Cálculo 2 - 2021.2

Aula 20: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Introdução

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.
Digamos que $c \in [a,b]$.
Digamos que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \quad = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O TFC1 tem duas versões.
A versão mais simples diz o seguinte:
se a função f é contínua então para todo $t \in (a,b)$ vale:

$$F'(t) \quad = f(t). \qquad\qquad (*)$$

A versão mais complicada do TFC1, que vamos ver depois, não supõe que a função f é contínua.

Nós vamos ver um argumento visual que mostra que a igualdade $(*)$ é verdade. Esse argumento visual é quase uma demonstração formal, num sentido que eu vou explicar depois.

Introdução (2)

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a,b]$.
Digamos que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \quad = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

Então:

$$\begin{array}{rcl}
F'(t) & = & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \\
& = & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx}{\varepsilon} \\
& = & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx}{\varepsilon} \\
& = & \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \\
& \overset{???}{=} & f(t)
\end{array}$$

Introdução (3)
Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a,b]$.
Digamos que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;\; = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O nosso argumento visual vai mostrar que:

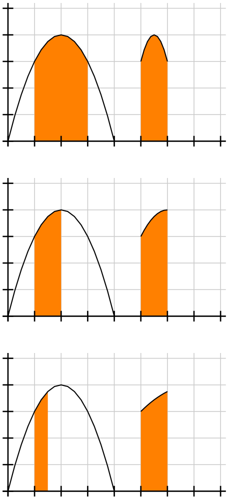
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \;\; = \;\; f(t).$$

Primeiro exemplo:
$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

Primeira figura: $\varepsilon = 2$.
Segunda figura: $\varepsilon = 1$.
Terceira figura: $\varepsilon = 1/2$.

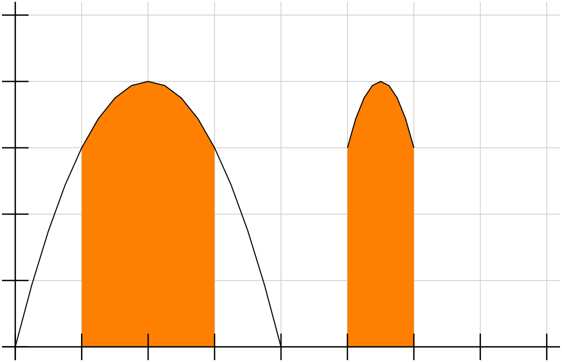
À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.

Repare que a área em laranja à esquerda sempre tem base ε e a área em laranja à direita sempre tem base $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$.



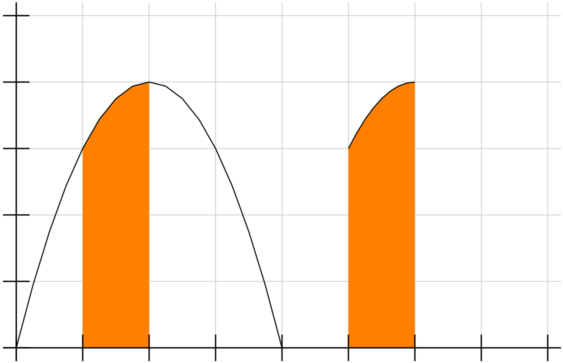
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 2:$$



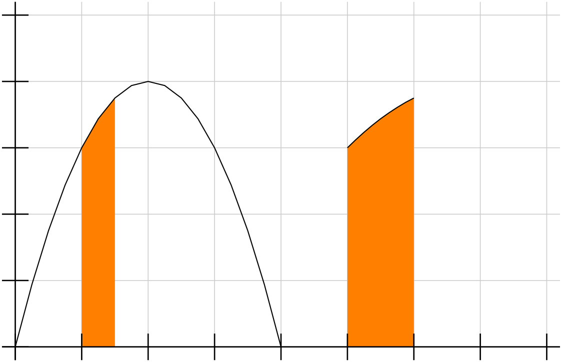
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1:$$



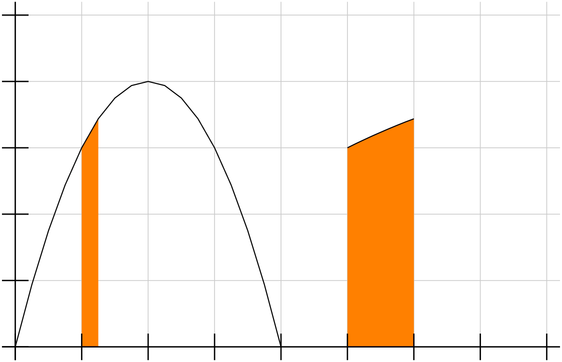
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/2\text{:}$$



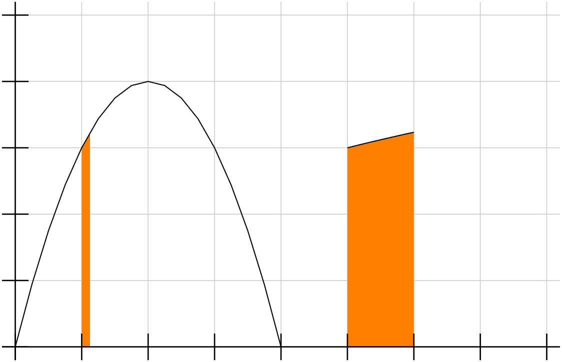
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/4\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/8\text{:}$$

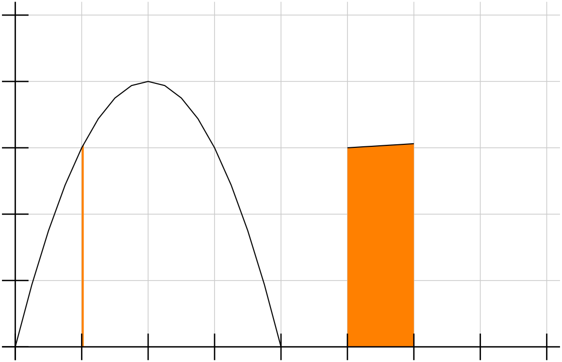


$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/16\text{:}$$

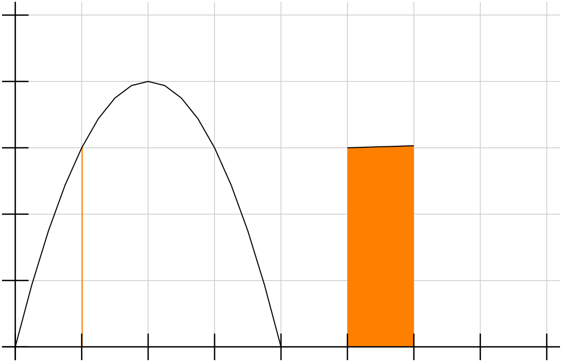
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/64\text{:}$$

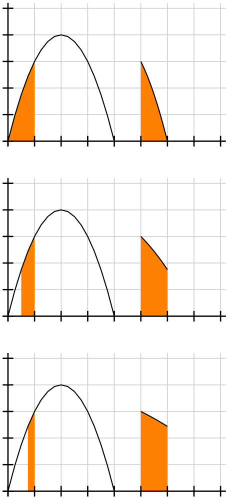


Agora com ε negativo!...

$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

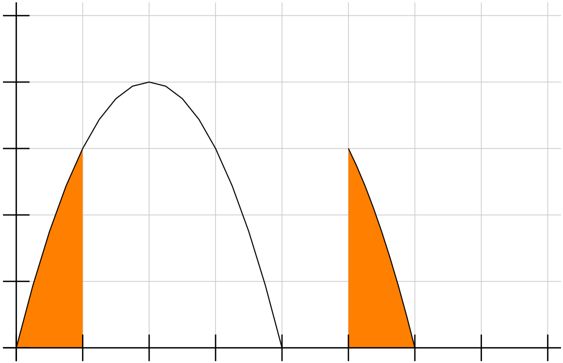
Primeira figura: $\varepsilon = -1$.
Segunda figura: $\varepsilon = -1/2$.
Terceira figura: $\varepsilon = -1/4$.

À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.



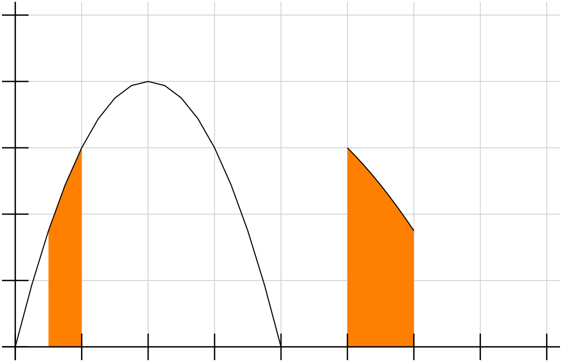
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1:$$



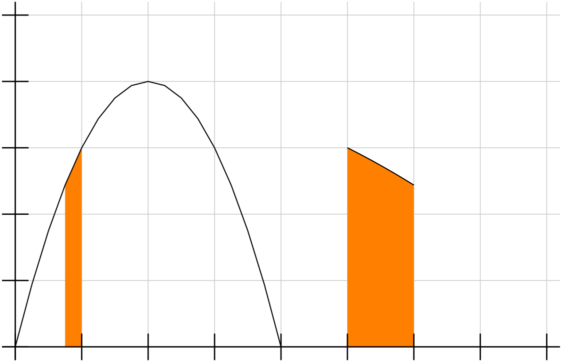
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/2:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/4:$$

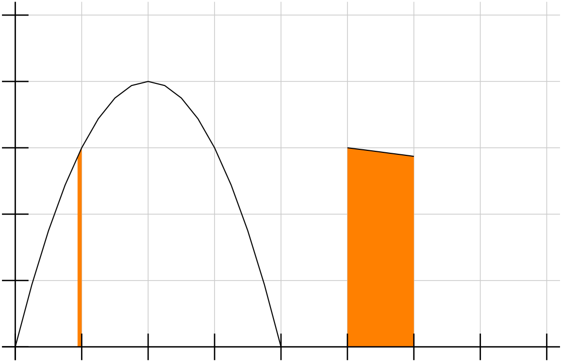


$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/8\text{:}$$

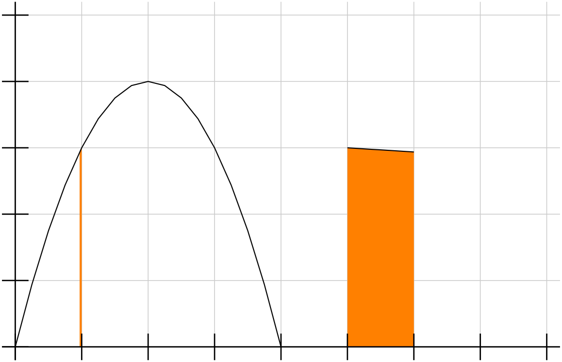
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/16\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/32:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/64\text{:}$$

Exercício 1.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

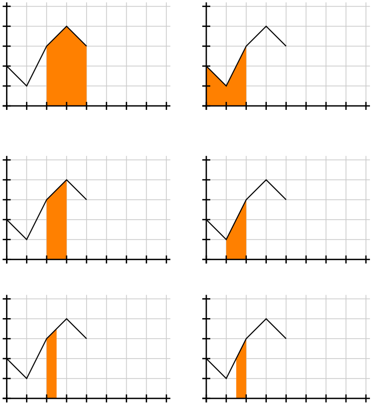
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Exercício 2.

Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

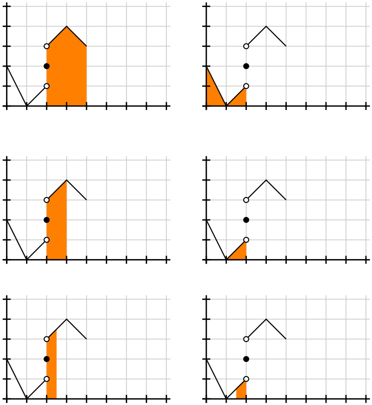
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Descontinuidades

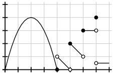
Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer.
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da f,
ou, pra abreviar, o "conjunto das descontinuidades da f", assim:

$$\mathsf{desc}(f) \quad = \quad \{\, x \in [a, b] \mid f \text{ é descontinua em } x \,\}$$

A expressão "f tem um número finito de pontos de descontinuidade",
que eu vou abreviar pra "f tem finitas descontinuidades" apesar
disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$$\mathsf{desc}(f) \;\text{ é um conjunto finito}$$

O conjunto vazio é finito, então toda f contínua "tem finitas
descontinuidades". Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui,
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=46`
tem infinitas descontinuidades.

A versão complicada do TFC1
Vou dizer que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é “boa” quando ela é integrável e tem finitas descontinuidades.

(O termo “função boa” é péssimo de propósito — é pra deixar óbvio que essa é uma definição temporária, que vai valer só durante poucos slides...)

Vou dizer que uma função $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ obedece

$$G'(x) = f(x)$$

quando G for contínua em $[a, b]$ e G obedecer isto aqui:

$$\forall x \in ((a, b) \setminus \mathsf{desc}(f)).\ G'(x) = f(x)$$

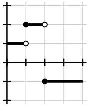
ou seja, neste caso “$G'(x) = f(x)$” é uma abreviação pra algo complicado.

A versão complicada do TFC1 (2)

Antes de prosseguir vamos fazer um exercício.

Exercício 3.

Seja:

$f(x) \quad =$ 

a) Qual é o domínio da f? (Ele está “implícito no gráfico”...)

b) Encontre uma função G que obedece $G'(x) = f(x)$ e $G(0) = 0$.

c) Encontre uma função H que obedece $H'(x) = f(x)$ e $H(0) = 1$.

d) Faça o gráfico da função $M(x) = H(x) - G(x)$.

e) Encontre uma função K que obedece $K'(x) = f(x)$ e $K(4) = -1$.

A versão complicada do TFC1 (3)

Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é "boa".
Digamos que $c\in[a,b]$ e que $G'(x)=f(x)$.
Digamos que

$$F(x) \quad = \quad \int_{t=c}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Então F e G "diferem por uma constante", como as funções G, H e K do exercício 3.
Isso é o "TFC1 na versão complicada".
Eu não vou demonstrá-lo. =(

Seja k essa constante. Temos:

$$\forall x\in[a,b].\ G(x)=F(x)+k.$$

Isso tem um monte de consequências bacanas.
Por exemplo: $F(c)=0$, $G(c)=k$, e,
se $\alpha,\beta\in[a,b]$,

$$\begin{array}{rcl}
\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt &=& \int_{t=c}^{t=\beta} f(t)\,dt - \int_{t=c}^{t=\alpha} f(t)\,dt \\
&=& F(\beta)-F(\alpha) \\
&=& (G(\beta)-k)-(G(\alpha)-k) \\
&=& G(\beta)-G(\alpha).
\end{array}$$

Isso nos dá um método pra calcular integrais da função f. Se $\alpha,\beta\in[a,b]$,

1) encontramos uma solução $G(x)$ da EDO $G'(x)=f(x)$,

2) usamos a fórmula

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta)-G(\alpha).$$

Você viu no exercício anterior que a EDO $G'(x)=f(x)$ tem infinitas soluções...
Qualquer solução serve, e não precisamos calcular a constante k.

Esse método é o TFC2.

O TFC2

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é “boa”.
Digamos que $\alpha, \beta \in [a, b]$ e que $G'(x) = f(x)$.

Então:

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha).$$

TF2: um exemplo

A nossa parábola preferida é $f(x) = 4 - (x-2)^2$,
ou seja, $f(x) = 4x - x^2$.
Digamos que $G(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.
Então $G'(x) = f(x)$, e o resultado desta
substituição aqui vai dar uma igualdade verdadeira...

$$\left(\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha) \right) \begin{bmatrix} f(x) := 4x - x^2 \\ G(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ \beta := 4 \\ \alpha := 0 \end{bmatrix}$$

TF2: um exemplo (2)

Temos:

$$\left(\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \;=\; G(\beta) - G(\alpha)\right) \begin{bmatrix} f(x) := 4-(x-2)^2 \\ G(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ \beta := 4 \\ \alpha := 0 \end{bmatrix}$$

$$= \;\left(\int_{t=0}^{t=4} 4-(t-2)^2\,dt \;=\; \left(2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \frac{0^3}{3}\right)\right)$$

e:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=4} 4-(t-2)^2\,dt &= \left(2\cdot 4^2 - \tfrac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \tfrac{0^3}{3}\right) \\ &= \left(32 - \tfrac{64}{3}\right) - 0 \\ &= \tfrac{96}{3} - \tfrac{64}{3} \\ &= \tfrac{32}{3}. \end{aligned}$$