
c = \operatorname{sen}\theta \\
\frac{dc}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta \\
dc = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(-1)dc = \operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 \\
(\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 - (\cos\theta)^2 \\
(\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 - c^2
\end{array}\right]$$

b)
$$\begin{array}{l}
\frac{d}{d\theta}\left(\frac{(\cos\theta)^6}{6} - \frac{(\cos\theta)^4}{4}\right) \\
= 6\frac{(\cos\theta)^5}{6}(\cos'\theta) - 4\frac{(\cos\theta)^3}{4}(\cos'\theta) \\
= ((\cos\theta)^5 - (\cos\theta)^3)(-\operatorname{sen}\theta) \\
= (\cos\theta)^3((\cos\theta)^2 - 1)(-\operatorname{sen}\theta) \\
= (\cos\theta)^3(-1)(\operatorname{sen}\theta)^2(-\operatorname{sen}\theta) \\
= (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^3
\end{array}$$

Questão 2: gabarito

a)

$$\begin{aligned}
&\int s\sqrt{1-s^2}\,ds \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)(\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&= \int c^2\cdot(-1)\,dc \\
&= -\frac{c^3}{3} \\
&= -\frac{(\cos\theta)^3}{3} \\
&= -\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}
s=\operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta=\cos\theta \\
ds=\cos\theta\,d\theta \\
1-s^2=\cos^2\theta \\
\sqrt{1-s^2}=\cos\theta \\
\theta=\operatorname{arcsen}s
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}
c=\operatorname{sen}\theta \\
\frac{dc}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\cos\theta=-\operatorname{sen}\theta \\
dc=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(-1)dc=\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\theta)^2=1 \\
(\operatorname{sen}\theta)^2=1-(\cos\theta)^2 \\
(\operatorname{sen}\theta)^2=1-c^2
\end{array}\right]$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{3}(1-s^2)^{3/2}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\frac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}\cdot\frac{d}{ds}(1-s^2) \\
&= -\frac{1}{3}\frac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}\cdot(-2s) \\
&= s\sqrt{1-s^2}
\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$
\begin{aligned}
[\text{EDOVSG2}] &= \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{f(x)}{g(y)} \\ y &=& G^{-1}(F(x)+C_3) \end{array}\right) \\
[\text{Daigoro}] = [\text{EDOVSG2}]\left[\begin{smallmatrix} f(x)=-4x \\ g(y)=y \\ F(x)=-2x^2 \\ G(y)=y^2/2 \\ G^{-1}(y)=\sqrt{2y} \end{smallmatrix}\right] &= \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{-4x}{y} \\ y &=& +\sqrt{2(-2x^2+C_3)} \end{array}\right) \\
[\text{Itto}] = [\text{EDOVSG2}]\left[\begin{smallmatrix} f(x)=-4x \\ g(y)=y \\ F(x)=-2x^2 \\ G(y)=y^2/2 \\ G^{-1}(y)=\sqrt{2y} \\ C_3=25/2 \end{smallmatrix}\right] &= \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{-4x}{y} \\ y &=& +\sqrt{2(-2x^2+25/2)} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$y = \sqrt{2(-2x^2 + C_3)}$
$3 = \sqrt{2(-2(2)^2 + C_3)} = \sqrt{-16 + 2C_3}$
$9 = -16 + 2C_3$
$2C_3 = 25$
$C_3 = 25/2$
$y = \sqrt{2(-2x^2 + 25/2)} = \sqrt{25 - 4x^2}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(25 - 4x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(25 - 4x^2)^{-1/2} \cdot (-8x) = \frac{-4}{\sqrt{25-4x^2}}$
$\frac{-4x}{y} = \frac{-4}{\sqrt{25-4x^2}}$