Cálculo 2 - 2021.2

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Cálculo 2 - 2021.2

Aulas 4 e 5: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Cursos tradicionais vs. esse aqui

Num curso "tradicional" de Cálculo 2 – presencial e sem computadores – a gente ensinava basicamente *integrais* e *equações diferenciais*, que eram duas coisas que as pessoas iriam usar muito pouco nos cursos seguintes... só que pra resolver integrais e equações diferenciais as pessoas tinham que resolver contas que acabavam ficando com várias páginas, e pra não chegar em resultados errados elas tinham que aprender a escrever essas contas de jeitos muito claros, em que cada passo fosse muito fácil de revisar depois, e quando os cursos eram presenciais era fácil as pessoas trabalharem em grupo, trocarem idéias sobre o melhor jeito de organizar as contas, e revisarem as contas umas das outras – e num instante as pessoas passavam a ter intimidade suficiente umas com as outras pra poderem dizer coisas como "não entendi esse passo aqui", "me explica isso?", "isso aqui tá errado", "acho que dá pra fazer isso aqui de um jeito melhor, ó", "sua letra tá horrível aqui, dá pra escrever mais claro?", e coisas assim...

Eu estou participando de um grupo de pessoas de várias universidades que estão discutindo como adaptar seus cursos de Matemática ao contexto atual, em que o ensino é remoto e os computadores podem fazer várias das contas que antes todo mundo tinha que fazer à mão. Uma das apresentações que eu achei mais legais foi uma do Carlos Tomei, da PUC-Rio – vou colocar a link pro vídeo na próxima versão dos slides! – sobre como ele está dando o curso de Cálculo 1 atualmente. Os alunos da PUC têm acesso a um programa chamado Maple, que faz contas e gráficos de muitos tipos, e que sabe calcular todas as derivadas que aparecem em Cálculo 1. Se o que importasse no curso fosse só fazer contas os alunos que usassem Maple resolveriam qualquer prova antiga de Cálculo 1 em poucos minutos – *se eles pudessem escrever na prova só o resultado de cada conta.*

Algumas dicas de GA que valem pra C2 também

A dica 7 é INCRIVELMENTE importante. Link:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...
2) Cada "seja" ou "sejam" que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.
3) Em "matematiquês" a gente quase não usa termos como "ele", "ela", "isso", "aquilo" e "lá" — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo "esse aqui".
4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.
5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.
6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas "querem dizer" e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu "método gráfico" está certo você vai poder conferir se o "método gráfico" e o "método contas" dão aos mesmos resultados.
7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer "ok, jóia, tá certo!".

O "colega que seja menos seu amigo" vai fazer menos tentativas, e os personagens "o monitor" e "o professor" da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um "colega que seja menos seu amigo" te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, "sintaxes" – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:

http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf
https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas "linguagens formais" e "compilam" "programas" escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\int_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle\, d\langle\mathsf{var}\rangle$$

$$\langle\mathsf{expr}\rangle\Big|_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}$$

$$\forall\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\exists\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

e as notações de "set comprehensions" daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8

Sintaxe (2)

Veja se você consegue entender isto. É adaptado de:
https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

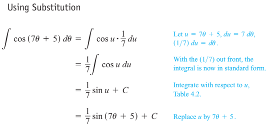
$$\begin{array}{rcl}
\langle\mathsf{Stmt}\rangle & \to & \langle\mathsf{Id}\rangle = \langle\mathsf{Expr}\rangle \ ; \\
\langle\mathsf{Stmt}\rangle & \to & \{\ \langle\mathsf{StmtList}\rangle\ \} \\
\langle\mathsf{Stmt}\rangle & \to & \texttt{if}\ (\ \langle\mathsf{Expr}\rangle\ )\ \langle\mathsf{Stmt}\rangle \\
\langle\mathsf{StmtList}\rangle & \to & \langle\mathsf{Stmt}\rangle \\
\langle\mathsf{StmtList}\rangle & \to & \langle\mathsf{StmtList}\rangle\langle\mathsf{Stmt}\rangle \\
\langle\mathsf{Expr}\rangle & \to & \langle\mathsf{Id}\rangle \\
\langle\mathsf{Expr}\rangle & \to & \langle\mathsf{Num}\rangle \\
\langle\mathsf{Expr}\rangle & \to & \langle\mathsf{Expr}\rangle\ \langle\mathsf{Optr}\rangle\ \langle\mathsf{Expr}\rangle \\
\langle\mathsf{Id}\rangle & \to & \texttt{x} \\
\langle\mathsf{Id}\rangle & \to & \texttt{y} \\
\langle\mathsf{Num}\rangle & \to & 0 \\
\langle\mathsf{Num}\rangle & \to & 1 \\
\langle\mathsf{Num}\rangle & \to & 9 \\
\langle\mathsf{Optr}\rangle & \to & > \\
\langle\mathsf{Optr}\rangle & \to & +
\end{array}$$

$$\underbrace{\texttt{if}\ (\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ \underbrace{>}_{\langle\mathsf{Optr}\rangle}\ \underbrace{\underbrace{9}_{\langle\mathsf{Num}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ )\ \underbrace{\underbrace{\{\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle} = \underbrace{\underbrace{0}_{\langle\mathsf{Num}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ ;}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle\mathsf{StmtList}\rangle}\ \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle} = \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ \underbrace{+}_{\langle\mathsf{Optr}\rangle}\ \underbrace{1}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}\ ;}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}\ \}}_{\langle\mathsf{StmtList}\rangle}}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}$$

A linguagem de Cálculo 2

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e TODOS ELES supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer "Syntax error" onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:
`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html`

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:


Using Substitution

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta + 5)\, d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\, du && \text{Let } u = 7\theta + 5,\ du = 7\, d\theta,\ (1/7)\, du = d\theta. \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\, du && \text{With the (1/7) out front, the integral is now in standard form.} \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{Integrate with respect to } u\text{, Table 4.2.} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta + 5) + C && \text{Replace } u \text{ by } 7\theta + 5.
\end{aligned}$$

Eu comecei a aprender um desses "programas que entendem demonstrações" nas férias – o Lean:
`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/`
Ele é considerado muito mais fácil de usar que os "proof assistants" anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que "tava tudo certo, caramba" e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram "é óbvio".
Neste curso nós vamos ver as definições precisas de *alguns tipos* de "passos óbvios" que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por sequências de igualdades, e vão ter este formato:

$$\begin{array}{rcll}
\langle\text{expr}\rangle & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle
\end{array}$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra ZILHÕES de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são "óbvios":

$$\langle\text{expr}\rangle \quad = \quad \langle\text{expr}\rangle \qquad \langle\text{justificativa}\rangle$$

Substituição: introdução

Você deve ter alguma prática de substituições de variáveis "em português"... por exemplo,

> Se substituirmos x por $10a+b$
> e y por $3c+4d$ em:
>
> $$x^y + 2x$$
>
> obtemos:
>
> $$(10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

E você também deve ter saber substituir funções "usando português":

> Digamos que $f(x) = x^2$. Então:
>
> $$\begin{array}{rcl} f(200) &=& 200^2 \\ f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\ f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2 \\ f'(x) &=& 2x \\ f'(200) &=& 2 \cdot 200 \\ f'(3u+4) &=& 2(3u+4) \\ f'(42x^3+99) &=& 2(42x^3+99) \end{array}$$

Como o que você aprendeu em Prog 1 você provavelmente sabe fazer uma função que recebe um string qualquer e substitui todas as letras '`a`' no string por "`oo`"s; se essa função receber o string "`banana`" ela retorna "`boonoonoo`". A gente diz que uma função dessas é "puramente sintática" porque ela não se importa com o *significado* dos strings "`banana`" ou "`boonoonoo`".

A nossa operação '$[:=]$' vai servir pra substituir tanto variáveis quanto funções em expressões matemáticas. No caso mais básico a sintaxe dela é esta aqui:

$$\begin{array}{rcl} \langle\text{expressão original}\rangle\langle\text{substituição}\rangle &=& \langle\text{expressão nova}\rangle \\ \langle\text{expressão original}\rangle[\langle\text{var}\rangle := \langle\text{expr}\rangle] &=& \langle\text{expressão nova}\rangle \end{array}$$

Ela vai agir da forma mais sintática possível. Essa regra aqui vai ser MUITO IMPORTANTE:

> O '$=$' depois de uma substituição tem um significado especial (...) a pronúncia dele é "o resultado da substituição à esquerda é a expressão à direita".

Eu não estou definindo *precisamente* o que isso quer dizer, mas olhe estes exemplos:

$$\begin{array}{rcl} (2=3+a\cdot 4)\,[a:=5] &=& (2=3+5\cdot 4) \\ (2=3+a\cdot 4)\,[a:=5+6] &=& (2=3+(5+6)\cdot 4) \\ (2=3+a\cdot 4)\,[a:=10] &=& (2=3+40) \end{array}$$

As duas primeiras linhas seguem a idéia de que "o resultado da substituição à esquerda é a expressão à direita" mas a terceira linha não – na terceira a gente tranformou o $10 \cdot 4$ em 40, e nisso a gente fez algo a mais além de simplesmente substituir o 'a' por '10'.
Aqui as duas primeiras linhas são verdadeiras mas a terceira não,

$$\begin{array}{rcl} (x^x)\,[x:=2+3] &=& (2+3)^{(2+3)} \\ (x^x)\,[x:=2+3] &=& (2+3)^{2+3} \\ (x^x)\,[x:=2+3] &=& 2+3^{2+3} \\ (x^x)\,[x:=2+3] &=& x^{2+3} \end{array}$$

porque na terceira a gente omitiu parênteses de um jeito que muda o significado da expressão original. A quarta linha também é falsa, porque "$[x := 2+3]$" quer dizer "substitua TODAS as ocorrências da variável x por $2+3$ ou $(2+3)$", e teve um 'x' que a gente não substituiu.

Substituição: introdução (2)

A nossa operação '[:=]' também vai servir pra substuir funções. Lembre que:

Digamos que $f(x) = x^2$. Então:

$$\begin{array}{rcl} f(200) &=& 200^2 \\ f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\ f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2 \\ f'(x) &=& 2x \\ f'(200) &=& 2\cdot 200 \\ f'(3u+4) &=& 2(3u+4) \\ f'(42x^3+99) &=& 2(42x^3+99) \end{array}$$

Isto aqui vai ser verdade:

$$\left(\frac{f(200)+5}{f(3u+4)}\right)[f(x) := x^2] \quad = \quad \left(\frac{200^2+5}{(3u+4)^2}\right)$$

Agora eu vou introduzir uma gambiarra. A motivação pra ela é a seguinte: se $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ então temos dois jeitos equivalentes de escrever $f'(x)$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) &=& 2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cos x \\ f'(x) &=& x^2 \cos x + 2x \cdot \operatorname{sen} x \end{array}$$

Se a gente não decide de antemão qual das duas expressões pra $f'(x)$ a gente vai usar fica muito mais difícil – pelo menos pra mim, que sou péssimo em contas – calcular o resultado de uma substituição como esta:

$$\left(\frac{42+f(x)}{f'(x)}\right)[f(x) := x^2 \operatorname{sen} x] \quad = \quad ?$$

A gambiarra é que em substituições como a acima, em que tanto $f(x)$ quanto $f'(x)$ vão ter que ser substituídos, a gente sempre vai escrever linhas novas na caixinha das substituições pra ajudar, e essas linhas novas vão ser consequências das linhas de cima. Por exemplo, a substituição acima pode virar isto,

$$\left(\frac{42+f(x)}{f'(x)}\right)\left[\begin{array}{r} f(x) := x^2 \operatorname{sen} x \\ f'(x) := 2x\cdot\operatorname{sen} x + x^2\cos x \end{array}\right] \quad = \quad ?$$

mas também poderíamos ter usado o $f'(x)$ na outra ordem.

Uma das vantagens do '[:=]' ser uma operação "puramente sintática" é que podemos aplicar o '[:=]' a expressões cujo significado a gente ainda não entende. Nós vamos usar isto muitas vezes no curso pra entender definições que parecem complicadas porque são muito gerais. O '[:=]' nos permite obter casos particulares que são fáceis de entender.

Exercício 1.
Quando eu corrigi as P1s do semestre passado eu vi que muitas pessoas ainda tinham muita dificuldade com o '[:=]', e aí depois de fazer o gabarito dela eu pus um apêndice no PDF da P1 com exercícios baseados no gabarito. Tente fazer o exercício da página 17; a definição da fórmula [S2I] está na página 7. Link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=14`

Exercício 1.

Este é o "Exercício 1" do apêndice do gabarito da P1 do semestre passado, ligeiramente rearrumado e incluindo as dicas.
No semestre passado nós definimos a [S2I] – que é uma demonstração! – deste jeito:

$$[\mathsf{S2I}] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

Nós vamos usar "[S2I]" como uma *abreviação* pra essa coisa grandona entre parênteses.
Copie a [S2I] – a versão "por extenso" dela, à direita do '=' – pra uma folha de papel e recorte isso pra você poder reusar essa [S2I] "por extenso" sem precisar copiá-la várias vezes. É sério, esse tuque da [S2I] recortada vai te poupar muito tempo! Depois encontre os resultados das quatro substituições da coluna da direita e compare-os com o gabarito do próximo slide.

$$a)\quad [\mathsf{S2I}] \begin{bmatrix} x := x \\ u := u \\ f(u) := \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \\ g(x) := 3x \\ g'(x) := 3 \end{bmatrix} \;=\; ?$$

$$b)\quad [\mathsf{S2I}] \begin{bmatrix} x := u \\ u := v \\ f(v) := \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \\ g(u) := u+4 \\ g'(u) := 1 \end{bmatrix} \;=\; ?$$

$$c)\quad [\mathsf{S2I}] \begin{bmatrix} x := v \\ u := w \\ f(w) := \cos(2+w) \\ g(v) := \sqrt{v} \\ g'(v) := (2\sqrt{v})^{-1} \end{bmatrix} \;=\; ?$$

$$d)\quad [\mathsf{S2I}] \begin{bmatrix} x := w \\ u := y \\ f(y) := \cos(y) \\ g(w) := 2+w \\ g'(w) := 1 \end{bmatrix} \;=\; ?$$

Gabarito do Exercício 1

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \begin{bmatrix} x:=x \\ u:=u \\ f(u):=\frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \\ g(x):=3x \\ g'(x):=3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=\frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(3x) &=& \displaystyle\int \frac{\cos(2+\sqrt{3x+4})}{2\sqrt{3x+4}}\cdot 3\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}}\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=3x. \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \begin{bmatrix} x:=u \\ u:=v \\ f(v):=\frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \\ g(u):=u+4 \\ g'(u):=1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(v)=\frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(u+4) &=& \displaystyle\int \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}}\cdot 1\,du \\ \| && \\ F(v) &=& \displaystyle\int \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}}\,dv \end{array} \\ \text{Obs: } v=u+4. \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \begin{bmatrix} x:=v \\ u:=w \\ f(w):=\cos(2+w) \\ g(v):=\sqrt{v} \\ g'(v):=(2\sqrt{v})^{-1} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(w)=\cos(2+w) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(\sqrt{v}) &=& \displaystyle\int \cos(2+\sqrt{v})\cdot(2\sqrt{v})^{-1}\,dv \\ \| && \\ F(w) &=& \displaystyle\int \cos(2+w)\,dw \end{array} \\ \text{Obs: } w=\sqrt{v}. \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u=g(x). \end{array}\right) \begin{bmatrix} x:=w \\ u:=y \\ f(y):=\cos(y) \\ g(w):=2+w \\ g'(w):=1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(y)=\cos(y) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(2+w) &=& \displaystyle\int \cos(2+w)\cdot 1\,dw \\ \| && \\ F(y) &=& \displaystyle\int \cos(y)\,dy \end{array} \\ \text{Obs: } y=2+w. \end{array}\right)$$

EDOs por chutar e testar

Eu costumava começar o curso por este exercício aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-intro.pdf#page=4

Considere estas equações:

$$\begin{array}{ll}
1) & x+2=5 \\
2) & x^2+3=7 \\
3) & x^2+x=6 \\
4) & f'(x)=x^4 \\
5) & f'(x)=2f(x) \\
6) & f''(x)+f'(x)=6f(x) \\
7) & f'(x)=-1/f(x) \\
8) & f'(x)=-x/f(x)
\end{array}$$

As equações 1–3 são equações "comuns" em que temos que encontrar valores de x que satisfaçam a igualdade e as equação 4–8 são EDOs em que temos que encontrar funções f que satisfaçam a igualdade para todo x no domínio de f. A sugestão pros exercícios 4–8 é: comece testando as 'f's abaixo...

$$\begin{array}{rcl}
f(x) &=& x^3, \\
f(x) &=& x^5, \\
f(x) &=& 200x^5+42, \\
f(x) &=& e^x, \\
f(x) &=& e^{42x}, \\
f(x) &=& e^{2x}, \\
f(x) &=& e^{3x}, \\
f(x) &=& \sqrt{1-x^2}, \\
f(x) &=& \sqrt{4-x^2}.
\end{array}$$

Normalmente esses testes são feitos usando Português. Por exemplo:

> Vamos tentar encontrar soluções para a EDO $f'(x)=x^4$ por chutar-e-testar. Vamos ver se $f(x)=x^3$ é uma solução para esta EDO. Substituindo $f(x)$ por $f(x)=x^3$ na EDO $f'(x)=x^4$ obtemos $3x^2=x^4$; esta igualdade não é verdadeira para todo x, então a função $f(x)=x^3$ não é uma solução para a EDO $f'(x)=x^4$.

A parte em que todo mundo se enrola é o "Substituindo $f(x)$ por $f(x)=x^3$ na EDO $f'(x)=x^4$ obtemos...". Como o '[:=]' nós podemos escrever esse passo como:

$$(f'(x)=x^4)\begin{bmatrix} f(x):=x^3 \\ f'(x):=3x^2 \end{bmatrix} \quad = \quad (3x^2=x^4)$$

e temos

$$(\forall x\in\mathbb{R}.\ 3x^2=x^4) \quad = \quad \mathbf{F}.$$

O domínio da função $f(x)=x^3$ é $\mathbb{R}$, e por isso eu usei "$\forall x\in\mathbb{R}$" logo acima. Em Cálculo 2 muitos detalhes, como os domínios das funções, ou só são preenchidos no final ou são deixados implícitos ("a cargo do leitor")... aí os livros normalmente vão dizer só algo como "$3x^2=x^4$ é falso" e você vai ter que descobrir os detalhes por si mesmo.

Exercício 2.
Encontre soluções das EDOs 4–8 por chutar-e-testar. Use as 'f's sugeridas à esquerda.

Somatórios

O material desta página foi adaptado daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=19

Antigamente somatórios eram matéria de ensino médio, mas hoje em dia muita gente chega em Cálculo 2 sem nunca ter visto somatórios...
As fórmulas para somas de progressões aritméticas (PAs) e para somas de progressões geométricas (PGs) usam '$\sum$'s. Veja:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_aritm%C3%A9tica
https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_geom%C3%A9trica
https://pt.wikipedia.org/wiki/Somat%C3%B3rio

Relembre:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{5} 10^k &=& 10^2+10^3+10^4+10^5 \\
&=& 100+1000+10000+100000 \\
&=& 111100 \\
(1-10)\sum_{k=2}^{5} 10^k &=& (1-10)(100+1000+10000+100000) \\
&=& (100+1000+10000+100000) \\
&& -(1000+10000+100000+1000000) \\
&=& 100-1000000 \\
&=& 10^2-10^{5+1} \\
\sum_{k=2}^{5} 10^k &=& \dfrac{10^2-10^{5+1}}{1-10}
\end{array}$$

A fórmula geral é: $$\sum_{k=a}^{b} x^k = \frac{x^a-x^{b+1}}{1-x} = \frac{x^{b+1}-x^a}{x-1} .$$

Repare que dá pra calcular o somatório do início do slide anterior em mais passos usando o '[:=]'...

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{5} 10^k &=& 10^2+10^3+10^4+10^5 \\
\sum_{k=2}^{5} 10^k &=& (10^k)[k:=2] \\
&+& (10^k)[k:=3] \\
&+& (10^k)[k:=4] \\
&+& (10^k)[k:=5] \\
&=& 10^2+10^3+10^4+10^5
\end{array}$$

Às vezes a gente vai usar esse passo intermediário com '[:=]'s pra não se enrolar em somatórios de expressões complicadas... Por exemplo aqui, e nas páginas seguintes:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=12

Exercício 3:

Expanda e calcule:
a) $\sum_{n=1}^{5}(2n-1)$
b) $\sum_{n=0}^{4}(2n+1)$
c) $\sum_{k=0}^{2}(k+1)$
d) $\sum_{k=0}^{2} k+1$
e) $\left(\sum_{k=0}^{2} k\right)+1$

Expanda e calcule/simplifique até onde der:
f) $\sum_{n=1}^{5}(2k-1)$
g) $\sum_{k=1}^{5}(2n-1)$
h) $\sum_{n=4}^{6} f(10n)$
i) $\sum_{n=4}^{6} f(10n)$, onde $f(x)=10x$

Cálculo 2 - 2021.2

Aula 4: integrais como somas de retângulos (1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Links pra vídeos antigos

Vamos usar estes vídeos antigos aqui:
este de 2020.2,

http://angg.twu.net/eev-videos/2020.2-C2-somas-1.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=bbZfQmtFCSw

e este de 2021.1, sobre o exercício 9:

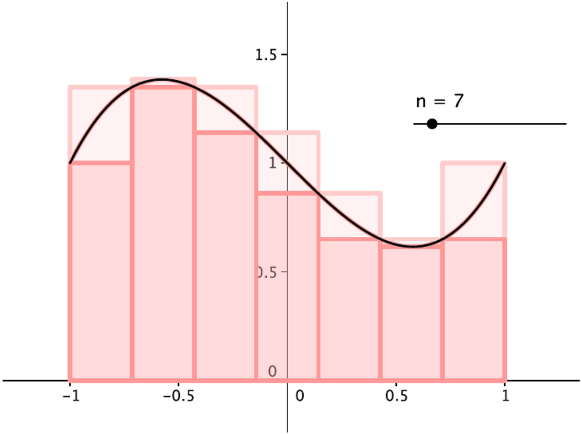
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=Ht5iLKGlysM

Este sobre não tou entendendo nada
também vai ser bem importante:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1-dicas.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=pCD1p9FZYdI

Algumas figuras

Dê uma olhada nas notas de aula da Cristiane Hernández, linkadas na página do curso... ela usa várias figuras como essa aqui:



Algumas áreas fáceis de calcular

Por enquanto a gente sabe calcular a área de algumas figuras simples: retângulos, triângulos, trapézios, e figuras formadas por vários retângulos, triângulos e trapézios.

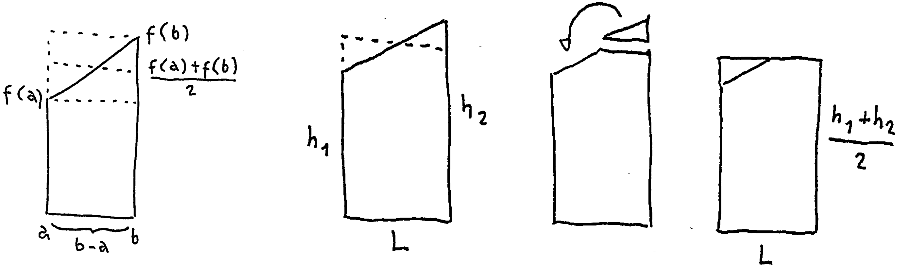
Algumas pessoas viram no Ensino Médio um método de calcular a área de qualquer polígono. Vamos rever isto agora.
Assista os primeiros 10 minutos deste vídeo do Mathologer:
`http://www.youtube.com/watch?v=0KjG8Pg6LGk`

Algumas idéias dele vão ser muito importantes pra gente depois. Por exemplo, que áreas podem ser calculadas de vários jeitos, e que alguns pedaços devem ser contados "negativamente".

Na verdade nós vamos usar principalmente retângulos e trapézios...

Áreas de trapézios

O truque pra calcular a área de um trapézio é transformá-lo num retângulo com a mesma área que ele por cortar-e-colar. Veja:



Nossa função preferida
Seja $f(x) = 4 - (x-2)^2$.
Isto é uma parábola com a concavidade pra baixo.
Verifique que:
$f(0) = 4 - 4 = 0$,
$f(1) = 4 - 1 = 3$,
$f(2) = 4 - 0 = 4$,
$f(3) = 4 - 1 = 3$,
$f(4) = 4 - 4 = 0$.

Além disso $f'(x) = -2(x-2)$, $f'(1) = 2$, $f'(3) = -2$, e
a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 1$ tem coef. angular 2, e
a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 3$ tem coef. angular -2.

Exercício 1: use estas informações para traçar o gráfico de $f(x)$ entre $x = 0$ e $x = 4$.

Dois jeitos de visualizar $(x, f(x))$
Jeito burro:
Em $x = 2.5$ temos
$f(2.5) = 4 - (2.5 - 2)^2 = 4 - 0.5^2 = 4 - 0.25 = 3.75.$
Encontre o ponto $y = 3.75$ no eixo y.
Desenhe o ponto $(2.5, 3.75)$.

Jeito esperto/rápido:
Encontre no eixo x o ponto $x = 2.5$.
Suba esse ponto pra curva $y = f(x)$ –
você encontrou o ponto $(2.5, f(2.5))$!

O "jeito esperto" está explicado neste vídeo aqui:
http://www.youtube.com/watch?v=bbZfQmtFCSw#t=4m00s
Ele vai ser MUITO importante!!!!!!!!!

Mais exercícios

Exercício 2. Desenhe o gráfico da nossa função preferida
(obs: sempre no intervalo entre $x = 0$ e $x = 4$!)
e desenhe sobre ele o retângulo "cuja área é $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5)$".
Truque: isto é altura · base, e a base vai de $x = 0.5$ a $x = 1.5$.

Exercício 3. Desenhe em outro gráfico
a nossa função preferida e sobre ela os retângulos da soma abaixo:
$f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5) + f(1.5) \cdot (2 - 1.5) + f(2) \cdot (3 - 2) + f(3.5)(3.5 - 3)$

Partições

Informalmente uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um modo de decompor $[a, b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco.
Caso geral:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_N, b_N],$$

onde:
N é o número de intervalos,
$a = a_1$, $b = b_N$, ("extremidades")
$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido $(i = 1, \ldots, N)$
$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1, \ldots, N - 1$

Partições (2)
Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i
1	2	3.5
2	3.5	4
3	4	6
4	6	7

corresponde à partição de $[2, 7]$ do slide anterior.
Exercício 4. Converta esta "partição"

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

numa tabela. Neste caso quem são a, b e N?

Partições (3)
A definição certa de partição é a seguinte.
Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$,
e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b.
Então P é uma partição do intervalo $[a, b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$ corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução ponha os elementos de P em ordem e chame-os de $b_0, \ldots, b_N$; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a, b, e N.

Exercício 5. Converta a partição $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$ para o formato tabela e para o formato $[a, b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N]$.

Partições definem muitas coisas implicitamente

Quando dizemos algo como "Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N, a, b, e para cada a_i e b_i. Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{N} f(b_i) \cdot (b_i - a_i) & = & \sum_{i=1}^{2} f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\ & = & f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\ & = & f(4) \cdot (4 - 2.5) + f(6) \cdot (6 - 4) \end{array}$$

Note que a expressão $\sum_{i=a}^{b} \mathsf{expr}$ quer dizer "some várias cópias da expressão expr, a primeira com i substituido por a, a segunda com i substituido por $a+1$, etc etc, até a cópia com i substituido por b"...

Se você tiver dificuldade pra interpretar alguma expressão com somatórios você pode calculá-la beeem passo a passo usando a operação '[:=]' da aula passada. Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=4}^{7} f(b_i)\cdot(b_i-a_i) & = & (f(b_i)\cdot(b_i-a_i))[i:=4] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i-a_i))[i:=5] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i-a_i))[i:=6] \\
& + & (f(b_i)\cdot(b_i-a_i))[i:=7] \\
& = & f(b_4)\cdot(b_4-a_4) \\
& + & f(b_5)\cdot(b_5-a_5) \\
& + & f(b_6)\cdot(b_6-a_6) \\
& + & f(b_7)\cdot(b_7-a_7) \\
& = & \ldots
\end{array}$$

Alguns exercícios de visualizar somas de retângulos...

Exercício 6. Seja f a nossa função preferida e seja P a partição $\{0.5, 1, 2, 2.5\}$. Represente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(b_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 7. Seja f a nossa função preferida e seja P a mesma partição que no exercício anterior. Represente num gráfico só – separado do gráfico do exercício anterior!!! – a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(a_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 8. Usando a mesma função f e a mesma partição P dos exercícios anteriores, represente num outro gráfico a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot (b_i - a_i)$. Repare que $\frac{a_i+b_i}{2}$ é o ponto médio do intervalo $[a_i, b_i]$, e é fácil encontrar pontos médios no olhômetro.

Agora comparando com a Wikipedia

Exercício 9. Dê uma olhada na página

https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

da Wikipedia. Vamos tentar entender alguns pedaços dela.

Seja P a "partição do intervalo $[0,3]$ em 6 subintervalos iguais". Tem um ponto em que a página da Wikipedia diz: "os pontos da partição serão..." – entenda as definições dela, descubra quem é Δx neste caso, e escreva quais são os pontos desta partição na linguagem da página da Wikipedia e na linguagem que eu usei nos slides.

Expanda a fórmula da página da Wikipedia para a "soma média" neste caso. Expanda também a nossa fórmula $\sum_{i=1}^{N} f\big(\frac{a_i+b_i}{2}\big) \cdot (b_i - a_i)$ e compare as duas expansões.

(Vamos ver o que são "ínfimos" e "supremos" na aula que vem)

Dicas pro exercício 9

Eu pus um vídeo com várias dicas pro exercício 9 aqui:

`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=Ht5iLKGlysM`

Uma dica extra... no Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como $\frac{6}{4}$ tem que ser simplificada pra $\frac{3}{2}$, mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais $\frac{1}{4}$ eu acho bem melhor escrever essa sequência como $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}$ do que como $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \ldots$

Dicas pro exercício 9 (2)

Além disso no exercício 9 você vai ter alguns somatórios de expressões como $f(\frac{a_i+b_i}{2})\cdot(b_i-a_i)$ em que todos os '(b_i-a_i)'s dão o mesmo valor. Você *pode* reescrever todos esses '(b_i-a_i)'s como números, mas se você parar as suas expansões e simplificações um passo antes e mantiver eles como $(0.5-0)$, $(1-0.5)$, etc, aí vai ser fácil interpretar cada $f(\frac{a_i+b_i}{2})\cdot(b_i-a_i)$ como um retângulo.

Sobre o "jeito esperto", leia isto aqui:

http://angg.twu.net/2021.1-C2/2021-jun-18-pergunta_sobre_jeito_esperto.pdf

Trapézios
Tem dois modos diferentes da gente
interpretar geometricamente $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$:

1) como um retângulo de altura $\frac{f(a)+f(b)}{2}$, ou
2) como um trapézio com vértices

$$(a,0),(b,0),(b,f(b)),(a,f(a))$$

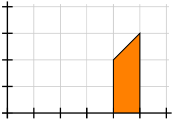
.

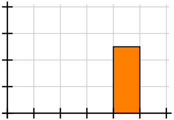
Exercício 10. Sejam f a nossa função preferida e P a partição $\{0,1,2\}$. Desenhe num gráfico só a curva $y=f(x)$ e os trapézios da soma:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i-a_i)$$

(Veja as figuras da "Regra Trapezoidal" na página da Wikipedia)

...ou seja, estas duas igualdades estão certas:

$$\left(\frac{2+3}{2}\right)(5-4) \quad = $$ 

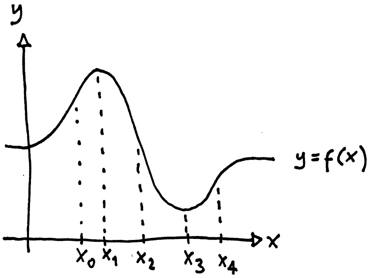
$$\left(\frac{2+3}{2}\right)(5-4) \quad = $$ 

A primeira mostra a representação geométrica do $\left(\frac{2+3}{2}\right)(5-4)$ como um trapézio, e a segunda mostra a representação geométrica do $\left(\frac{2+3}{2}\right)(5-4)$ como um retângulo de altura $\frac{2+3}{2} = 2.5$.

Exercício 11.
Para cada uma das expressões abaixo faça as duas representações gráficas dela: a que interpreta a expressão como uma soma de trapézios e que interpreta ela como uma soma de retângulos.

a) $(\frac{2+1}{2})(2-1)+(\frac{2+4}{2})(5-2)$
b) $(\frac{0+1}{2})(1-0)+(\frac{1+2}{2})(2-1)+(\frac{2+3}{2})(3-2)+(\frac{3+5}{2})(5-3)$
c) $(\frac{1+1}{2})(2-1)+(\frac{1-0}{2})(3-2)+(\frac{0-1}{2})(4-3)+(\frac{-1-1}{2})(5-4)$
d) $(\frac{1+1}{2})(2-1)+(\frac{1-1}{2})(4-2)+(\frac{-1-1}{2})(5-4)$
e) $(\frac{-1+3}{2})(5-1)$
f) $(\frac{1-2}{2})(4-1)$

Exercício 12.



Faça duas cópias à mão do desenho acima – o gráfico da função f com indicações de quais são os pontos $x_0, \ldots, x_4$ do eixo x.
Você vai fazer cada item do exercício sobre uma das cópias.
As cópias não precisam ser muito precisas.

Exercício 12 (cont.)

a) Represente graficamente sobre a primeira cópia:

$f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_3 - x_2) + f(x_4)(x_4 - x_3)$

b) Represente graficamente sobre a segunda cópia
a interpretação da expressão abaixo como trapézios
e a interpretação dela como retângulos:

$$\begin{array}{l} (\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2})(f(x_1) - f(x_0)) \\ + (\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2})(f(x_2) - f(x_1)) \\ +(\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2})(f(x_3) - f(x_2)) \\ +(\frac{f(x_3)+f(x_4)}{2})(f(x_4) - f(x_3)) \end{array}$$

Métodos de integração: nomes

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^N f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^N \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^N \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}$$

Cada uma dessas fórmulas é um "método de integração". Todos esses "métodos" aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os intervalos têm o mesmo comprimento.

Exercício 13.

Seja f a nossa função preferida, e
seja P a partição $P = \{1, 4\}$.

a) Represente num gráfico só f e [L].
b) Represente num gráfico só f e [R].
c) Represente num gráfico só f e [Trap] (dos dois jeitos).
d) Represente num gráfico só f e [M].
e) Represente num gráfico só f e [min].
f) Represente num gráfico só f e [max].

Cálculo 2 - 2021.2

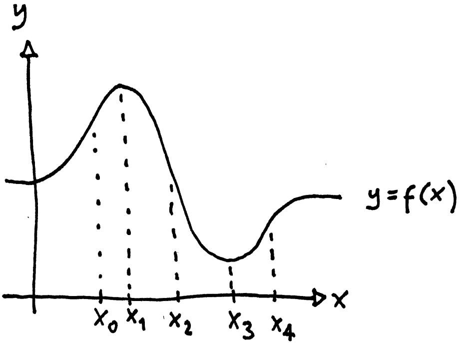
Mini-teste 1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

As regras vão ser as mesmas dos
mini-testes dos semestres anteriores:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf#page=2
(Leia com muita atenção!!!!!!!!!!!)

As questões vão ser disponibilizadas às 20:45 da sexta
12/novembro/2021 e vocês vão ter até as 20:45 do sábado
13/novembro/2021 pra entregar as respostas.

Vamos usar a mesma função $f(x)$ do exercício 12...
Esta aqui:



Faça uma cópia dela à mão para cada item do mini-teste.
Não tem problema se as cópias ficarem meio tortas.

a) (0.1 pts) Represente graficamente sobre a primeira cópia:
$f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_4 - x_2)$

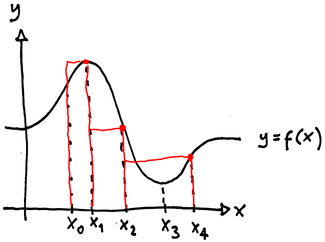
b) (0.1 pts) Represente graficamente sobre a segunda cópia:
$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_4)(x_4 - x_2)$

c) (0.3 pts) Represente graficamente sobre a terceira cópia
a interpretação da expressão abaixo como trapézios
e a interpretação dela como retângulos:

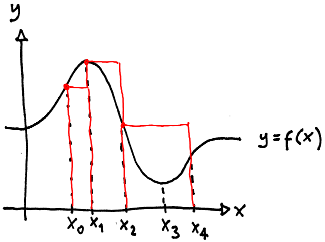
$$\begin{aligned} &(\tfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2})(x_1 - x_0) \\ +\ &(\tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2})(x_2 - x_1) \\ +&(\tfrac{f(x_2)+f(x_4)}{2})(x_4 - x_2) \end{aligned}$$

Gabarito:

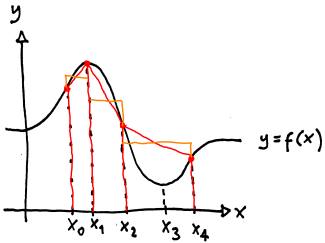
a)



b)



c)



Obs: tinha um error de digitação na questão (a)...
Compare:
$f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_4 - x_2)$
$f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_4)(x_4 - x_2)$
Eu queria ter escrito a segunda, com $f(x_4)$,
mas me distraí e escrevi a primeira, com $f(x_3)$.

O gabarito da (a) no slide anterior corresponde
à expressão com $f(x_4)$.

Cálculo 2 - 2021.2

Mini-teste 2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Regras

As regras vão ser as mesmas dos
mini-testes dos semestres anteriores,

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf#page=2`

exceto pela regra de que o valor máximo do mini-teste vai depender da participação da pessoa nas aulas do Telegram de 24 a 26 de novembro. Veja a explicação na próxima página.

As questões vão ser disponibilizadas às 20:30 da sexta 26/novembro/2021 e vocês vão ter até as 20:30 do sábado 27/novembro/2021 pra entregar as respostas.

Introdução ao Mini-teste 2

Na "dica 7" do primeiro PDF do curso eu expliquei que o melhor modo da gente aprender a explicar coisas complicadas bem é mostrando o que a gente escreveu pra várias pessoas – incluindo:

> "b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro"

E eu disse que:

> "Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite – reescrever é um ótimo exercício."

O texto original está aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=3

Este mini-teste vai ser o nosso primeiro exercício de *explicar algo complicado de um jeito que a gente goste do nosso modo de explicar – e as outras pessoas também*. Ele vai ser sobre mostrar como traduzir a página da Wikipedia sobre somas de Riemann pra notação que nós estamos usando, e vai ser uma versão BEM aumentada do exercício 9 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=15

A página da Wikipedia não só usa algumas notações diferentes das nossas como também usa umas definições diferentes das nossas (!!!)... as nossas definições são um pouco mais gerais, e, entre um monte de outros detalhes, a gente não usa o 'x_i^*'s da Wikipedia, que "escolhem um ponto de cada intervalo da partição".

Existem muitos jeitos de explicar essa tradução de um jeito claro, e vocês vão ter que encontrar o jeito que vocês gostam mais *e trocar idéias com os colegas*. Isso *vai ter que* ser feito durante as aulas no Telegram, e pra forçar as pessoas a participarem das aulas eu vou aplicar essa regra aqui:

> Esse segundo mini-teste vai valer no máximo 0.5 pontos pra quem participar bastante das aulas da semana que vem e no máximo 0.2 pra quem não participar nada.

Eu agora já sei como colorir as falas de cada pessoa no log do Telegram, e aí com isso fica bem fácil reler tudo que cada pessoa disse nas aulas.

Dica: faça o exercício 3g

Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar.

Pra testar os seus somatórios você vai precisar entender muito bem o exercício 3g daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=13

E pra entender bem ele você provavelmente vai precisar entender essa técnica aqui:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=2}^{5} 10^k & = & (10^k)[k:=2] \\ & + & (10^k)[k:=3] \\ & + & (10^k)[k:=4] \\ & + & (10^k)[k:=5] \\ & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \end{array}$$

Dica: faça o exercício 1

...e pra entender essa técnica você vai precisar entender a operação '[:=]' muito bem.

Se você ainda não fez o exercício 1 daqui,
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=10
então **FAÇA ELE!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**

Você provalmente vai ter que reler muitas vezes os slides que explicam os detalhes do '[:=]' e provavelmente vai gastar pelo menos uma ou duas horas nisso e no exercício 1, mas essas uma ou duas horas vão fazer você economizar MUITAS horas de estudo do que vem depois.

Deixa eu repetir:

A operação '[:=]' é UM BILHÃO de vezes mais útil do que você consegue imaginar.

Lembrem da comparação com aula de música

Não interessa se o seu colega já descobriu como tocar Atirei o Pau no Gato sem pensar 5 segundos antes de cada nota; você quer aprender a fazer isso voce também, e do seu jeito.

SEJA (*) ESTA FÓRMULA DA WIKIPEDIA:

$$(*)\qquad S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

SE A NOSSA PARTIÇÃO É

$$P = [2,3],[3,5]$$

ENTÃO A FÓRMULA (*) VIRA:

(Complete!)

SEJA (**) ESTA FÓRMULA DA WIKIPEDIA:

$$(**)\qquad P = [x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n].$$

SEJA [A] A FÓRMULA ABAIXO:

$$[A]\qquad P = [2,3],[3,5],[5,8],[8,20].$$

A FÓRMULA [A] É UM CASO PARTICULAR DA (**). QUE CASO PARTICULAR É ESSE? QUEM SÃO n, $x_0,x_1,\ldots,x_n$?

Somatórios com '...'s

A página da Wikipedia muitas vezes usa expressões com '...' ao invés de somatórios (com Σ). A gente viu no slide 4 como a gente consegue "expandir um somatório" "pra se livrar do sinal de 'Σ' "...

A técnica pra gente expandir expressões com reticências pra se livrar das reticências é bem mais difícil de formalizar. O scan à direita é um exemplo.

Exercício: pegue os quatro somatórios escritos com reticências na seção "Método" da Wikipedia e 1) expanda eles no caso em que $n = 3$, 2) converta eles pra notação com 'Σ'.

SE $n=3$ ENTÃO O $\overbrace{\text{TRECHO}}^{\text{INÍCIO DO}}$ DA WIKIPEDIA SOBRE "MÉTODO" VIRA ISSO AQUI:

O INTERVALO $[a,b]$ É DIVIDIDO EM 3 SUBINTERVALOS, DE COMPRIMENTO $\Delta x = \frac{b-a}{3}$. OS PONTOS DA PARTIÇÃO SERÃO ENTÃO

$$a,\ a+\Delta x,\ a+2\Delta x,\ \ldots,\ a+(3-2)\Delta x,\ a+(3-1)\Delta x,\ b,$$

QUE É

$$a,\ a+\Delta x,\ a+2\Delta x,\ \ldots,\ a+1\Delta x,\ a+2\Delta x,\ b,$$

QUE É

$$a,\ a+\Delta x,\ a+2\Delta x,\ b.$$

O mini-teste
Mostre como traduzir a notação da página sobre Somas de Riemann da Wikipedia pra notação que eu usei nos meus PDFs. Faça o que você puder e escreva o melhor que você puder. Nós discutimos o que isso queria dizer nas aulas. =)

Os logs PDFizados dos canais do Telegram das turmas vão ficar disponíveis nestes endereços aqui até sábado de noite:

`http://angg.twu.net/tmp/C2-C1-RCN-PURO-2021.2.pdf`

`http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.2.pdf`

As aulas da semana do mini-teste estão nas páginas 67–89 no log da turma C1 e nas páginas 67-90 no log da turma E1.

Cálculo 2 - 2021.2

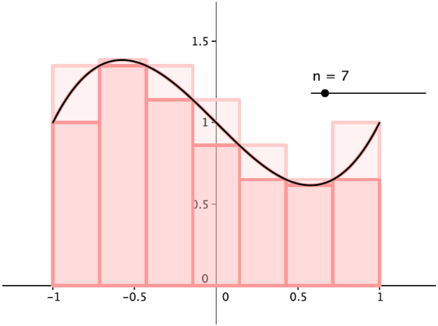
Aula 13: integrais como somas de retângulos (2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Aproximações por cima e por baixo

Uma das figuras na p.2 das notas da Cristiane Hernández é esta:



Ela mostra uma tentativa de calcular uma integral fazendo uma *aproximação por retângulos por baixo* e uma *aproximação por retângulos por cima* para $y = f(x)$ no intervalo entre $x = -1$ e $x = 1$. A curva $y = f(x)$ fica entre estas duas aproximações.

Porque aprender isto

As definições *formais* de "aproximação por retângulos por baixo" e "aproximação por retângulos por cima" são bem trabalhosas. Elas envolvem alguns truques com conjuntos infinitos, "para todo" e "existe", que a maioria dos livros de Cálculo pula...

Nós vamos ver essas definições em detalhes porque entendê-las e aprender a visualizar cada subexpressão delas vai acabar sendo muito útil pras próximas matérias de Matemática do curso de vocês.

No material da aula 2 eu pedi pra vocês aprenderem a fazer certos desenhos sem contas, chamei isso de o "jeito esperto", e disse que fazê-los calculando todas as coordenadas era o "jeito burro". Na discussão desse material pelo Telegram a Eduarda me pediu pra explicar melhor isso, e eu dei essa explicação aqui...

Tenta aprender a não fazer as contas... se você fizer tudo pelas contas você vai demorar muito mais e não vai descobrir um monte de truques importantes que a gente só descobre se a gente tenta aprender a visualizar tudo geometricamente...

Acho que eu tenho um exemplo bom.

Num dos primeiros slides eu usei uma figura copiada das notas da Cristiane Hernandez em que ela usa uma partição com 7 intervalos - ela até escreveu do lado "$n = 7$"...

Daqui a pouco a gente vai ter que usar figuras — que a gente não vai poder desenhar explicitamente com todos os detalhes — com 10 intervalos, ou 100, ou 1000, ou um milhão de intervalos

Se você aprender a visualizar tudo sem contas você vai conseguir visualizar a figura com um milhão de intervalos em poucos segundos.

E se você tiver que fazer as contas pra um milhão de intervalos você vai gastar um tempo que a gente não tem =(

Imagens de conjuntos

Dê uma olhada na seção 1.3 do Martins/Martins.
Nós vamos usar uma notação um pouco diferente da deles.
Se $f : A \to \mathbb{R}$ (obs: $A = \mathsf{dom}(f)$),

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{gr}_f & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\}, \\
\mathsf{im}_f & = & \{\, f(x) \mid x \in A \,\}, \\
\mathsf{gr}_f(B) & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\}, \\
F(B) & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\},
\end{array}$$

Por exemplo, se

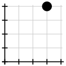
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

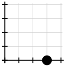
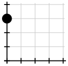
e $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ então:

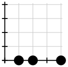
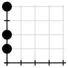
$$\begin{array}{rcl} \mathsf{gr}_f(B) & = & \mathsf{gr}_f(\{-1, 0, 1, 2\}), \\ & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\} \,\} \\ & = & \{(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))\} \\ & = & \{(-1, (-1)^2), (0, 0^2), (1, 1^2), (2, 2^2)\} \\ & = & \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \\ F(B) & = & \{\, f(x) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\} \,\} \\ & = & \{(-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2\} \\ & = & \{1, 0, 1, 4\} \\ & = & \{0, 1, 4\} \end{array}$$

Um par de números, como $(3,4)$, só pode ser representado no $\mathbb{R}^2$ de um jeito, mas um número, como 3, pode ser representado no $\mathbb{R}^2$ tanto como um ponto do eixo x – e aí ele vira o ponto $(3,0)$ – ou como um ponto do eixo y – e aí ele vira o ponto $(0,3)$. E um conjunto de números também pode ser representado no R^2 tanto como um "subconjunto do eixo x" quanto como um "subconjunto do eixo x".

Compare:

$(3,4) \quad = \quad$ 

$3 \quad \rightsquigarrow \quad$  ou 

$\{1,2,4\} \quad \rightsquigarrow \quad$  ou 

Se visualizarmos B como um subconjunto do eixo x então $\mathsf{gr}_f(B)$ é o resultado de "levantar" cada ponto de B para o ponto correspondente no gráfico de f, e $F(B)$ é o resultado de projetar todos os pontos de $\mathsf{gr}_f(B)$ no eixo y.

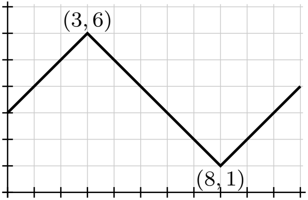
Exercício 1.
Sejam $f(x) = x^2$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.
a) Calcule $F(B)$.
b) Calcule $\mathsf{gr}_f(B)$.

c) Represente graficamente num gráfico só:
B "como um subconjunto do eixo x",
$\mathsf{gr}_f(B)$,
$F(B)$ "como um subconjunto do eixo y".

d) Represente graficamente num gráfico só:
B "como um subconjunto do eixo y",
$\mathsf{gr}_f(B)$,
$F(B)$ "como um subconjunto do eixo x".

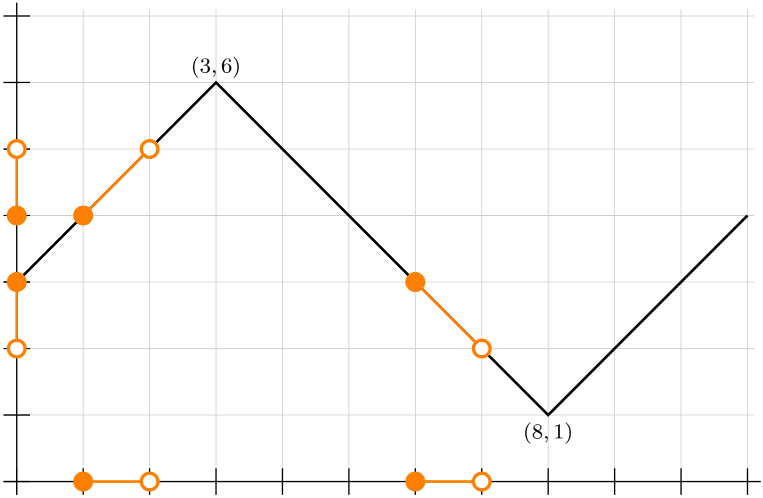
Imagens de intervalos

Seja:

$f(x) =$ 

$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$$

Se B é um conjunto infinito —
por exemplo, $B = [1, 2) \cup [6, 7)$ —
não dá pra calcularmos $\mathsf{gr}_f(B)$ e $F(B)$
fazendo as contas pra todos os pontos...
É melhor fazer desenhos.



Neste caso temos
$F([1,2) \cup [6,7)) = (2,3] \cup [4,5)$.

Exercício 2.

Seja f a função definida dois slides atrás.
Calcule:
a) $F([2,3))$
b) $F([2,4))$
c) $F((2,4))$
d) $F((2,9))$
e) $F([1,2) \cup [4,5))$
f) $F([1,2) \cup \{3\} \cup [4,5))$

Dica: assista este vídeo:
`http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-somas-2.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=Eq0pt2gt0xQ`
no trecho entre 7:10 e 12:45...

"As pessoas que tentam fazer tudo por contas geralmente acham que $F([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Isso está COMPLEMENTAMENTE errado..."

Tipos

Tudo que nós vamos fazer neste PDF pode ser *visualizado* e *tipado*. Você já viu um pouco de tipos em `C` e em Física; em Física os "tipos" são parcialmente determinados pelas unidades — metros são distância, segundos são tempo, metros/segundo é uma unidade de velocidade, e assim por diante...

Nos itens c e d do exercício 1 você viu que você podia interpretar B como um subconjunto do eixo x e $F(B)$ como subconjunto do eixo y e também podia tentar fazer o contrário — B como subconjunto do eixo y e $F(B)$ como subconjunto do eixo x — mas a primeira interpretação fazia muito mais sentido.

Exercício 3.
Para cada uma dos proposições abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa.

a) $\forall x \in [7,9].\, 1 < f(x)$
b) $\forall x \in [7,9].\, 1 \leq f(x)$
c) $\exists x \in [7,9].\, 1 < f(x)$
d) $\exists x \in [7,9].\, 1 \leq f(x)$

Dica:

$$\underbrace{\forall \underbrace{x}_{\substack{\text{ponto no}\\ \text{eixo } x}} \in \underbrace{[7,9]}_{\substack{\text{subconjunto}\\ \text{do eixo } x}} .\, \underbrace{\underbrace{1}_{\substack{\text{ponto no}\\ \text{eixo } y}} < \underbrace{f(\underbrace{x}_{\substack{\text{ponto no}\\ \text{eixo } x}})}_{\substack{\text{ponto no}\\ \text{eixo } y}}}_{\text{bool}}}_{\text{bool}}$$

Definindo proposições

Da mesma forma que podemos definir funções
nós podemos definir proposições.
Uma proposição é uma função que retorna **V** ou **F**.
Seja $P(y) = (\forall x \in [7,9].\, y \leq f(x))$,
onde esta função f é a do slide 8.

Note que:

$$\begin{array}{rcl} P(y) & = & (\forall x \in [7,9].\, y \leq f(x)) \\ P(0) & = & (\forall x \in [7,9].\, 0 \leq f(x)) \\ P(1) & = & (\forall x \in [7,9].\, 1 \leq f(x)) \\ P(2) & = & (\forall x \in [7,9].\, 2 \leq f(x)) \end{array}$$

É bem difícil trabalhar com expressões como '$\forall x \in A.\, \ldots$'
e '$\exists x \in A.\, \ldots$' quando o conjunto A é infinito.
Nos próximos exercícios nós camos ver como visualizar
proposições como as $P(0)$, $P(1)$ e $P(2)$ acima.

“Para todo” (∀) e “existe” (∃)

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \land (3^2 < 10) \land (4^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \land (9 < 10) \land (16 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{F}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \lor (3^2 < 10) \lor (4^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \lor (9 < 10) \lor (16 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \lor \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{V}
\end{array}
$$

Visualizando '∀'s e '∃'s

Repare...

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \le x) & = & \mathbf{F}\land\mathbf{V}\land\mathbf{V}\land\mathbf{V}\land\mathbf{V}\land\mathbf{V}\land\mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \quad x < 4) & = & \mathbf{V}\land\mathbf{V}\land\mathbf{V}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \le x < 4) & = & \mathbf{F}\land\mathbf{V}\land\mathbf{V}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad x = 6) & = & \mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{V}\land\mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \le x < 4 \lor x = 6) & = & \mathbf{F}\land\mathbf{V}\land\mathbf{V}\land\mathbf{F}\land\mathbf{F}\land\mathbf{V}\land\mathbf{F}
\end{array}$$

...que dá pra *visualizar* o que a expressão
$(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \le x < 4 \lor x = 6)$
"quer dizer" visualizando os '**V**'s e '**F**'s
de expressões mais simples, e combinando
esses "mapas" de '**V**'s e '**F**'s.

Visualizando '∀'s e '∃'s (2)

Às vezes vai valer a pena definir proposições como nomes mais curtos, como $F(x) = (2 \leq x)$, $G(x) = (x \leq 4)$, $H(x) = (x = 6)$... Aí:

$$\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad\qquad G(x)) & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad\qquad\qquad\qquad H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F}
\end{array}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como $(\forall x \in A.\underline{\qquad})$ e $(\exists x \in A.\underline{\qquad})$ e descobrir quais são verdadeiras e quais não — mesmo quando o conjunto A é um conjunto infinito, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $[2, 10]$.

Visualizando '$\forall$'s e '$\exists$'s (3)

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos '**V**'s e '**F**'s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os '**V**'s e '**F**'s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Por exemplo, se $\bullet := \mathbf{V}$ e $\circ := \mathbf{F}$ então:

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\quad G(x)) & = & \bullet \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad\qquad\quad H(x)) & = & \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ
\end{array}$$

Você pode fazer as suas próprias definições — como o meu "$\bullet := \mathbf{V}$ e $\circ := \mathbf{F}$" acima — mas elas têm que ficar claras o suficiente... lembre da dica 7:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=3

Introdução ao exercício 4

O exercício 4 dos próximos slides é uma versão bem reorganizada de um exercício grande do semestre passado. Eu mantive os nomes dos itens dele, e como os itens (a)–(e) são muito mais difíceis que os itens (f)–(n) nós vamos ver os itens (f)–(n) primeiro e os itens (a)–(e) depois.

Tem bastante material sobre este exercício neste PDF:

"Comentários sobre o exercício 4"

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2-4.pdf`

Exercício 4.

Sejam f a função do slide 8, e sejam:

$$\begin{array}{rcl} G(x,y) &=& (y \leq f(x)) \\ Q(y) &=& (\forall x \in \{7,8,9\}.\, y \leq f(x)) \\ &=& (\forall x \in \{7,8,9\}.\, G(x,y)) \end{array}$$

f) Calcule $G(7,2)$, $G(8,2)$, $G(9,2)$.
g) Calcule $G(7,1)$, $G(8,1)$, $G(9,1)$.
h) Use as idéias dos quatro slides anteriores a este para representar o que você obteve nos itens (f) e (g) como bolinhas pretas e brancas nos pontos $(7,2)$, $(8,2)$, $(9,2)$, $(7,1)$, $(8,1)$ e $(9,1)$ do plano xy.

i) $Q(2)$ corresponde ao '$\land$' de quais três bolinhas? Faça um círculo (amassado) em torno delas e mande foto pro grupo.
j) $Q(1)$ corresponde ao '$\land$' de quais três bolinhas? Faça um círculo (amassado) em torno delas e mande foto pro grupo.

Expanda e calcule/simplificar cada uma das expressões
abaixo até onde der:

k) $Q(y)$
l) $Q(0)$
m) $Q(4)$
n) $Q(1.5)$

Repare que aqui estamos usando o conjunto $\{7,8,9\}$, que é finito... nos itens a, b, c, d vamos usar $[7,9]$, que é infinito.

Dica:

$$Q(y) \;=\; (\forall x \in \{7,8,9\}.\, y \leq f(x))$$

$$\begin{array}{rcl} Q(y) &=& (y \leq f(x))[x := 7] \\ &\land& (y \leq f(x))[x := 8] \\ &\land& (y \leq f(x))[x := 9] \\ &=& (y \leq f(7)) \land (y \leq f(8)) \land (y \leq f(9)) \\ &=& (y \leq 2) \land (y \leq 1) \land (y \leq 2) \end{array}$$

Exercício 4 (cont.)

Seja $P(y) = (\forall x \in [7,9].\, y \leq f(x))$,
onde esta função f é a do slide 8.

Para cada uma das proposições abaixo
mostre como visualizar o que ela quer dizer
e diga se ela é verdadeira ou falsa.

a) $P(0.5)$
b) $P(0.99)$
c) $P(1)$
d) $P(1.01)$
e) $P(2)$

Tudo a partir daqui vai ser reescrito.

Exercício 5 (antigo).
(Dica: faça os exercícios 6, 7 e 8, que são novos, antes deste!)

Calcule os dois conjuntos abaixo:
a) $L = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, y \leq f(x) \,\}$
b) $U = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7,9].\, f(x) \leq y \,\}$
e:
c) Represente o conjunto L no eixo y.
d) Represente o conjunto U no eixo y.
e) Represente o conjunto L usando notação de intervalos — algo como: "$L = [42,99) \cup \{200\} \cup (420,+\infty)$".
f) Represente o conjunto U usando notação de intervalos.

Exercício 6.
Sejam $B \subset \mathbb{R}$, f a função do slide 8, e:

$$\begin{array}{rcl}
C & = & \{\, (b, f(b)) \mid b \in B \,\}, \\
D & = & \{\, f(b) \mid b \in B \,\}, \\
D' & = & \{\, d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d \,\}, \\
L & = & \{\, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d \,\}, \\
U & = & \{\, u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u \,\}, \\
(\beta \text{ é o inf de } D) & = & (\beta \in L \text{ e } \forall \alpha \in L. \alpha \leq \beta), \\
(\gamma \text{ é o sup de } D) & = & (\gamma \in U \text{ e } \forall \delta \in U. \gamma \leq \delta).
\end{array}$$

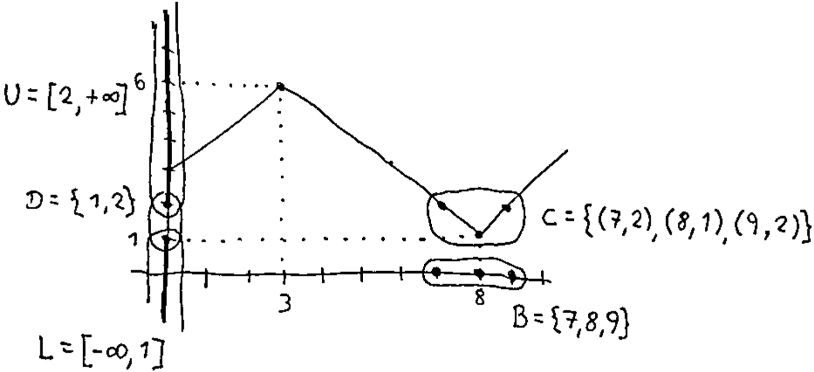
Use o truque de "tipar as subexpressões" do exercício 3 pra tipar cada uma das subexpressões das 7 definições acima. Dica: você pode chamar $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de "$\mathbb{R}$ estendido" e os eixos x e y com os pontos $-\infty$ e $+\infty$ acrescentados de "eixo x estendido" e "eixo y estendido".

Improvise e discuta com os seus colegas!!!

Exercício 7.
Sejam $B = \{7, 8, 9\}$, f a função do slide 8, e:

$$\begin{array}{rcl}
C & = & \{\, (b, f(b)) \mid b \in B \,\}, \\
D & = & \{\, f(b) \mid b \in B \,\}, \\
D' & = & \{\, d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d \,\}, \\
L & = & \{\, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d \,\}, \\
U & = & \{\, u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u \,\}, \\
(\beta \text{ é o inf de } D) & = & (\beta \in L \text{ e } \forall \alpha \in L. \alpha \leq \beta), \\
(\gamma \text{ é o sup de } D) & = & (\gamma \in U \text{ e } \forall \delta \in U. \gamma \leq \delta).
\end{array}$$

a) Calcule C, D, L e U e represente-os graficamente.
b) A expressão 'β é o inf de D' é verdade para $\beta = 2$?
c) A expressão 'β é o inf de D' é verdade para $\beta = 1$?
d) A expressão 'β é o inf de D' é verdade para $\beta = 0$?


U = [2, +∞]
6
D = {1,2}
1
L = [-∞, 1]
3
8
C = {(7,2), (8,1), (9,2)}
B = {7,8,9}

Dois jeitos de definir imagens de conjuntos
Fazendo $B = \{7, 8, 9\}$ nas definições
do slide anterior obtemos:

$$\begin{array}{rcl} D & = & \{\, f(b) \mid b \in \{7,8,9\} \,\} \\ & = & \{f(7), f(8), f(9)\} \\ & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid y = f(7) \vee y = f(8) \vee y = f(9) \,\} \\ & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \{7,8,9\}. y = f(x) \,\} \\ & = & \{\, d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in \{7,8,9\}. d = f(b) \,\} \\ & = & D' \end{array}$$

Isto vai valer para qualquer conjunto B, mesmo infinito.

Aplicação: digamos que duas pessoas estão tentando fazer o exercício 2b, e uma obteve $F([2,4)) = [5,6]$ e a outra obteve $F([2,4)) = (5,6]$. Podemos testar se $5 \in \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [2,4). f(x) = y \,\} = F([2,4))$...

Sups e infs em português

Dá pra definir sups e infs em português se a gente usar dois truques:
1) "$\mathbb{R}$ estendido" vai ser $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,
2) "acima" e "abaixo" vão significar (temporariamente!) '$\geq$' e '$\leq$'.

Imagine que a e b são pontos do eixo y.
"a está acima de b" vai querer dizer '$a \geq b$'.
"a está estritamente acima de b" vai querer dizer '$a > b$'.
Repare que cada ponto de $\mathbb{R}$ estendido está "acima" de si mesmo.

Idem pra "abaixo" e "estritamente abaixo".

O sup de um conjunto D vai ser o ponto mais baixo dentre todos os pontos que estão acima de todos os pontos de D.

O inf de um conjunto D vai ser o ponto mais alto dentre todos os pontos que estão abaixo de todos os pontos de D.

Exercício 8.

Traduza para a linguagem do exercício 7:

a) o ponto P está acima de todos os pontos de D
b) o ponto Q está acima de todos os pontos de D
c) o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}$ estendido que estão acima de todos os pontos de D
d) o conjunto de todos os pontos de $\mathbb{R}$ estendido que estão abaixo de todos os pontos de D
e) o ponto mais baixo dentre todos os pontos de $\mathbb{R}$ estendido que estão acima de todos os pontos de D
f) o ponto mais alto dentre todos os pontos de $\mathbb{R}$ estendido que estão abaixo de todos os pontos de D

Exercício 9.
Digamos que:

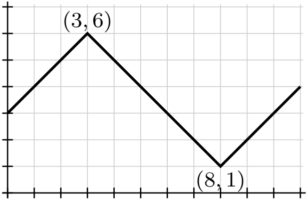
$$
\begin{array}{rcl}
C &=& \{\,(b, f(b)) \mid b \in B\,\}, \\
D &=& \{\,f(b) \mid b \in B\,\}, \\
D' &=& \{\,d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d\,\}, \\
L &=& \{\,\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d\,\}, \\
U &=& \{\,u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u\,\}, \\
(\beta \text{ é o inf de } D) &=& (\beta \in L \text{ e } \forall \alpha \in L. \alpha \leq \beta), \\
(\gamma \text{ é o sup de } D) &=& (\gamma \in U \text{ e } \forall \delta \in U. \gamma \leq \delta).
\end{array}
$$

Dá pra calcular L, U, e o inf e o sup de D só a partir do D... então vamos ignorar os conjuntos B e C neste exercício.

a) Seja $D = (2,3) \cup (4,5)$. Calcule L, U, $\inf D$, $\sup D$.
b) Seja $D = [2,3] \cup [4,5]$. Calcule L, U, $\inf D$, $\sup D$.
c) Seja $D = \mathbb{R}$. Calcule L, U, $\inf D$, $\sup D$.
d) Seja $D = \emptyset$. Calcule L, U, $\inf D$, $\sup D$.

Exercício 10.

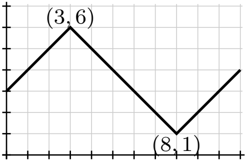
Lembre que:

$f(x) =$ 

a) Calcule $\sup(F([2,4]))$.
b) Calcule $\inf(F([2,4]))$.
c) Calcule $\sup(F([4,7]))$.
d) Calcule $\inf(F([4,7]))$.
e) Calcule $\sup(F([7,9]))$.
f) Calcule $\inf(F([7,9]))$.

Exercício 11.

Lembre que:

$f(x) =$ 

Digamos que $P = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$.
Representar graficamente num gráfico só:

a) $\sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)$,
b) a curva $y = f(x)$,
c) $\sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)$.

e verifique que você obteve algo bem parecido com a figura do slide 2.

Métodos de integração: nomes

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\min] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\max] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\inf] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\sup] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}
$$

Cada uma dessas fórmulas é um “método de integração”. Todos esses “métodos” aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os intervalos têm o mesmo comprimento.

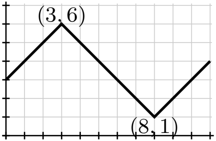
Métodos de integração: nomes (2)

Todas as fórmulas do slide anterior supõem que estamos num contexto em que a partição P está definida.
Se usamos elas com uma partição em subscrito, como em $[\mathrm{L}]_{\{4,5,7\}}$, isso vai querer dizer que a partição P vai ser indicada no subscrito.
Por exemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}]_{\{4,5,7\}} & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
& = & f(a_1)(b_1 - a_1) \\
& + & f(a_2)(b_2 - a_2) \\
& = & f(4)(5-4) \\
& + & f(5)(7-5,)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}]_{\{6,7,8,9\}} & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
& = & f(a_1)(b_1 - a_1) \\
& + & f(a_2)(b_2 - a_2) \\
& + & f(a_3)(b_3 - a_2) \\
& = & f(6)(7-6) \\
& + & f(7)(8-7) \\
& + & f(8)(9-8).
\end{array}
$$

Exercício 12.

Lembre que:

$f(x) =$ 

Em cada um dos itens abaixo represente graficamente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os dois somatórios pedidos.

a) $[\text{sup}]_{\{1,10\}}$, $[\text{inf}]_{\{1,10\}}$

b) $[\text{sup}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$, $[\text{inf}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$

c) $[\text{sup}]_{\{1,2,4,5,6,7,9,10\}}$, $[\text{inf}]_{\{1,2,4,5,6,7,9,10\}}$

d) $[\text{max}]_{\{1,10\}}$, $[\text{min}]_{\{1,10\}}$

e) $[\text{max}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$, $[\text{min}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$

Nossas partições preferidas

Agora eu vou definir uma notação pra partição que divide um intervalo em N subintervalos iguais:

$$[a,b]_N = \{a,\ a+\tfrac{b-a}{N},\ a+2\tfrac{b-a}{N},\ \ldots,\ b\}$$

Exercício 13.

Calcule:

a) $[4,6]_1$

b) $[4,6]_{2^3}$

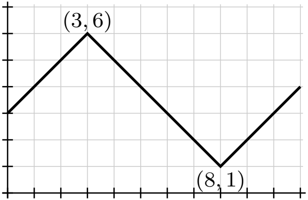
Dicas: $2^3=8$, e releia isto aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=16

Obs: mais tarde no curso você vai (ter que!) aprender a fazer as suas próprias definições...

Exercício 14.

Lembre que:

$f(x) =$ 

Em cada um dos itens abaixo represente graficamente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os dois somatórios pedidos.

a) $[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^0}}$, $[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^0}}$

b) $[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^1}}$, $[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^1}}$

c) $[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^2}}$, $[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^2}}$

d) $[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^3}}$, $[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^3}}$

Aproximações por cima

Mais duas definições:

A melhor aproximação por cima para a integral de f na partição P é:

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = [\sup]_P,$$

O limite das aproximações por cima pra integral de f no intervalo $[a, b]$ é:

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\sup]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por cima de f no intervalo $[a, b]$".

Aproximações por baixo
Mais duas definições:
A melhor aproximação por baixo para a integral de f na partição P é:

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx = [\inf]_P,$$

O limite das aproximações por baixo pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\inf]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por baixo de f no intervalo $[a,b]$".

A definição de integral

A nossa definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ vai ser:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;\overset{\Downarrow}{=}\; \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

se a igualdade marcada com '$\overset{\Downarrow}{=}$' for verdade.

Se a igualdade '$\overset{\Downarrow}{=}$' for falsa vamos dizer que:
"$f(x)$ não é integrável no intervalo $[a,b]$",
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não está definida", ou
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ dá erro".

(Compare com $\frac{42}{0}$, que também "não está definido", ou "dá erro"...)

Como esses limites funcionam?
Em Cálculo 1 você viu que algumas funções não são deriváveis. Agora nós vamos ver que algumas funções não são integráveis. O melhor modo de visualizar isso é usando estas definições:

$$\begin{aligned}
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &= \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Exercício 15.
a) Verifique que no exercício 14 você desenhou $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^0}} f(x)\,dx$, $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx$, $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx$, e $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx$.

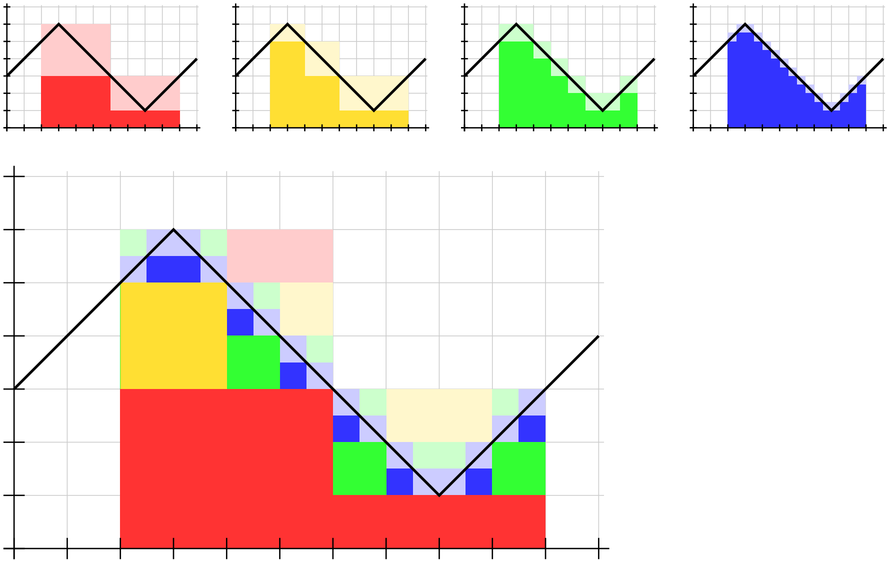
b) Calcule a área dessas quatro diferenças. Veja o vídeo!

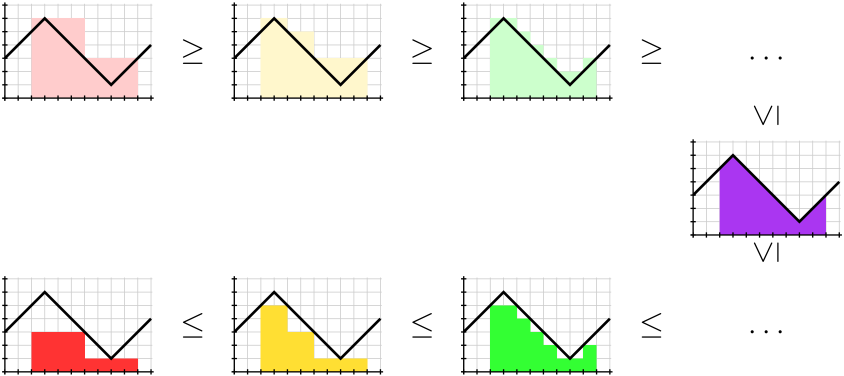
Exercício 16.
Identifique nas figuras dos próximos dois slides:

$$\overline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x)\,dx,$$
$$\underline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x)\,dx,$$
$$\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^4}} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x=2}^{x=10} f(x)\,dx.$$

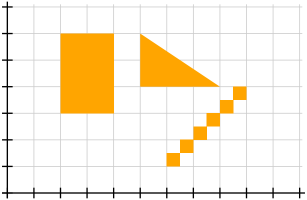
Dica: os "$\overline{\underline{\int}}_P \ldots dx$"s são feitos de "retângulos flutuando no ar", não de retângulos cujas bases estão em $y = 0$.





Exercício 17: áreas no olhômetro
A partir daqui eu vou supor que todo mundo sabe calcular determinadas áreas "no olho" — contando quadradinhos, fazendo "base · altura" (pra retângulos), ou fazendo "(base · altura)/2" (pra triângulos)...

Tente calcular a área da figura abaixo de cabeça.



Se você não conseguir PEÇA AJUDA E DICAS NO CANAL DO TELEGRAM URGENTE!!!!!!!!!!!!!!!

Funções "claramente integráveis"

Lembre que uma função $f(x)$ é integrável entre $x = a$ e $x = b$ se e só se:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \right) = 0$$

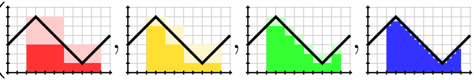
Seja $d_k = \left(\overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \right)$; o '$d$' é de "diferença".

Cada d_k pode ser interpretado de dois jeitos: como uma figura feita de 2^k retângulos "flutuando no ar", ou como a área total desses retângulos.

Funções "claramente integráveis" (2)

As primeiras 4 figuras do exercício 16 contêm representações gráficas de d_1, d_2, d_3, d_4 — são as áreas numa cor mais clara — e se explicarmos claramente pro leitor que é pra interpretar cada uma daquelas figuras como a área da parte mais clara delas nós podemos dizer que:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots) = \Bigg($$



$$, \ldots \Bigg)$$

$$= (20, 14, 8, 4, \ldots)$$

E se o nosso leitor tiver prática suficiente ele vai conseguir visualizar sozinho o que são $d_5, d_6, \ldots$ e ele vai conseguir ver que $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$.

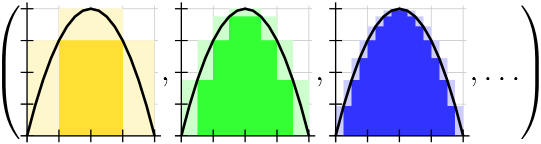
Funções "claramente integráveis" (3)
Alguns livros têm demonstrações completas de que toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é integrável — mesmo funções contínuas bem esquisitas, como essa aqui:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function`

Essa demonstração é bem difícil — mesmo o Pierluigi Beneveri não faz ela inteira nas notas de aula dele...
A demonstração usa *continuidade uniforme*:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_continuity`

...e a gente só entende as contas cheias de desigualdades que aparecem na demonstração se a gente conseguir visualizar o que cada somatório e cada desigualdade dela "quer dizer"... então vamos nos concentrar nas visualizações, deixem as contas horríveis pra depois.

Funções "claramente integráveis" (4)
A nossa função preferida láááá do início do curso — que era $f(x) = 4 - (x-2)^2$ — é "claramente integrável"...
Olhe pras figuras abaixo e convença-se de que $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$:

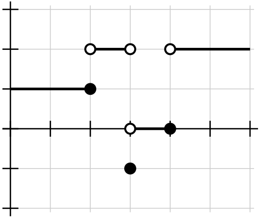
$(d_2, d_3, d_4, \ldots) \quad = \quad$



Truque: escolha um d_k. Todos os retângulos dele têm a mesma largura; chame-a de w. A altura de cada retângulo é no máximo $4w$ — porque $\forall x \in [0,4].|f'(x)| \leq 4$.

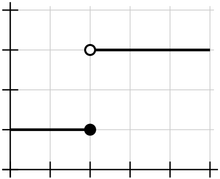
Funções escada

Uma *função escada* é uma função definida por casos que é constante em cada um dos casos, e em que todos os casos são da forma "⟨*constante*⟩ quando $x \in$ ⟨*intervalo*⟩". Por exemplo,

$f(x) =$  $= \begin{cases} 1 & \text{quando } x \in (-\infty, 2], \\ 2 & \text{quando } x \in (2, 3), \\ -1 & \text{quando } x \in [3, 3], \\ 0 & \text{quando } x \in (3, 4], \\ 2 & \text{quando } x \in (4, +\infty) \end{cases}$

Note que também poderíamos ter escrito
$x \leq 2$ ao invés de $x \in (-\infty, 2]$,
$x = 3$ ao invés de $x \in [3, 3]$, etc...
Ah, e o número de casos tem que ser *finito*.

Exercício 18.
Toda função escada é integrável.
Neste exercício você vai verificar os detalhes disto
só pra esta função escada bem simples:

$f(x) =$  $= \begin{cases} 1 & \text{quando } x \leq 1, \\ 3 & \text{quando } 1 < x \end{cases}$

Seja $d_k = \overline{\underline{\int}}_{[1,4]_{2^k}} f(x)\,dx$.
a) Represente graficamente d_k para $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
b) Cada um destes 'd_k's tem exatamente um retângulo com altura diferente de 0. Diga a largura e a altura dele.
c) Calcule d_{10} (como um número).

A função de Dirichlet

A *função de Dirichlet* é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ela não tem um nome oficial, então
vamos chamá-la de 'f' nos próximos slides.

O gráfico dela alterna freneticamente entre $y = 0$ e $y = 1$.

Lembre que:
os números racionais são os cuja expansão decimal é "periódica", e os irracionais são os que não são assim;
entre cada dois racionais diferentes há um irracional, e
entre cada dois irracionais diferentes há um racional...

A função de Dirichlet (2)

Lembre que podemos obter um irracional entre, digamos, $a = \frac{10}{7} = 1.428571\underline{42857}$ e $b = \frac{1285715}{900000} = 1.428572\underline{2}$, modificando a expansão decimal de um dele e trocando-a pela expansão decimal de $\sqrt{2}$ a partir de um certo ponto... Por exemplo:

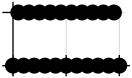
$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2} & = & 1.41421356237... \\ b & = & 1.42857\underline{22222}2... \\ c & = & 1.42857156237... \\ a & = & 1.42857\underline{142857}... \end{array}$$

Neste caso temos $a < c < b$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dá pra fazer algo parecido pra obter um racional entre dois irracionais.

A função de Dirichlet (3)

Dá pra desenhar o gráfico da função de Dirichlet assim:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} \quad =$$



Repare que isso só funciona porque o desenho é claramente ambíguo... um leitor "normal" não consegue descobrir no olho quais são as coordenadas da bolinhas em $y = 1$ e em $y = 0$, então ele é obrigado a olhar pra definição formal da $f(x)$...

e aí quando ele entende a definição formal da $f(x)$ ele descobre que o desenho quer dizer "muitas bolinhas em $y = 1$, muito próximas umas das outras, e muitas bolinhas em $y = 0$ muito próximas das outras"...

...e ele entende que esse "muitas" quer dizer "infinitas".

Exercício 19.
A função de Dirichlet é um dos exemplos mais simples de uma função que não é integrável.

Sejam $f(x)$ a função de Dirichlet,
e $d_k = \underline{\overline{\int}}_{[0,1]_{2^k}} f(x)\,dx$.

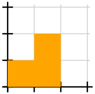
a) Represente graficamente d_0, d_1, d_2, d_3.
b) Calcule no olhômetro o limite $\lim_{k\to\infty} d_k$.
(Dica: esse limite não dá zero...)

c) Represente graficamente $[\max]_{[0,1]_{2^2}}$ e $[\min]_{[0,1]_{2^2}}$.
(Dica: o método do máximo "não enxerga" os pontos com $y = 1$...)

Propriedades da integral: trailer

No próximo PDF nós vamos começar a ver as propriedades da integral — ou, mais precisamente, as propriedades da operação $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ que nós definimos como um limite complicado. Nós vamos ver 1) que ela realmente calcula áreas, 2) que em certas situações "integrar" e "derivar" são operações inversas uma da outra, 3) que em certas situações podemos usar "antiderivadas" pra calcular integrais bem rápido.

No semestre passado metade dos alunos não entenderam nada disso, e numa questão em que eu pedia pra eles calcularem a área dessa figura aqui de dois jeitos diferentes eles concluiram que a área dessa figura era 4...



Não seja como eles.

Cálculo 2 - 2021.2

Comentários sobre o exercício 4 do
"Integrais como somas de retângulos (2)"

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Links:

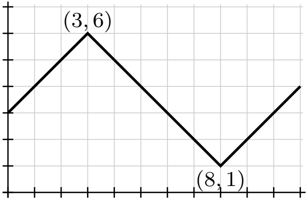
Convenção sobre como representar booleanos:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=17

Exercício 4 do “somas 2”:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=18

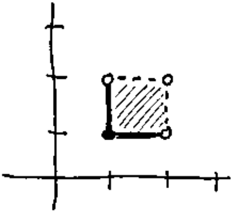
Lembre que:

$f(x) =$  $= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$

$$P(y) = (\forall x \in [7,9].\, y \leq f(x))...$$

O exercício 4a pedia pra calcularmos $P(0.5)$,
mas aqui vamos discutir como calcular $P(1.5)$ —
porque no $P(1.5)$ as figuras são mais legais.

Vou supor que todo mundo sabe representar graficamente subconjuntos do plano. Por exemplo:

$$\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2) \text{ e } y \in [1, 2) \,\} =$$ 

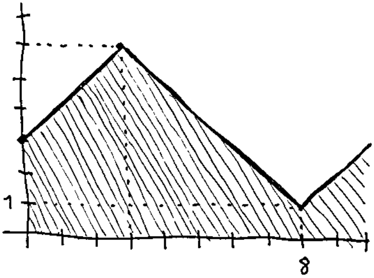
Exercício 1.

a) Seja $G(x,y) = (y \leq f(x))$. Represente graficamente o valor (booleano!) de $G(x,y)$ nos pontos do plano com $x \in 7, 8, 9$ e $y \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, usando a convenção de que '$\bullet$' quer dizer "verdadeiro" e '$\circ$' quer dizer falso.

b) Represente graficamente este conjunto:

$$\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x,y) \,\}$$

O modo mais rápido e mais fácil de entender de resolver o exercício 4a é visual. Os pares (x, y) que obedecem $y \leq f(x)$ são exatamente os pontos deste conjunto:



E $P(1.5)$, ou seja, $(\forall x \in [7, 9].\, 1.5 \leq f(x))$, é verdadeiro se e só se todos os pontos do conjunto $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1.5, 7 \leq x \leq 9 \,\}$ estão no conjunto dos "pares que obedecem $y \leq f(x)$".

Um outro modo — equivalente ao anterior — de calcular $P(1.5)$ é pegar todos os pontos de $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=1.5, 7\le x\le 9\,\}$, e desenhar sobre cada um deles um '$\bullet$' quando $G(x,y)$ for verdadeiro naquele ponto e um '$\circ$' quando $G(x,y)$ for falso.

A expressão

$$(\forall x\in[7,9].\, 1.5\le f(x))$$

vai ser verdadeira se e só se todas as (infinitas) bolinhas que desenhamos forem pretas.

Como é difícil calcular um número infinito de expressões e desenhar um infinito de bolinhas a gente faz só alguns casos e tenta reconhecer o padrão.

Exercício 2.
Seja f a função do slide 3, e:

$$\begin{array}{rcl} G(x,y) & = & (y \leq f(x)), \\ P(y) & = & (\forall x \in [7,9].y \leq f(x)) \\ & = & (\forall x \in [7,9].G(x,y)). \end{array}$$

Desenhe num gráfico só:
a) o conjunto $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x,y)\,\}$,

b) as (infinitas!) bolinhas brancas e pretas que correspondem a $P(1.5)$, e faça um círculo amassado em torno delas,

c) as (infinitas!) bolinhas brancas e pretas que correspondem a $P(0.5)$, e faça um círculo amassado em torno delas,

Exercício 2 (cont.)

d) Escreva do lado do seu gráfico algo como “$P(1.5)$ é falso porque algumas dessas bolinhas são brancas” e faça uma seta indo desse texto pro círculo amassado certo.

e) Escreva do lado do seu gráfico algo como “$P(0.5)$ é verdadeiro porque todas essas bolinhas são pretas” e faça uma seta indo desse texto pro círculo amassado certo.

O desenho que você acabou de fazer serve pra mostrar porque é que $P(1.5)$ é falso e $P(0.5)$ é verdadeiro.
Um leitor que tente entender esse desenho provavelmente vai aprender muitas coisas – úteis, e fáceis de generalizar – sem muito sofrimento.

No resto destes slides eu vou tentar explicar porque é que o desenho que você fez no Exercício 2 é um modo de mostrar que $P(1.5)$ é falso e $P(0.5)$ é verdadeiro MUITO melhor do que uma prova “textual” só por contas e texto em português.

Parte 2:
Contextos

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Releia a dica 7:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1-dicas.pdf#page=7
Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...

...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer “ok, jóia, tá certo!”.

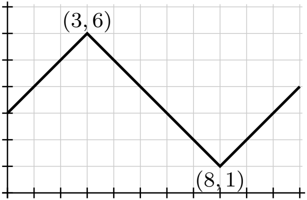
O “colega que seja menos seu amigo” vai fazer menos tentativas, e os personagens “o monitor” e “o professor” da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um “colega que seja menos seu amigo” te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa.
A solução dele começa com:

$$\text{Sabemos que } 2 = 3. \text{ Então...}$$

O que você faria?

No slide 3 nós definimos:

$f(x) =$ 

$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$

$$P(y) = (\forall x \in [7,9].\, y \leq f(x))$$

Vou acrescentar mais uma definição:

$$Q(y) = (\forall x \in \{7,8,9\}.\, y \leq f(x))$$

Qualquer pessoa que já tenha pensado muito sobre esse problema sabe que $P(y)$ e $Q(y)$ são "equivalentes"...

...“equivalentes” no sentido de que $P(y)$ é verdade num certo valor de y se e só se $Q(y)$ é verdade naquele mesmo y.
Isto pode ser escrito em linguagem matemática deste jeito:

$$\forall y \in \mathbb{R}.(P(y) \leftrightarrow Q(y))$$

Dá pra demonstrar que ‘$\forall y \in \mathbb{R}.(P(y) \leftrightarrow Q(y))$’ é verdade pra função f que estamos usando. A demonstração formal disso é difícil, e se você está interessado em aprender como fazer ela você pode entrar num grupo de Telegram que eu vou criar pra gente discutir isso mas no qual eu só vou deixar entrar quem já aprendeu sups e infs.

Se na sua demonstração você disser –
explicitamente ou implicitamente –
que é óbvio que isto aqui

$$\forall y \in \mathbb{R}.(P(y) \leftrightarrow Q(y))$$

é verdade quase qualquer pessoa vai parar de ler
nesse ponto, e vai dizer:

NÃO É ÓBVIO NÃO!!!

E ela vai ter razão.

Como se virar sem demonstrações formais?
Se você reler os exercícios que eu passei você vai ver que quase todos começam com "calcule" ou com "represente graficamente"; uns poucos deles dizem "expanda" ou "calcule passo a passo".

Nos exercícios de "calcule" basta você conseguir chegar ao resultado certo por um raciocínio que faça sentido pra você. Se você puder discutir com colegas, explicar o seu raciocínio pra eles e chegar a uma explicação que faça sentido pro "colega que seja seu amigo" da Dica 7, ótimo. Não é necessário chegar a uma demonstração que faça sentido pra alguém que vá ser super rigoroso e que vá parar assim que encontrar o primeiro erro.

Como se virar sem demonstrações formais? (2)
Dá pra gente apresentar argumentos informais pra pessoas rigorosíssimas de um jeito que elas aceitem, sim – DESDE QUE A GENTE MARQUE CLARAMENTE AS PARTES QUE NÃO ESTÃO TOTALMENTE FORMAIS.

Por exemplo, se você escrever algo como "Rascunho", "Esboço", ou "Não sei escrever isso aqui direito!!!" em cima destas contas,

$$\begin{array}{l} P(0.5) \\ f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V} \\ f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V} \\ f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V} \\ P(0.5) \quad \mathbf{V} \end{array}$$

o leitor não vai achar que tem erros (graves) aí.

Como se virar sem demonstrações formais? (3)

E se você mostrar essas contas

$$\begin{array}{l}
P(0.5) \\
f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V} \\
f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V} \\
f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V} \\
P(0.5) \quad \mathbf{V}
\end{array}$$

no tal grupo do Telegram que é só pra quem já aprendeu sups e infs e perguntar algo como: "gente, vocês conseguem entender isso aqui? Como a gente escreve isso de um jeito formal?" aí as pessoas vão discutir como escrever os contextos que faltam, como reescrever o espaço antes de cada '**V**' de um jeito que todo mundo entenda, etc...

Como se virar sem demonstrações formais? (4)

Repare que a pergunta “isso aqui tá certo?”

$$\begin{array}{l}
P(0.5) \\
f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V} \\
f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V} \\
f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V} \\
P(0.5) \quad \mathbf{V}
\end{array}$$

é totalmente diferente da pergunta:

“gente, vocês conseguem entender isso aqui?
Como a gente escreve isso de um jeito formal?”

...e eu considero que a gente não deve discutir a segunda pergunta nos grupos “normais” das duas turmas enquanto ainda tem muita gente que ainda não aprendeu a visualizar sups, infs, e a definição de integral.

Parte 3:
Abusos de linguagem e overloading

Abusos de linguagem
Tem expressões que se a gente usar entre aspas quase todo mundo vai entender... por exemplo:

> Para todo ponto (x, y) no "intervalo fechado" indo do ponto $(7, 1)$ ao ponto $(9, 1)$ a proposição $G(x, y)$ é verdadeira.

Um dos tipos mais comuns de abuso de linguagem é o overloading — mas sem uma definição explícita de como a operação funciona no tipo novo.
Um exemplo (famoso) de overloading:

$$2 + 3 = 5 \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 320 \end{pmatrix}$$

Exemplo de overloading: imagens de conjuntos
Lembre que a partir de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qualquer nós definimos uma função F que recebe subconjuntos de $\mathbb{R}$ e retorna subconjuntos de $\mathbb{R}$...

$$F(\{7,8,9\}) = \{f(7), f(8), f(9)\} = \{2,1,2\}$$

Alguns livros usam a mesma notação pra f e F:

$$f(\{7,8,9\}) = \{f(7), f(8), f(9)\} = \{2,1,2\}$$

e aí pra decidir qual é o significado de f
a gente precisa descobrir o tipo do argumento
dela – se é número ou conjunto de números.

Exemplo de overloading: imagens de conjuntos (2)

Estes livros estendem o significado original da f assim:

$$\text{Se } A \subset \mathbb{R} \text{ então:}$$
$$\mathrm{f(A) = \{\, f(a) \mid a{\in}A\,\}}$$

Eu estou evitando esse tipo de overloading no curso porque acho que ele deixaria muitos alunos meio desesperados...
Só que várias pessoas tentaram inventar os seus próprios jeitos de fazer overloading... por exemplo:

$$\{2,3,4\} \le \{3,4,5\}$$

Isso é muito ambíguo – eu consigo pensar em vários jeitos de definir esse '$\le$' em conjuntos...

Exemplo de overloading ambíguo: '$\leq$' em conjuntos

Se usarmos esta definição pro '$\leq$' em conjuntos,

$$\begin{array}{l} \text{Se } A, B \subset \mathbb{R} \text{ então:} \\ (A \leq B) = (\forall a \in A. \forall b \in B. a \leq b) \end{array}$$

então temos $(\{2,3,4\} \leq \{3,4,5\}) = \mathbf{F}$.

Se usarmos esta definição pro '$\leq$' em conjuntos,

$$\begin{array}{l} \text{Se } A, B \subset \mathbb{R} \text{ então:} \\ (A \leq B) = (\forall a \in A. \exists b \in B. a \leq b) \end{array}$$

então temos $(\{2,3,4\} \leq \{3,4,5\}) = \mathbf{V}$.

Exemplo de overloading ambíguo: '$\leq$' em conjuntos (2)

...e se usarmos esta outra definição pro '$\leq$' em conjuntos,

$$\begin{array}{l} \text{Se } A, B \subset \mathbb{R} \text{ então:} \\ (A \leq B) = \{\, a \in A \mid \forall b \in B. a \leq b \,\} \end{array}$$

então temos $(\{2,3,4\} \leq \{3,4,5\}) = \{2,3\}$.

=(

"Eu amo overloading! E agora?"

Algumas pessoas:
1) adoram usar overloadings nas suas contas informais,
2) querem aprender a formalizar essas contas.
O que elas podem fazer?

Respostas:
a) Avisar que aquelas contas são informais
b) traduzir os overloadings pra algo formal – como:

$$\begin{array}{l} \{2,3,4\} \leq \{3,4,5\} \\ \rightsquigarrow \quad \forall a \in \{2,3,4\}. \forall b \in \{3,4,5\}. a \leq b \end{array}$$

c) aprender a definir overloadings formalmente.

Aparentemente o (c) é o mais legal de todos, né?...

“Eu amo overloading! E agora?” (2)

...só que pra

c) aprender a definir overloadings formalmente

você vai ter que aprender a testar as suas definições –
e pra isso você vai ter que aprender o (b):

b) traduzir os overloadings pra algo formal

e você vai ter que testar as suas traduções em um monte de casos. A gente só consegue aprender o (c) depois de já ter virado faixa-preta em usar o ‘$\forall$’, o ‘$\exists$’, o ‘$\{\ |\ \}$’, e em tipar e em calcular expressões, e em fazer definições mais simples e testar elas...

Então você vai ter que começar aprendendo o (a) e o (b).

=(

Parte 4:
Mais sobre bolinhas

Lembre que estamos tentando aprender a calcular expressões como estas visualmente, por bolinhas...

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4 & \forall x \in [1,3].x^2 > 4 \\
\exists x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4 & \exists x \in [1,3].x^2 > 4 \\
\{\, x \in \{1,2,3\} \mid x^2 > 4 \,\} & \{\, x \in [1,3] \mid x^2 > 4 \,\}
\end{array}$$

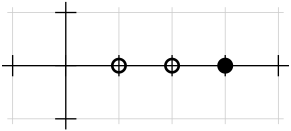
...porque não vai dar tempo de todo mundo aprender a calculá-las via demonstrações formais. Então todo mundo vai ter que aprender os métodos visuais primeiro, e quem conseguir aprendê-los pode vir discutir demonstrações formais num outro grupo do Telegram.

Lembre também que se você calcular coisas via bolinhas em cursos de outros professores eles podem não entender e podem ficar putos. Considere que o método das bolinhas é principalmente pra você aprender a calcular certas coisas de cabeça – ou em rascunhos no canto do papel.

Lembre que pra calcular estas expressões

$$\forall x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4$$
$$\exists x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4$$
$$\{\, x \in \{1,2,3\} \mid x^2 > 4 \,\}$$

nós podemos começar representando os resultados da expressão $x^2 > 4$ nos três valores de x que são “gerados” pelo $x \in \{1,2,3\}$...



Lembre que a gente viu “geradores” e “filtros” aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8

A expressão

$$\forall x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4$$

é verdadeira se e só se todas as bolinhas são pretas.
A expressão

$$\exists x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4$$

é verdadeira se e só se alguma bolinha é preta.
E o resultado de

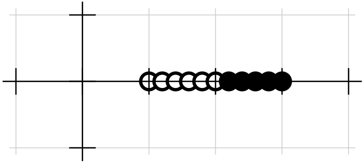
$$\{\, x \in \{1,2,3\} \mid x^2 > 4 \,\}$$

é o conjunto de todos os 'x'zes cujas bolinhas são pretas:

$$\{\, x \in \{1,2,3\} \mid x^2 > 4 \,\} = \{3\}.$$

E pra conjuntos infinitos?

Pra conjuntos infinitos — como o intervalo $[1, 3]$ — nós podemos fazer algo parecido, mas vamos ter que fazer um desenho que finja que tem infinitas bolinhas... por exemplo:



Se fizermos um desenho razoável um leitor com uma certa boa vontade vai conseguir entender que temos bolinhas brancas em $x \in [1, 2]$ e bolinhas pretas em $x \in (2, 3]$...

...e aí $\{\, x \in [1, 3] \mid x^2 > 4 \,\} = (2, 3]$. =)

E pra conjuntos vazios?
Você lembra porque a gente define que $2^0 = 1$?
É porque o 1 é o elemento neutro da multiplicação,
e aí a gente tem:

$$\begin{array}{rcllcl}
2^3 \cdot 2^2 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) & & = & 2^5 \\
2^4 \cdot 2^1 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2) & & = & 2^5 \\
2^5 \cdot 2^0 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2^0 & & & \\
 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 1 & & & \\
 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) & & = & 2^5
\end{array}$$

A gente vai ter algo assim
pro '$\forall$' e pro '$\exists$' também:
$(\forall x \in \emptyset . P(x)) = \mathbf{V}$ (porque $\mathbf{V}$ é o elemento neutro do $\land$)
$(\exists x \in \emptyset . P(x)) = \mathbf{F}$ (porque $\mathbf{F}$ é o elemento neutro do $\lor$)

E pra conjuntos vazios? (2)

Veja:

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{2,4\}.P(x)) \land (\forall x \in \{9,20\}.P(x)) & = & (P(2) \land P(4)) \land (P(9) \land P(20)) \\
(\forall x \in \{2,4,9\}.P(x)) \land (\forall x \in \{20\}.P(x)) & = & (P(2) \land P(4) \land P(9)) \land (P(20)) \\
(\forall x \in \{2,4,9,20\}.P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.P(x)) & = & (P(2) \land P(4) \land P(9) \land P(20)) \land \mathbf{V} \\
 & = & (P(2) \land P(4) \land P(9) \land P(20))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists x \in \{2,4\}.P(x)) \lor (\exists x \in \{9,20\}.P(x)) & = & (P(2) \lor P(4)) \lor (P(9) \lor P(20)) \\
(\exists x \in \{2,4,9\}.P(x)) \lor (\exists x \in \{20\}.P(x)) & = & (P(2) \lor P(4) \lor P(9)) \lor (P(20)) \\
(\exists x \in \{2,4,9,20\}.P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.P(x)) & = & (P(2) \lor P(4) \lor P(9) \lor P(20)) \lor \mathbf{F} \\
 & = & (P(2) \lor P(4) \lor P(9) \lor P(20))
\end{array}
$$

Cálculo 2 - 2021.2

Aula 17: infs e sups

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Introdução

Infs e sups são um dos assuntos secundários de Cálculo 2 que vão ser mais úteis para as matérias seguintes. Infs e sups vão aparecer *explicitamente* nas próximas matérias muito poucas vezes, mas pra aprender infs e sups a gente vai ter que aprender as quatro coisas absurdamente úteis abaixo. Vamos ter que:

- aprender um certa linguagem formal pra descrever conjuntos – chamada de "set comprehensions" em inglês. Vou adaptar o material daqui:

  `http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8`

- aprender a visualizar certas operações – usando "tipos" e os truques com bolinhas brancas e pretas que nós começamos a ver nas páginas 11 até 20 deste PDF daqui:

  `http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf`

- aprender a lidar com contas que à primeira vista exigiriam um número infinito de operações e portanto um número infinito de páginas. Lembre que Cálculo 2 não é Cálculo 1 – em Cálculo 1 a gente aprende a fazer contas que chegam direto na solução, mas Cálculo 2 é baseado em chutar e testar, e nesta parte da matéria nós vamos usar o "chutar e testar" pra reconhecer padrões... aí ao invés da gente fazer as contas pra infinitos casos um de cada vez a gente vai começar fazendo elas pra, digamos, 5 casos, e ver se com esses 5 casos a gente consegue entender visualmente o que as nossas contas "querem dizer".

- aprender a fazer argumentos informais, com desenhos e explicações em português, que todo mundo entenda. Releia este PDF aqui:

  `http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2-4.pdf`

Set comprehensions

Quando eu dava Geometria Analítica e as aulas eram presenciais eu começava o curso com uns exercícios de "set comprehensions" – os das páginas 8 a 12 deste PDF:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8

Eu dividia a turma em grupos de 5 pessoas e dizia: "tentem entender isso aqui a partir dos exemplos e das poucas explicações em português. Vocês *provavelmente* vão conseguir entender quase tudo só discutindo entre vocês, tentando fazer os exercícios – inclusive os que têm umas pegadinhas difíceis – e comparando os resultados de vocês com os dos colegas, mas qualquer coisa me chamem"... e eu ficava circulando pela sala ajudando os grupos. Isso funcionava super bem, e geralmente em uma aula só de duas horas quase todo mundo conseguia fazer os exercícios.

Set comprehensions (2)

Como 1) as turmas estão meio desanimadas, com pouca gente participando das discussões e 2) todo mundo já fez Prog 1, eu vou usar um método diferente. Eu vou complementar a parte de "set compreensions" do "Material para GA" mostrando como traduzir as notações dele pra um pseudocódigo bem parecido com `C`, e a gente vai seguir direto pros exercícios com mais cara de Cálculo 2 e de infs e sups.

Basicamente:

- cada "gerador" vira um `for`,
- cada "filtro" vira um `if`,
- a "expressão" que aparece depois do ponto e vírgula na notação $\{\ldots\ ;\ \ldots\}$ vira um `printf`,
- a tradução pra pseudo-`C` fica bem mais fácil se a gente primeiro traduzir as duas notações $\{\ldots\ |\ \ldots\}$ pra notação $\{\ldots\ ;\ \ldots\}$.

Set comprehensions: um exemplo de tradução

$$\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{gerador}},\ \underbrace{a \neq 3}_{\text{filtro}},\ \underbrace{b \in \{5,6,7\}}_{\text{gerador}}\ ;\ \underbrace{10a+b}_{\text{expressão}}\}$$

Vira:

```
for(a=1; a<=4; a++) {
  if (a!=3) {
    for(b=5; b<=7; b++) {
      printf("%d\n", 10*a + b);
    }
  }
}
```

Traduzindo '∀' e '∃'

Também dá pra gente traduzir pra pseudo-C expressões com '∀' e '∃'. Elas viram funções:

$\forall a \in A.P(a) \quad \rightsquigarrow$

```
for(a ∈ A) {
  if (¬P(a)) {
    return F;
  }
}
return V;
```

$\exists b \in B.Q(b) \quad \rightsquigarrow$

```
for(b ∈ B) {
  if (Q(b)) {
    return V;
  }
}
return F;
```

Nos próximos exercícios nós vamos tentar entender a sequência de definições abaixo como uma espécie de programa em que cada linha calcula o valor de uma variável nova a partir das variáveis anteriores...

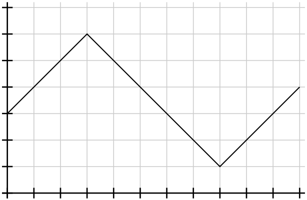
$$\begin{array}{rcl}
C & = & \{\,(b,f(b)) \mid b \in B\,\}, \\
D & = & \{\,f(b) \mid b \in B\,\}, \\
D' & = & \{\,d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d\,\}, \\
L & = & \{\,\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d\,\}, \\
U & = & \{\,u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u\,\},
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\mathbf{L}: & \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} & \to & \{\mathbf{V},\mathbf{F}\} \\
& y & \mapsto & (y \in L \text{ e } \forall \ell \in L. \ell \leq y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\mathbf{U}: & \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} & \to & \{\mathbf{V},\mathbf{F}\} \\
& y & \mapsto & (y \in U \text{ e } \forall u \in U. y \leq u)
\end{array}$$

Essa sequência de definições supõe que f e B são conhecidas, e que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.
Nós vamos começar com um monte de exercícios nos quais f é a função que estávamos usando no último PDF – esta aqui,

$f(x) \quad =$

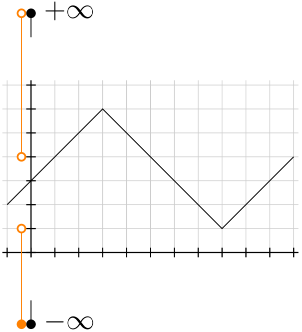


$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$$

e o conjunto B vai ser diferente em cada exercício.

Nós vamos usar algumas gambiarras pra representar subconjuntos de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ no eixo vertical... Vamos representar o $-\infty$ e o $+\infty$ muito mais perto do que onde eles deveriam estar e vamos desenhar alguns subconjuntos um pouco à esquerda do eixo y:

$[-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \quad =$



Exercício 1.

Sejam $B = \{7, 8, 9\}$, f a função do slide 8, e:

$$\begin{array}{rcl}
C & = & \{\,(b, f(b)) \mid b \in B\,\}, \\
D & = & \{\,f(b) \mid b \in B\,\}, \\
D' & = & \{\,d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d\,\}, \\
L & = & \{\,\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d\,\}, \\
U & = & \{\,u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u\,\},
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl}
\mathbf{L} & : & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} & \to & \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\
 & & y & \mapsto & (y \in L \text{ e } \forall \ell \in L. \ell \leq y)
\end{array}$$

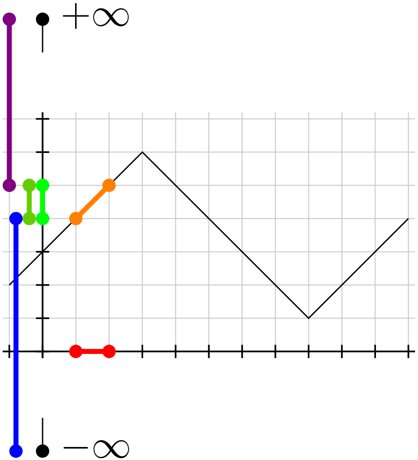
$$\begin{array}{rcrcl}
\mathbf{U} & : & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} & \to & \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\
 & & y & \mapsto & (y \in U \text{ e } \forall u \in U. y \leq u)
\end{array}$$

a) Calcule C, D, D', L e U e represente-os graficamente.
b) Calcule $\mathbf{L}(0), \mathbf{L}(1), \mathbf{L}(2), \mathbf{L}(3)$.
c) Calcule $\mathbf{U}(0), \mathbf{U}(1), \mathbf{U}(2), \mathbf{U}(3)$.
d) Represente graficamente $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ usando "infinitas" bolinhas pretas e brancas pra cada um.

Dica: preste atenção no que é minúsculo e maiúsculo e nas fontes... L, ℓ e $\mathbf{L}$ são coisas completamente diferentes. Use uma pronúncia diferente pra cada um – por exemplo "élezão", "élezinho" e "éle bold". Pronuncie $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ como "$\mathbb{R}$ estendido".

Uma figura

Se $B = [1, 2]$ temos:



Exercício 2.
Itens a, b, c, d: Faça a mesma coisa que você fez no exercício 1, mas agora com $B = [7, 9]$.

Agora os conjuntos B, C, D e D' vão ser infinitos e isso vai fazer alguns passos serem bem mais complicados.

e) A interseção $L \cap D$ é vazia? E a interseção $L \cap U$?

Exercício 3.
Itens a, b, c, d: Faça a mesma coisa que você fez no exercício 1, mas agora com $B = (7, 9)$.

e) A interseção $L \cap D$ é vazia? E a interseção $L \cap U$?

A definição de sup e inf

Aqui:

$$\begin{array}{rcl} L &=& \{\, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d \,\}, \\ U &=& \{\, u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u \,\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{L} &:& \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} &\to& \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\ && y &\mapsto& (y \in L \text{ e } \forall \ell \in L. \ell \leq y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{U} &:& \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} &\to& \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\ && y &\mapsto& (y \in U \text{ e } \forall u \in U. y \leq u) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\alpha \text{ é o inf de } D) &\leftrightarrow& \mathbf{L}(\alpha) \\ (\beta \text{ é o inf de } D) &\leftrightarrow& \mathbf{U}(\beta) \end{array}$$

Isto é verdade mas é difícil de demonstrar:
a) $\forall D \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}).\ \exists! \alpha \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}).\ (\alpha \text{ é o inf de } D)$
b) $\forall D \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}).\ \exists! \beta \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}).\ (\beta \text{ é o inf de } D)$

...e é por isso que nós vamos poder tratar o sup e o inf como funções
que recebem como input qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ estendido
e retornam como output algum elemento de $\mathbb{R}$ estendido.

Exercício 4.
Seja $D = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
a) Calcule L, U, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\inf(D)$ e $\sup(D)$ e represente-os graficamente.
b) É verdade que $\inf(D) \in D$?
c) É verdade que $\sup(D) \in D$?

Exercício 5.
Seja $D = (2,3) \cup (4,5)$.
a) Calcule L, U, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\inf(D)$ e $\sup(D)$ e represente-os graficamente.
b) É verdade que $\inf(D) \in D$?
c) É verdade que $\sup(D) \in D$?

Exercício 6.
Seja $D = \mathbb{R}$.
a) Calcule L, U, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\inf(D)$ e $\sup(D)$ e represente-os graficamente.
b) É verdade que $\inf(D) \in D$?
c) É verdade que $\sup(D) \in D$?

Exercício 7.
Seja $D = \emptyset$.
a) Calcule L, U, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\inf(D)$ e $\sup(D)$ e represente-os graficamente.
b) É verdade que $\inf(D) \in D$?
c) É verdade que $\sup(D) \in D$?
d) É verdade que $\inf(D) \leq \sup(D)$?

Exercício 8.
O slogan é "sups e infs dão as melhores aproximações por retângulos por cima e por baixo". Neste exercício e no próximo nós vamos entender o que isso quer dizer.

Sejam f a função do slide 8, $a = 2$, $b = 10$, $B = [a, b]$.

a) Desenhe num gráfico só: $f, a, b, B = [a, b], C, D = F(B)$, $\inf(F([a, b])), \min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b)), \sup(F([a, b]))$.

Obs: quando escrevemos "$D = F(B)$" na lista de itens ao invés de "$D, F(B)$" isso quer dizer "é fácil ver que D e $F(B)$ vão dar o mesmo resultado".

Obs 2: a definição de $F(B)$ está aqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=5`

Exercício 9.
O próximo slogan importante é este (duplo!):

> "o retângulo $\sup(F([a,b]))\cdot(b-a)$ é o retângulo mais baixo que está todo acima do gráfico da f, e o retângulo $\inf(F([a,b]))\cdot(b-a)$ é o retângulo mais alto que está todo abaixo do gráfico da f."

Sejam f a função do slide 8, $a=2$, $b=10$.

a) Desenhe num gráfico só: f,
$\sup(F([a,b]))\cdot(b-a)$,
$\inf(F([a,b]))\cdot(b-a)$.

Isto é parecido com o que você fez no MT1:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT1.pdf#page=5

Exercício 9 (cont.)

b) Interprete visualmente esta expressão:

$$\forall x \in [a, b].\ f(x) \leq \sup(F([a, b]))$$

Dica: você vai precisar de infinitos passos como este aqui:

> Compare a altura dos pontos $(2.34, f(2.34))$ e $(2.34, \sup(F([a, b])))$. Se o ponto $(2.34, f(2.34))$ estiver abaixo do ponto $(2.34, \sup(F([a, b])))$ então $f(2.34) \leq \sup(F([a, b]))$ é verdade e desenhamos uma bolinha preta em $x = 2.34$; senão desenhamos uma bolinha branca em $x = 2.34$.

Exercício 9 (cont.)

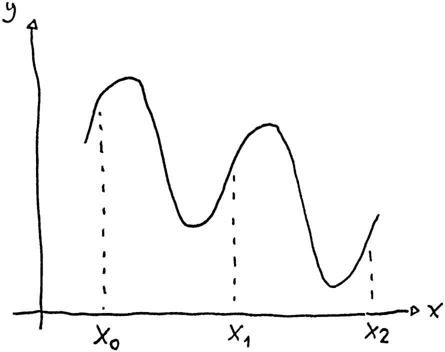
Agora verifique – visualmente! –
se cada uma das expressões abaixo é
verdadeira ou falsa:

c) $\forall x \in [a,b].\ f(x) \leq \sup(F([a,b]))$
d) $\forall x \in [a,b].\ \inf(F([a,b])) \leq f(x)$

e) $\forall x \in [a,b].\ f(x) \leq \sup(F([a,b])) - 0.1$
f) $\forall x \in [a,b].\ \inf(F([a,b])) + 0.1 \leq f(x)$

Exercício 10.

Agora que você entendeu visualmente o que $\sup(F([a,b]))$ e $\inf(F([a,b]))$ querem dizer faça duas cópias à mão do desenho abaixo, e...



Exercício 10 (cont.)

a) desenhe sobre a primeira delas

$$\sup(F([x_0,x_1]))\cdot(x_1-x_0)+\sup(F([x_1,x_2]))\cdot(x_2-x_1),$$

b) desenhe sobre a segunda delas

$$\inf(F([x_0,x_1]))\cdot(x_1-x_0)+\inf(F([x_1,x_2]))\cdot(x_2-x_1).$$

Cálculo 2 - 2021.2

Aula 19: a definição da integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

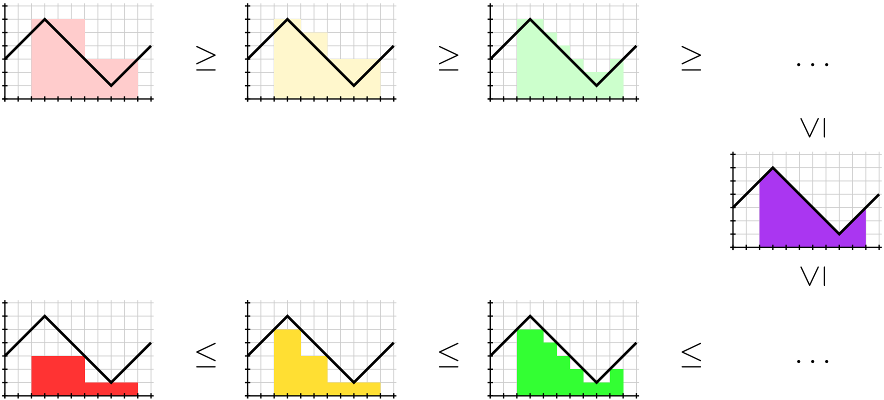
Introdução

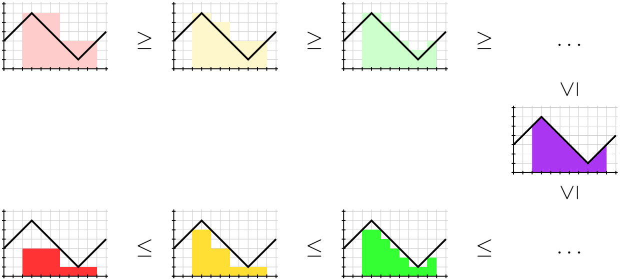
A definição formal da integral é bem complicada.

A gente primeiro tem que definir aproximações por retângulos por cima e por baixo usando sups e infs, depois a gente tem que definir os limites dessas aproximações por cima e por baixo do jeito certo, depois a gente tem que comparar esses limites...

Se o limite por cima e o limite por baixo dão o mesmo resultado então a nossa função é integrável, e a integral dela é o resultado desses limites — mas existem funções que não são integráveis.

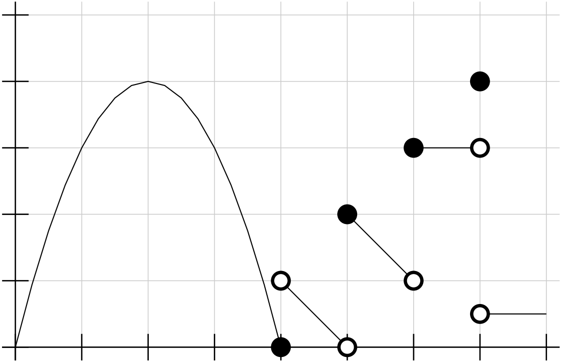
A gente vai ter que definir um monte de abreviações pras expressões matemáticas não ficarem grandes demais, e a gente vai ter que aprender a interpretar graficamente cada expressão... como nos próximos dois slides:



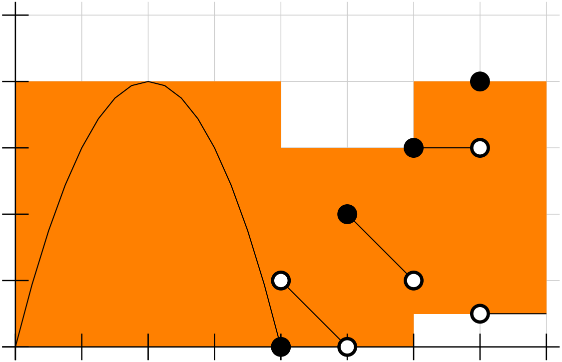


$$
\begin{array}{ccccccc}
[\sup]_{[2,10]_{2^1}} & \geq & [\sup]_{[2,10]_{2^2}} & \geq & [\sup]_{[2,10]_{2^3}} & \geq & \dots \\
 & & & & & & \vee\!| \\
 & & & & & & \displaystyle\int_{x=2}^{x=10} f(x)\,dx \\
 & & & & & & \vee\!| \\
[\inf]_{[2,10]_{2^1}} & \leq & [\inf]_{[2,10]_{2^2}} & \leq & [\inf]_{[2,10]_{2^3}} & \leq & \dots
\end{array}
$$

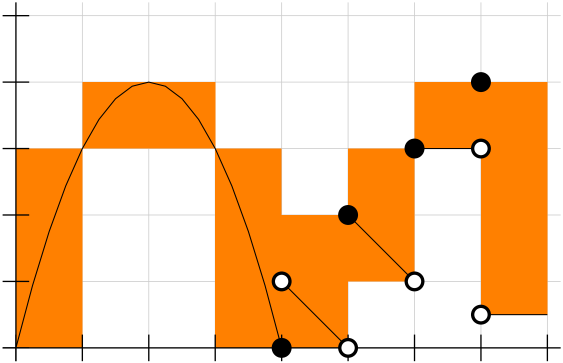
Também podemos desenhar só a diferença entre
a aproximação por cima e a por baixo...
Aí o resultado vai ser formado por retângulos
"flutuando no ar". Se $f(x)$ é esta função
mais complicada aqui, então...

$f(x) \quad =$ 

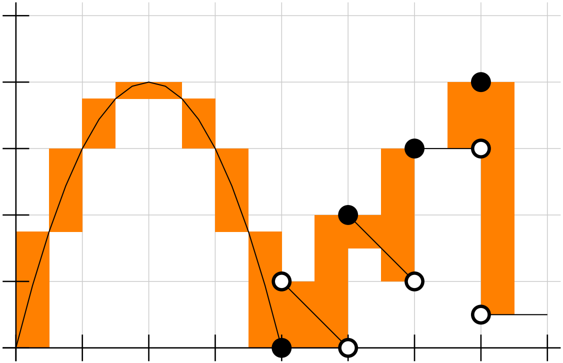
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^2}} f(x)\,dx \ =$$



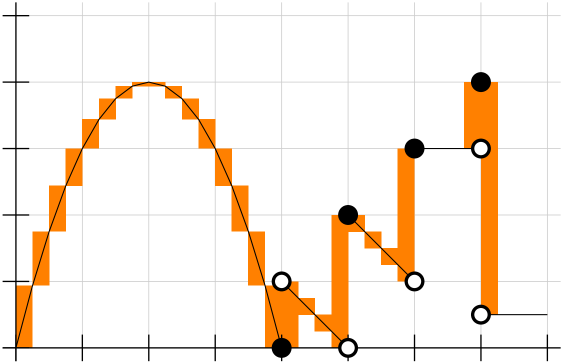
$$\overline{\int_{[0,8]_{2^3}}} f(x)\,dx \;=$$



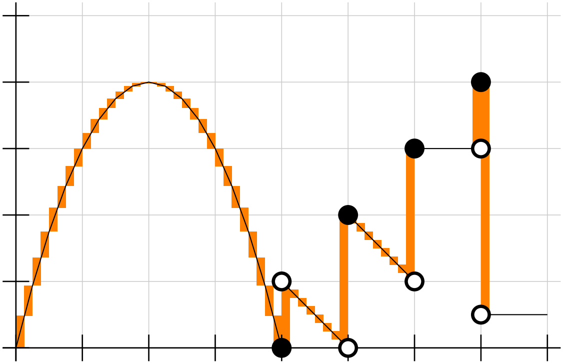
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^4}} f(x)\,dx \;=$$



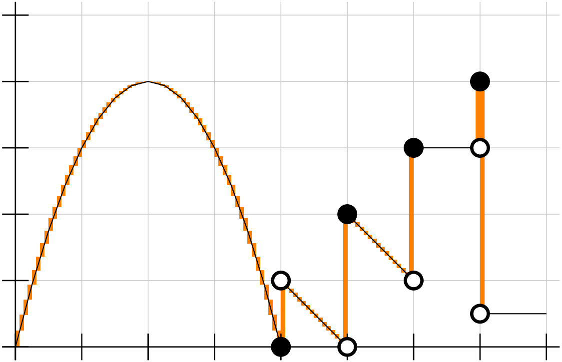
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^5}} f(x)\,dx \quad = $$



$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^6}} f(x)\,dx \;=$$



$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^7}} f(x)\,dx \;=$$



Métodos de integração: nomes

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}
$$

Cada uma dessas fórmulas é um “método de integração”. Todos esses “métodos” aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os intervalos têm o mesmo comprimento.

Métodos de integração: nomes (2)

Todas as fórmulas do slide anterior supõem que estamos num contexto em que a partição P está definida.
Se usamos elas com uma partição em subscrito, como em $[\mathrm{L}]_{\{4,5,7\}}$, isso vai querer dizer que a partição P vai ser indicada no subscrito.
Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}]_{\{4,5,7\}} & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
& = & f(a_1)(b_1 - a_1) \\
& + & f(a_2)(b_2 - a_2) \\
& = & f(4)(5-4) \\
& + & f(5)(7-5,)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}]_{\{6,7,8,9\}} & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
& = & f(a_1)(b_1 - a_1) \\
& + & f(a_2)(b_2 - a_2) \\
& + & f(a_3)(b_3 - a_2) \\
& = & f(6)(7-6) \\
& + & f(7)(8-7) \\
& + & f(8)(9-8).
\end{array}$$

Nossas partições preferidas

Agora eu vou definir uma notação pra partição que divide um intervalo em N subintervalos iguais:

$$[a,b]_N = \{a,\ a+\tfrac{b-a}{N},\ a+2\tfrac{b-a}{N},\ \ldots,\ b\}$$

Exercício 1.

Calcule:

a) $[4,6]_1$

b) $[4,6]_{2^3}$

Dicas: $2^3 = 8$, e releia isto aqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=16`

Obs: mais tarde no curso você vai (ter que!) aprender a fazer as suas próprias definições...

Aproximações por cima
Mais duas definições:
A melhor aproximação por cima para a integral de f na partição P é:

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx = [\sup]_P,$$

O limite das aproximações por cima pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\sup]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por cima de f no intervalo $[a,b]$".

Aproximações por baixo
Mais duas definições:
A melhor aproximação por baixo para a integral de f na partição P é:

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx = [\inf]_P,$$

O limite das aproximações por baixo pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\inf]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por baixo de f no intervalo $[a,b]$".

A definição de integral

A nossa definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ vai ser:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;\overset{\Downarrow}{=}\; \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

se a igualdade marcada com '$\overset{\Downarrow}{=}$' for verdade.

Se a igualdade '$\overset{\Downarrow}{=}$' for falsa vamos dizer que:
"$f(x)$ não é integrável no intervalo $[a,b]$",
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não está definida", ou
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ dá erro".

(Compare com $\frac{42}{0}$, que também "não está definido", ou "dá erro"...)

Como esses limites funcionam?
Em Cálculo 1 você viu que algumas funções não são deriváveis.
Agora nós vamos ver que algumas funções não são integráveis.
O melhor modo de visualizar isso é usando estas definições:

$$\begin{aligned}
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &= \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Exercício 2.
Faça o exercício 1 do MT1 do semestre passado.
Ele tem gabarito, mas tente fazê-lo sem olhar o gabarito.

Link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-MT1.pdf#page=4`

Dica: reveja o exercício 10 deste PDF:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-infs-e-sups.pdf#page=19`

(Tudo a partir daqui vai ser reescrito)

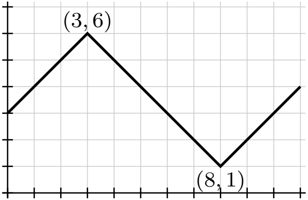
Exercício 15.

a) Verifique que no exercício 14 você desenhou $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^0}} f(x)\,dx$, $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx$, $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx$, e $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx$.

b) Calcule a área dessas quatro diferenças. Veja o vídeo!

Exercício 10.

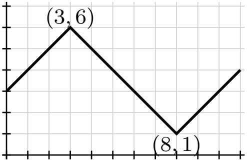
Lembre que:

$f(x) =$ 

a) Calcule $\sup(F([2,4]))$.
b) Calcule $\inf(F([2,4]))$.
c) Calcule $\sup(F([4,7]))$.
d) Calcule $\inf(F([4,7]))$.
e) Calcule $\sup(F([7,9]))$.
f) Calcule $\inf(F([7,9]))$.

Exercício 11.

Lembre que:

$f(x) =$ 

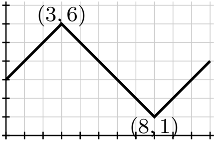
Digamos que $P = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$.
Represente graficamente num gráfico só:

a) $\sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)$,
b) a curva $y = f(x)$,
c) $\sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)$.

e verifique que você obteve algo bem parecido com a figura do slide 2.

Exercício 12.

Lembre que:

$f(x) =$ 

Em cada um dos itens abaixo represente graficamente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os dois somatórios pedidos.

a) $[\text{sup}]_{\{1,10\}}$, $[\text{inf}]_{\{1,10\}}$

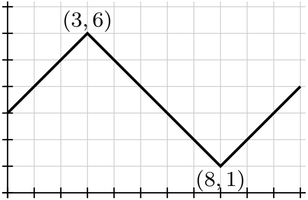
b) $[\text{sup}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$, $[\text{inf}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$

c) $[\text{sup}]_{\{1,2,4,5,6,7,9,10\}}$, $[\text{inf}]_{\{1,2,4,5,6,7,9,10\}}$

d) $[\text{max}]_{\{1,10\}}$, $[\text{min}]_{\{1,10\}}$

e) $[\text{max}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$, $[\text{min}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$

Exercício 14.
Lembre que:

$f(x) =$ 

Em cada um dos itens abaixo represente graficamente
num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os dois somatórios pedidos.

a) $[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^0}}$, $[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^0}}$

b) $[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^1}}$, $[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^1}}$

c) $[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^2}}$, $[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^2}}$

d) $[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^3}}$, $[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^3}}$

Exercício 16.
Identifique nas figuras dos próximos dois slides:

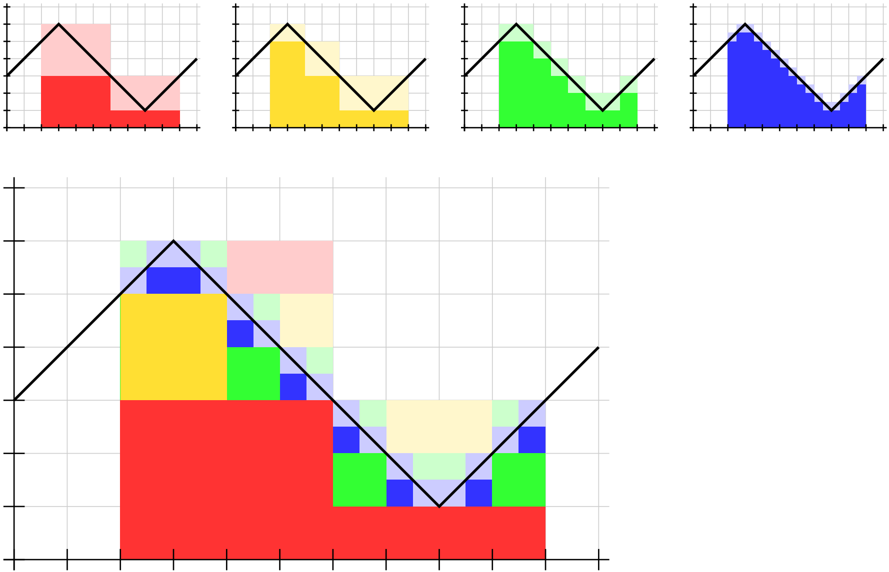
$$\overline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x)\,dx,$$

$$\underline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x)\,dx,$$

$$\overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^4}} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x=2}^{x=10} f(x)\,dx.$$

Dica: os "$\overline{\underline{\int}}_P \ldots dx$"s são feitos de "retângulos flutuando no ar", não de retângulos cujas bases estão em $y = 0$.



Cálculo 2 - 2021.2

Aula 20: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Introdução

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \quad = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx.$$

O TFC1 tem duas versões.
A versão mais simples diz o seguinte:
se a função f é contínua então para todo $t \in (a, b)$ vale:

$$F'(t) \quad = f(t). \qquad\qquad (*)$$

A versão mais complicada do TFC1, que vamos ver depois, não supõe que a função f é contínua.

Nós vamos ver um argumento visual que mostra que a igualdade $(*)$ é verdade. Esse argumento visual é quase uma demonstração formal, num sentido que eu vou explicar depois.

Introdução (2)

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx.$$

Então:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx \\
&\overset{???}{=} f(t)
\end{aligned}$$

Introdução (3)
Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c\in[a,b]$.
Digamos que a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;=\; \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O nosso argumento visual vai mostrar que:

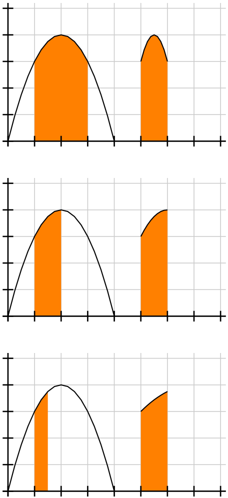
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \;=\; f(t).$$

Primeiro exemplo:
$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

Primeira figura: $\varepsilon = 2$.
Segunda figura: $\varepsilon = 1$.
Terceira figura: $\varepsilon = 1/2$.

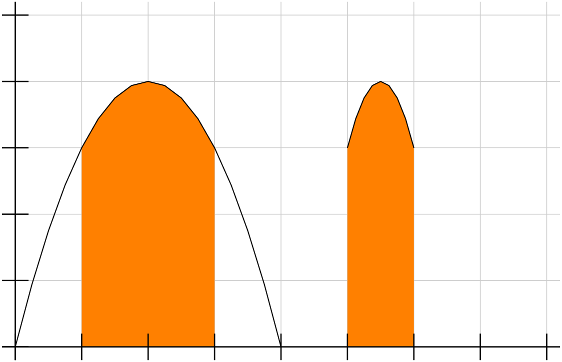
À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.

Repare que a área em laranja à esquerda sempre tem base ε e a área em laranja à direita sempre tem base $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$.



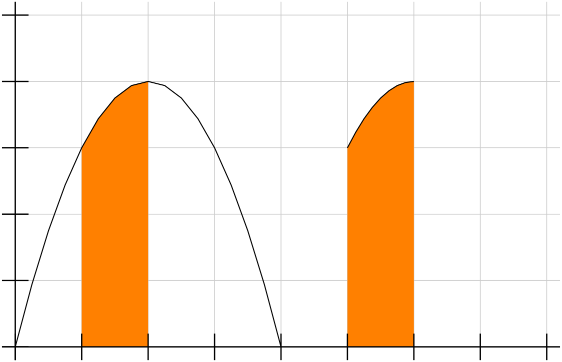
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 2\text{:}$$



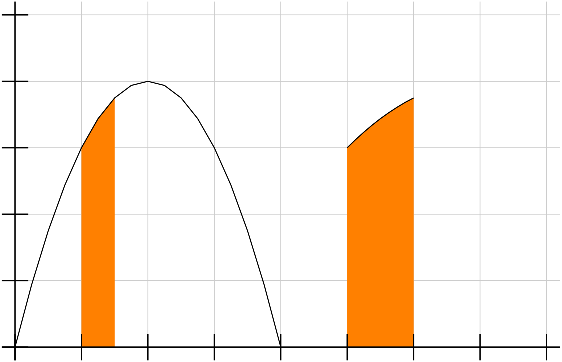
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1\text{:}$$



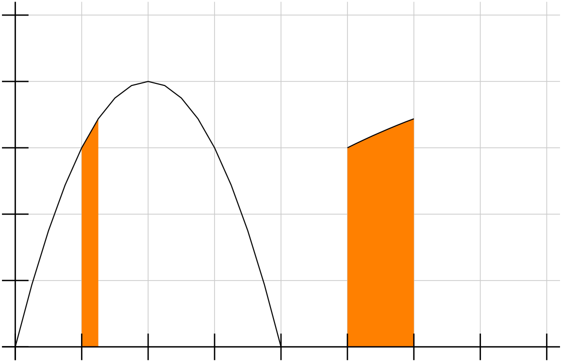
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/2\text{:}$$



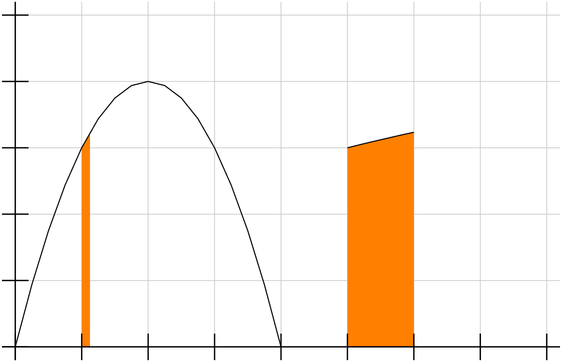
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/4:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/8\text{:}$$

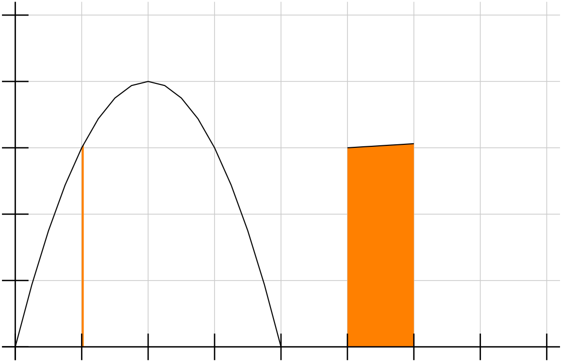


$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/16\text{:}$$

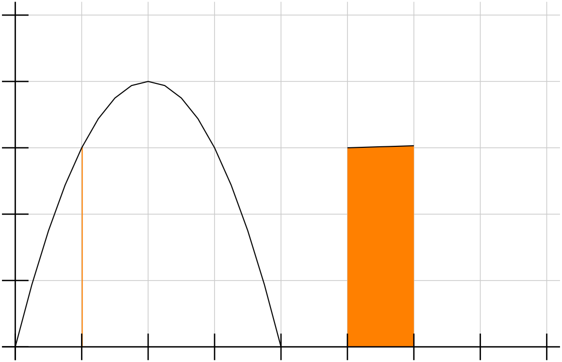
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/64\text{:}$$

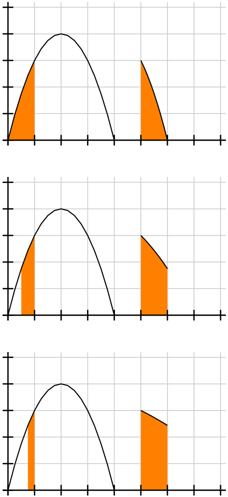


Agora com ε negativo!...

$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

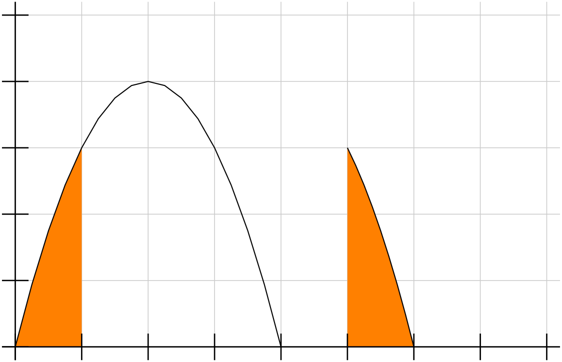
Primeira figura: $\varepsilon = -1$.
Segunda figura: $\varepsilon = -1/2$.
Terceira figura: $\varepsilon = -1/4$.

À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.



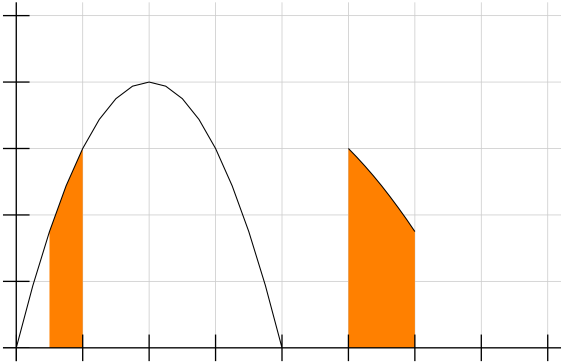
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1\text{:}$$



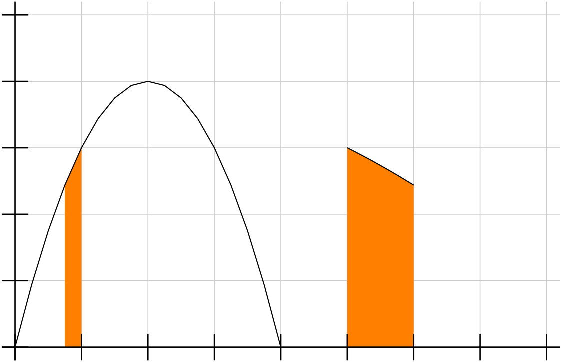
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/2\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/4\text{:}$$

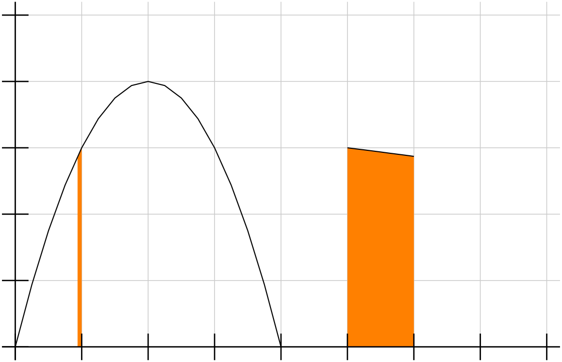


$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/8\text{:}$$

$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/16\text{:}$$

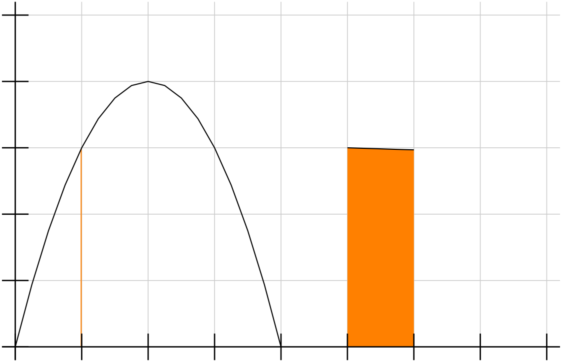


$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/32\text{:}$$

$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/64:$$



Exercício 1.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

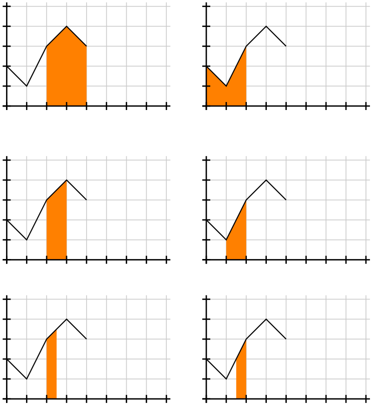
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Exercício 2.
Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

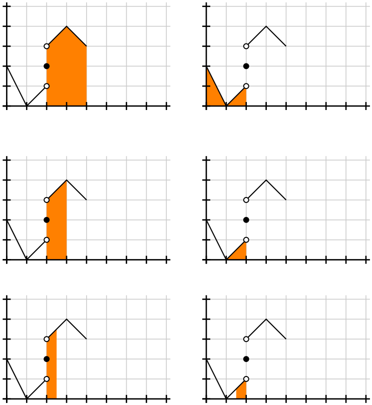
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Descontinuidades

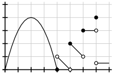
Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer.
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da f,
ou, pra abreviar, o "conjunto das descontinuidades da f", assim:

$$\mathsf{desc}(f) \quad = \quad \{\, x \in [a,b] \mid f \text{ é descontinua em } x \,\}$$

A expressão "f tem um número finito de pontos de descontinuidade",
que eu vou abreviar pra "f tem finitas descontinuidades" apesar
disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$$\mathsf{desc}(f) \;\text{ é um conjunto finito}$$

O conjunto vazio é finito, então toda f contínua "tem finitas
descontinuidades". Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui,
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=46
tem infinitas descontinuidades.

A versão complicada do TFC1
Vou dizer que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é "boa" quando ela é integrável e tem finitas descontinuidades.

(O termo "função boa" é péssimo de propósito — é pra deixar óbvio que essa é uma definição temporária, que vai valer só durante poucos slides...)

Vou dizer que uma função $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ obedece

$$G'(x) = f(x)$$

quando G for contínua em $[a, b]$ e G obedecer isto aqui:

$$\forall x \in ((a, b) \setminus \mathsf{desc}(f)).\ G'(x) = f(x)$$

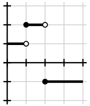
ou seja, neste caso "$G'(x) = f(x)$" é uma abreviação pra algo complicado.

A versão complicada do TFC1 (2)

Antes de prosseguir vamos fazer um exercício.

Exercício 3.

Seja:

$f(x) \quad =$ 

a) Qual é o domínio da f? (Ele está "implícito no gráfico"...)
b) Encontre uma função G que obedece $G'(x) = f(x)$ e $G(0) = 0$.
c) Encontre uma função H que obedece $H'(x) = f(x)$ e $H(0) = 1$.
d) Faça o gráfico da função $M(x) = H(x) - G(x)$.
e) Encontre uma função K que obedece $K'(x) = f(x)$ e $K(4) = -1$.

A versão complicada do TFC1 (3)

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é "boa".
Digamos que $c \in [a,b]$ e que $G'(x) = f(x)$.
Digamos que

$$F(x) \quad = \quad \int_{t=c}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Então F e G "diferem por uma constante",
como as funções G, H e K do exercício 3.
Isso é o "TFC1 na versão complicada".
Eu não vou demonstrá-lo. =(

Seja k essa constante. Temos:

$$\forall x \in [a,b].\ G(x) = F(x) + k.$$

Isso tem um monte de consequências bacanas.
Por exemplo: $F(c) = 0$, $G(c) = k$, e,
se $\alpha, \beta \in [a,b]$,

$$\begin{array}{rcl}
\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt &=& \int_{t=c}^{t=\beta} f(t)\,dt - \int_{t=c}^{t=\alpha} f(t)\,dt \\
&=& F(\beta) - F(\alpha) \\
&=& (G(\beta) - k) - (G(\alpha) - k) \\
&=& G(\beta) - G(\alpha).
\end{array}$$

Isso nos dá um método pra calcular integrais
da função f. Se $\alpha, \beta \in [a,b]$,

1) encontramos uma solução $G(x)$
da EDO $G'(x) = f(x)$,

2) usamos a fórmula

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha).$$

Você viu no exercício anterior que a EDO
$G'(x) = f(x)$ tem infinitas soluções...
Qualquer solução serve, e não precisamos
calcular a constante k.

Esse método é o TFC2.

O TFC2

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é "boa".
Digamos que $\alpha, \beta \in [a,b]$ e que $G'(x) = f(x)$.

Então:

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha).$$

TFC2: um exemplo

A nossa parábola preferida é $f(x) = 4 - (x-2)^2$,
ou seja, $f(x) = 4x - x^2$.
Digamos que $G(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.
Então $G'(x) = f(x)$, e o resultado desta
substituição aqui vai dar uma igualdade verdadeira...

$$\left(\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha) \right) \begin{bmatrix} f(x) := 4x - x^2 \\ G(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ \beta := 4 \\ \alpha := 0 \end{bmatrix}$$

TF2: um exemplo (2)

Temos:

$$\left(\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \;=\; G(\beta)-G(\alpha)\right)\begin{bmatrix} f(x) := 4-(x-2)^2 \\ G(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ \beta := 4 \\ \alpha := 0 \end{bmatrix}$$

$$= \;\left(\int_{t=0}^{t=4} 4-(t-2)^2\,dt \;=\; \left(2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \frac{0^3}{3}\right)\right)$$

e:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=4} 4-(t-2)^2\,dt &= \left(2\cdot 4^2 - \tfrac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \tfrac{0^3}{3}\right) \\ &= \left(32 - \tfrac{64}{3}\right) - 0 \\ &= \tfrac{96}{3} - \tfrac{64}{3} \\ &= \tfrac{32}{3}. \end{aligned}$$

Cálculo 2 - 2021.2

Mini-teste 3

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Avisos

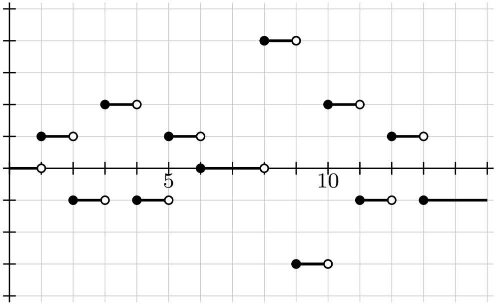
O mini-teste 3 vai acontecer no início de janeiro.
Ele vai ter problemas parecidos com estes aqui,
de integrar uma função escada no olhômetro:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-MT2.pdf#page=4

As regras vão ser as mesmas dos outros mini-testes.
As questões do MT3 serão disponibilizadas às 20:00
da sexta 7/jan/2022 e você vai ter 24 horas pra
entregar as respostas.

Lembre que tudo tem que ser feito à mão e em papel!
Desenhos feitos no computador não serão considerados.

Sejam:

$f(x) \quad =$ 

e $G(x) = \int_{t=3.5}^{t=x} f(t)\,dt$.

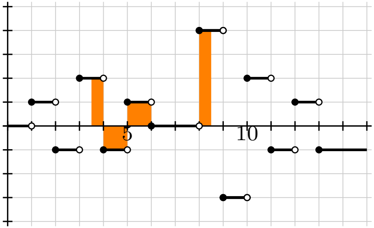
a) Represente graficamente $G(8.5)$.

b) Dê o valor numérico de $G(8.5)$.

c) Desenhe o gráfico da função G. Dica: o domínio dela é $[0, 15]$.

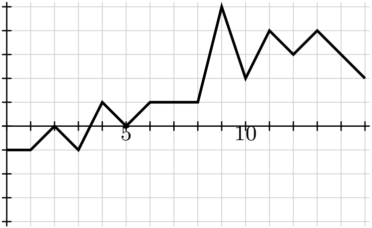
Gabarito

a) $G(8.5) \quad =$

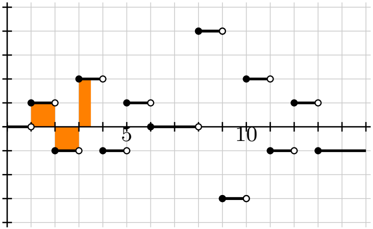


b) $G(8.5) = 3$

c) $G(x) \quad =$



$$G(0) \quad =$$



Cálculo 2 - 2021.2

Aula 22: integração por substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

No mini-teste 3 - link:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT3.pdf#page=4

vocês viram que quando a função G "é uma integral da f"
nós podemos fazer contas como esta aqui:

$$\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx \quad = \quad G(5) - G(2)$$

Isto é um caso particular do TFC2,
que tem várias versões diferentes...
a fórmula dele é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$$

Neste semestre eu vou tentar
explicar o TFC2 e as consequências dele —
tipo: TODAS as técnicas de integração são
consequência do TFC2 — com uma abordagem
diferente da do semestre passado.

Dê uma olhada nestes slides do semestre passado:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-os-dois-TFCs.pdf`
Leia as páginas 2 até 4 dele,
a definição no fim da página 7,
e as páginas 10 até 12.

Exercício 1.
Faça os exercícios 1, 2 e 3 do PDF acima —
mas ao invés de fazer o 2 como eu pedi no semestre
passado faça esta versão modificada dele:

$$[\mathrm{TFC2}]\begin{pmatrix} F(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ F'(x) := 4x - x^2 \\ b := 4 \\ a := 0 \end{pmatrix} \quad = \quad {\color{red}?}$$

Exercício 2.
Assista este vídeo,
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-C2-int-subst.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=YbVfNi-xGNw
e depois tente entender cada uma
das igualdades do slide 7.

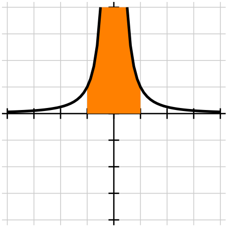
Dica: os '='s do slide 7 têm montes
de significados diferentes dependendo
do contexto. Tente fazer uma lista de
significados e pronúncias.

Obs: os próximos 3 slides não são
autocontidos – você vai precisar
assistir o vídeo pra entendê-los.

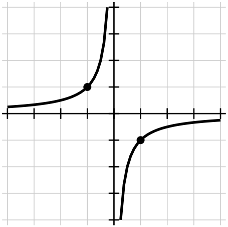
Um caso em que o TFC2 dá um resultado errado

Se $F(x) = -x^{-1}$
então $F'(x) = x^{-2}$, e:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=-1}^{x=1} F'(x)\,dx & = & F(x)\big|_{x=-1}^{x=1} \\
\int_{x=-1}^{x=1} x^{-2}\,dx & = & (-x^{-1})\big|_{x=-1}^{x=1} \\
 & = & (-1^{-1}) - (-(-1)^{-1}) \\
 & = & -2
\end{array}$$



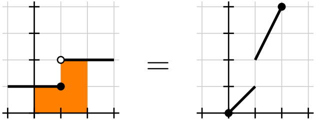
$=$



$=($

Outro caso em que o TFC2 dá um resultado errado

$$\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=0}^{x=2}$$



$$3 \quad = \quad 4 - 0$$

$$
\begin{aligned}
[\text{DefDif}] &= \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \;=\; F(b)-F(a) \right) \\
[\text{TFC2}] &= \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\text{DefDif}]\left[\, {\scriptstyle F(x):=f(g(x))} \,\right] &= \left(f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \;=\; f(g(b))-f(g(a)) \right) \\
[\text{DefDif}]\left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ F(u):=f(u) \\ a:=g(a) \\ b:=g(b) \end{smallmatrix} \right] &= \left(f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \;=\; f(g(b))-f(g(a)) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\text{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} F(x):=f(g(x)) \\ F'(x):=f'(g(x))g'(x) \end{smallmatrix} \right] &= \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{TFC2}]\left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ b:=g(b) \\ a:=g(a) \\ F(u):=f(u) \\ F'(u):=f'(u) \end{smallmatrix} \right] &= \left(\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \;=\; f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &= f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
&= f(g(b))-f(g(a)) \\
&= f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
&= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{aligned}
$$

A fórmula da derivada da função inversa

$$[\text{DFI1}] = \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) & = & x \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & \frac{d}{dx} x \quad = \quad 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\ f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\ g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

$$[\text{DFI2}] = \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) & = & x \\ g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Exercício 3.

a) $[\text{DFI1}] \begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \end{bmatrix} = ?$

Exercício 3 (cont.)

b) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := y^2 \\ f'(y) := 2y \\ g(x) := \text{sqrt}(x) \\ g'(x) := \text{sqrt}'(x) \end{bmatrix} = ?$

c) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := \operatorname{sen} y \\ f'(y) := \cos y \\ g(x) := \operatorname{arcsen}(x) \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}'(x) \end{bmatrix} = ?$

d) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} x := s \\ f(\theta) := \operatorname{sen} \theta \\ f'(\theta) := \cos \theta \\ g(s) := \operatorname{arcsen}(s) \\ g'(s) := \operatorname{arcsen}'(s) \end{bmatrix} = ?$

e) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} x := c \\ f(\theta) := \cos \theta \\ f'(\theta) := -\operatorname{sen} \theta \\ g(c) := \cos^{-1}(c) \\ g'(c) := (\cos^{-1})'(c) \end{bmatrix} = ?$

Mais algumas fórmulas que não valem sempre

$$
\begin{array}{rcl}
(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 &=& 1 \\[1ex]
(\operatorname{sen} x)^2 &=& 1 - (\cos x)^2 \\
\sqrt{(\operatorname{sen} x)^2} &=& \sqrt{1 - (\cos x)^2} \\
\operatorname{sen} x &=& \sqrt{1 - (\cos x)^2} \\
(\cos x)^2 &=& 1 - (\operatorname{sen} x)^2 \\[1ex]
\sqrt{(\cos x)^2} &=& \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2} \\
\cos x &=& \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}
\end{array}
$$

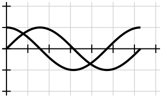
Exercício 4.

a) Escolha um número entre 42 e 99.
(Se você não conseguir converse com seus colegas!!!)

b) Escolha um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}\alpha < 0$
e verifique se $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}$.
Dica: escolha um α para o qual você sabe $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

c) Escolha um $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\beta < 0$
e verifique se $\cos\beta = \sqrt{1 - (\cos\beta)^2}$.

d) Faça uma cópia do gráfico abaixo num papel



e desenhe sobre ela os conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{\, \theta \in [0, 2\pi] \mid \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - (\cos\theta)^2} \,\}, \\ B &= \{\, \theta \in [0, 2\pi] \mid \cos\theta = \sqrt{1 - (\operatorname{sen}\theta)^2} \,\}. \end{aligned}$$

Juntando fórmulas estranhas

$$\begin{array}{rcl}
f(g(x)) &=& x \\
g'(x) &=& \frac{1}{f'(g(x))} \\
e^{\ln x} &=& x \\
\ln' x &=& \frac{1}{e^{\ln x}} \\
&=& \frac{1}{x} \\
\int_{x=a}^{x=b} \ln' x \, dx &=& \ln x \big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x} \, dx &=& \ln x \big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}$$

Juntando fórmulas estranhas

$$\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \\
\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) & = & x \\
\operatorname{arcsen}' x & = & \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} \\
& = & \frac{1}{\sqrt{(\cos(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
& = & \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
& = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{arcsen}' x \, dx & = & \operatorname{arcsen} x \big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & = & \operatorname{arcsen} x \big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}$$

Um exemplo de mudança de variável

$$[\text{EMV1}] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x))|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(g(b)) - f(g(a)) \\ &=& f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{EMV2}] = [\text{EMV1}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(2x)\cdot 2\,dx &=& f(2x)|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(2b) - f(2a) \\ &=& f(u)|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{EMV3}] = [\text{EMV2}] \begin{bmatrix} f(x) := -\cos x \\ f'(x) := \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& (-\cos(2x))|_{x=a}^{x=b} \\ &=& (-\cos(2b)) - (-\cos(2a)) \\ &=& (-\cos(u))|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen}(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{EMV4}] = \left(\int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen}(u)\,du = \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\ dx \right)$$

$$[\text{EMV5}] = \left(\int_{u=a}^{u=b} \operatorname{sen}(u)\,du = \int_{x=a/2}^{x=b/2} 2\operatorname{sen}(2x)\,dx \right)$$

Outro exemplo de mudança de variável

Aqui a gente não substitui a f, só a f'...
Digamos que $f(x) = \int_{t=c}^{t=x} \tan t \, dt$,
e portanto $f'(x) = \tan x$.

$$[\mathrm{OEMV3}] \quad = \quad [\mathrm{EMV2}] \left[f'(x) := \tan x \right] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x) \cdot 2 \, dx & = & (f(2x))|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (f(2b)) - (f(2a)) \\ & = & (f(u))|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u) \, du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{OEMV4}] \quad = \quad \left(\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u) \, du \quad = \quad \int_{x=a}^{x=b} \tan(2x) \cdot 2 \ dx \right)$$

$$[\mathrm{OEMV5}] \quad = \quad \left(\int_{u=a}^{u=b} \tan(u) \, du \quad = \quad \int_{x=a/2}^{x=b/2} 2 \tan(2x) \, dx \right)$$

http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf
http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf

Um exemplo com contas

Isto aqui é um exemplo de como contas com integração por substituição costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned} &\int 2\cos(3x+4)\,dx \\ = &\int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\ = &\frac{2}{3}\int \cos u\,du \\ = &\frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\ = &\frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4) \end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x+4$.

Outro exemplo com contas

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
&= \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
&= \int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
&= \int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
&= \int s^5 - s^7 \, ds \\
&= \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{array} \right]$$

Substituição na integral definida
Eu vou chamar a demonstração abaixo de [S2].
Ela é uma série de três igualdades: o '$=$' de cima,
o '$=$' de baixo, e o '$=$' da esquerda (que é um '$\|$').
Eu vou chamar o "$F'(u) = f(u)$" de a hipótese do [S2].
Obs: nós ainda não acreditamos nessa demonstração...
vamos verificar as igualdades dela daqui a alguns slides.

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\
F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\
\| & & \\
F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du
\end{array} \right)
$$

Lembre que dá pra substituir só alguns símbolos...
Por exemplo:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][g(x) := 2x] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Também podemos substituir o f por F'...
E aí a hipótese passa a ser "trivialmente verdadeira":

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][f(u) := F'(u)] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = F'(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} F'(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Exercício 1.
Lembre que:

$$[\mathsf{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx} F(x)\, dx \quad = \quad F(x)|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Calcule os resultados destas expansões:
a) $[\mathsf{TFC2}] \left[F(x) := F(g(x)) \right]$
b) $[\mathsf{TFC2}] \left[x := u \right] \begin{bmatrix} a := g(a) \\ b := g(b) \end{bmatrix}$

...e verifique que se $f(u) = F'(u)$ então:
c) o que você obteve no (a) prova o '$=$' de cima da [S2],
d) o que você obteve no (b) prova o '$=$' de baixo da [S2],

O '$\|$' à esquerda na [S2]
é bem fácil de verificar... ó:

$$\begin{array}{rcl}
F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\
& = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}
\end{array}$$

Se você conseguiu fazer todos os itens
do exercício 1 e conseguiu entender isso aí
então agora você entende o [S2] como uma
demonstração — você entende todas as
igualdades dele.

Pra que serve a hipótese do [S2]?
Ela serve pra gente lidar com 'f's que a gente
não sabe integrar! Por exemplo:

$$[\mathsf{S2}] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}] \begin{bmatrix} f(x) := \tan x \\ g(u) := 2u \end{bmatrix} \;=\; \left(\begin{array}{l} \color{red}{\text{Se } F'(u) = \tan u \text{ então:}} \\ \begin{array}{ccc} F(2x)|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x)\cdot 2\,dx \\ \| & & \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Uma versão do [S2] para integrais indefinidas

Compare... e repare no "Obs: $u = g(x)$".

$$[\mathsf{S2}] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2I}] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

Versões sem a parte da esquerda

Compare:

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\
F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\
\| & & \\
F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du
\end{array} \right)
$$

$$
[\mathsf{S3}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c}
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\
\| \\
\displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du
\end{array} \right)
$$

Versões sem a parte da esquerda (2)

...e compare:

$$[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

As pessoas costumam usar variações da [S3I], geralmente sem darem um nome pra função $g(u)$... Lembre que em vários exercícios que nós já fizemos ficava implícito que vocês tinham que descobrir qual era a substituição certa... por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
x^2\big|_{x=4}^{x=5} & = & ? \\
\left(f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)\right)\begin{bmatrix} f(x) := ? \\ a := ? \\ b := ? \end{bmatrix} & = & ? \\
\left(f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)\right)\begin{bmatrix} f(x) := x^2 \\ a := 4 \\ b := 5 \end{bmatrix} & = & \left(x^2\big|_{x=4}^{x=5} = 5^2 - 4^2\right) \\
x^2\big|_{x=4}^{x=5} & = & 5^2 - 4^2
\end{array}$$

Exercício 2.
Nos livros e nas notas de aula que você vai encontrar por aí o “Obs: $u = g(x)$” da nossa [S3I] quase sempre aparece escrito de (ZILHÕES DE!!!) outros jeitos, então o melhor que a gente pode fazer é tentar encontrar as substituições que transformam a nossa [S3I] em algo “mais ou menos equivalente” às igualdades complicadas que eu mostrei no vídeo e que eu disse que a gente iria tentar decifrar...

Nos itens a e b deste exercício você vai tentar encontrar as substituições — que eu vou escrever como ‘[?]’ — que transformam a [S3I] em algo “mais ou menos equivalente” às igualdades da direita.

Exercício 2 (cont.)
Encontre as substituições '[?]'s que façam com que:

a) $\left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$ [?] vire algo como $\left(\begin{array}{c} \displaystyle\int 2\cos(3x+4)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \end{array} \right)$

b) [S3I] [?] vire algo como $\left(\begin{array}{c} \displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5(1-\operatorname{sen} x^2)(\cos x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int s^5(1-s^2)\,ds \end{array} \right)$

Gambiarras

Em geral é mais prático a gente usar umas gambiarras como "$\frac{du}{dx}dx = du$" ao invés do método "mais honesto" que a gente usou no exercício 2...

Às vezes essas gambiarras vão usar uma versão disfarçada do teorema da derivada da função inversa: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$,
e umas outras manipulações esquisitas de 'dx's e 'du's que só aparecem explicadas direito nos capítulos sobre "diferenciais" dos livros de Cálculo.

Nós vamos começar usando elas como gambiarras mesmo, e acho que nesse semestre não vai dar pra ver como traduzir cada uma delas pra algo formal...

Gambiarras (2)

Quando a gente está começando e ainda não tem prática este modo de por anotações embaixo de chaves ajuda muito:

$$\int (\underbrace{\mathrm{sen}\, x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\mathrm{sen}\, x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\, dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5 (1 - s^2)\, ds$$

Quando a gente já tem mais prática acaba sendo melhor pôr todas as anotações dentro de caixinhas — por exemplo:

$$\left[\begin{array}{c} \mathrm{sen}\, x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \mathrm{sen}\, x = \cos x \\ \cos x\, dx = ds \end{array} \right]$$

Gambiarras (3)
Essas caixinhas, como

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x \, dx = ds \end{array}\right]$$

vão ser os únicos lugares em que nós vamos permitir esses 'dx's e 'ds' "soltos", que não estão nem em derivadas e nem associados a um sinal '$\int$'...

E esses 'dx's e 'ds' "soltos" só vão aparecer em linhas que dizem como traduzir uma expressão que termina em 'dx' numa integral em x pra uma expressão que termina em 'ds' numa integral na variável s.

Nós vamos evitar usar s como uma abreviação para $\operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações

Tudo numa caixinha de anotações é consequência da primeira linha dela, que é a que define a variável nova. Por exemplo, se definimos a variável nova como $c = \cos x$ então $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$, e podemos reescrever isso na "versão gambiarra" como: $dc = -\operatorname{sen} x\, dx$, e também como $\operatorname{sen} x\, dx = (-1)dc$.

A caixinha vai ser:

$$\left[\begin{array}{c} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \\ dc = -\operatorname{sen} x\, dx \\ \operatorname{sen} x\, dx = (-1)\, dc \end{array}\right]$$

Mais sobre as caixinhas de anotações (2)

Muito importante: cada linha das caixinhas é uma série de igualdades — por exemplo $\mathsf{expr}_1 = \mathsf{expr}_2 = \mathsf{expr}_3$ — e cada uma dessas expressões $\mathsf{expr}_1, \ldots, \mathsf{expr}_n$ só pode mencionar ou a variável antiga ou a variável nova...

Então:

Bom: $dc = -\operatorname{sen} x\, dx$
Mau: $\frac{1}{-\operatorname{sen} x} dc = dx$
Bom: $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x$

Truque: em $\frac{dc}{dx}$ o c faz o papel de uma abreviação para $\cos x$, não de uma variável.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)
Quando a gente faz algo como

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5 (1 - s^2) \, ds$$

Cada chave é como uma igualdade da caixa de anotações "escrita na vertical"... por exemplo, "$\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s}$" é $s = \operatorname{sen} x$.

As outras chaves correspondem a outras igualdades da caixa de anotações — que têm que ser consequências desse $s = \operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)

Isto aqui está errado:

$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \; dx}_{ds} \quad = \quad \int ({\color{red}\operatorname{sen} x})^5 (1 - s^2)\, ds$$

À esquerda do '=' a gente tem uma integral na qual só aparece a "variável antiga", que é x, e à direita do '=' a gente tem uma integral na qual aparecem tanto a variável antiga, x, quanto a nova, que é s... =(

Lembre que tanto o truque das caixinhas quanto o truque das chaves servem pra gente conseguir aplicar a [S3I] de um jeito mais fácil, e no [S3I] uma integral usa só a variável antiga e a outra usa só a nova.

Exercício 3.
Leia o início da seção 6.1 do APEX Calculus
e faça os exercíos 25 até 32 da página 280 dele. Link:
http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf

Exercício 4.
Leia o início da seção 6.1 do Martins/Martins
e refaça os exercícios resolvidos 1 a 6 dele
usando ou as nossas anotações sob chaves ou
as nossas anotações em caixinhas. Link:
http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf

Exercício 5.

A questão 2 da P1 do semestre passado dizia que:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável (ou: "por uma sequência de integrações por substituição") pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

E ela pedia pra vocês verificarem isso num caso específico.
Tente fazer essa questão olhando poucas vezes pro gabarito dela.
Link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4`

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][f(u) := F'(u)] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(w) = \cos(2+w) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(\sqrt{v}) & = & \displaystyle\int \cos(2+\sqrt{v}) \cdot (2\sqrt{v})^{-1}\,dv \\ \parallel & & \\ F(w) & = & \displaystyle\int \cos(2+w)\,dw \end{array} \\ \text{Obs: } w = \sqrt{v}. \end{array} \right)$$

Cálculo 2 - 2021.2

Aula 26: mudança de variável
por gambiarras

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Introdução
No último PDF e na P1 a gente viu como fazer "integração por substituição" de um jeito mais ou menos fácil de formalizar... agora a gente vai ver o método que os livros usam, que nos permite fazer as contas bem rápido, mas que usa várias gambiarras, algumas delas bem difíceis de formalizar.

Os nomes "integração por substituição" e "integração por mudança de variável" costumam ser equivalentes. Vou me referir ao método que a gente vai ver agora como "mudança de variável", "mudança de variável por gambiarras", "MV", ou "MVG", pra gente poder usar o termo "substituição" pro '[:=]'.

Introdução (2)

Cada livro usa convenções um pouco diferentes pra como escrever as contas por MVG. Eu vou usar a convenção do exemplo do próximo slide, em que a resolução da integral fica à esquerda e as caixinhas indicando os truques que usamos em cada MV ficam à direita, separadas da contas da integral.

A primeira caixinha tem os truques pra mudar
da variável x pra variável u e pra voltar de u pra x.

A segunda caixinha tem os truques pra mudar
da variável u pra variável v e pra voltar de v pra u.

A terceira caixinha tem os truques pra mudar
da variável v pra variável w e pra voltar de w pra v.

A quarta caixinha tem os truques pra mudar
da variável w pra variável y e pra voltar de y pra w.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{u+4}\right)}{2\sqrt{u+4}}\,du \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}\,dv \\
&= \int \cos\left(2+w\right)dw \\
&= \int \cos y\,dy \\
&= \operatorname{sen} y \\
&= \operatorname{sen}\left(2+w\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{v}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{u+4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{c} u=3x \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3\,dx \\ dx=\frac{1}{3}\,du \end{array}\right]
\quad
\left[\begin{array}{c} v=u+4 \\ du=dv \end{array}\right]
\quad
\left[\begin{array}{c} w=\sqrt{v} \\ \frac{dw}{dv}=\frac{1}{2}v^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \end{array}\right]
\quad
\left[\begin{array}{c} y=2+w \\ dy=dw \end{array}\right]
$$

Limites de integração

A coluna da esquerda tem uma série de integrais sem limites de integração — a gente está trabalhando numa notação abreviada em que os limites de integração foram apagados. Eles podem ser recolocados de novo no final, quando a gente for transformar essas contas abreviadas numa versão "desabreviada" delas.

Os limites de integração em x são diferentes
dos limites de integração em u, que são diferentes
dos limites de integração em v, que são diferentes
dos limites de integração em w, que são diferentes
dos limites de integração em y.

Detalhes em breve!

A coluna da esquerda tem uma série de igualdades. Ela é da forma $\langle\mathsf{expr_1}\rangle = \langle\mathsf{expr_2}\rangle = \ldots = \langle\mathsf{expr_n}\rangle$, mas a gente escreve essa série de igualdades na vertical.

Repare que na coluna da esquerda
"as variáveis não se misturam":
$\langle\mathsf{expr_1}\rangle$ e $\langle\mathsf{expr_{10}}\rangle$ são "expressões em x",
$\langle\mathsf{expr_2}\rangle$ e $\langle\mathsf{expr_9}\rangle$ são "expressões em u",
$\langle\mathsf{expr_3}\rangle$ e $\langle\mathsf{expr_8}\rangle$ são "expressões em v",
$\langle\mathsf{expr_4}\rangle$ e $\langle\mathsf{expr_7}\rangle$ são "expressões em w",
$\langle\mathsf{expr_5}\rangle$ e $\langle\mathsf{expr_6}\rangle$ são "expressões em y".

A regra mais importante de todas

Na coluna da esquerda cada expressão é
uma expressão "em uma variável só".
Se você escrever algo como

$$\int \cos(2+w)\,dy$$

Isso é um ERRO CONCEITUAL GRAVÍSSIMO
e a sua questão é ZERADA.

A gente não vai ter tempo de ver o porquê disso...
O motivo é que com essa proibição o método pra
"desabreviar" as contas fica simples —
sem essa proibição ele fica BEM mais complicado,
e a gente precisaria de uns truques de "notação
de físicos", que é um assunto bem difícil de
Cálculo 3, pra definir o método de desabreviação.

As caixinhas de truques

As caixinhas de truques da MVG têm uma sintaxe BEM diferente das caixinhas do '[:=]'.
Pra enfatizar isso a gente usa '='s dentro delas, não ':='s, e a gente escreve elas separadas do resto, à direita.

Dê uma olhada nas 9 primeiras páginas daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf

Dentro cada caixinha de truques da MVG a gente vai usar algumas expressões que só podem ser formalizadas direito usando a "notação de físicos", que a gente vai ver com detalhes em C3...
Vou mostrar como "ler em voz alta" uma caixinha e a gente vai tentar usar elas meio de improviso.

Lendo uma caixinha de truques em voz alta

$$\left[\begin{array}{c} u = 3x \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{array}\right]$$

Digamos que u e x são variáveis dependentes,
que obedecem a equação $u = 3x$.
Então podemos tratar u como uma função de x,
e temos $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(u(x)) = \frac{d}{dx}(3x) = \frac{d}{dx}(u(x)) = 3$.
Multiplicando os dois lados de $\frac{du}{dx} = 3$ por dx
obtemos $du = 3\,dx$; e multiplicando os dois lados de
$du = 3\,dx$ por $\frac{1}{3}$ obtemos $dx = \frac{1}{3}$.

Na caixinha

$$\begin{bmatrix} u = 3x \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

as duas últimas linhas são igualdades entre expressões incompletas. Você viu na P1 como substituir expressões incompletas, como parênteses, bananas e lentes...

Em expressões das formas '$\int \ldots\, dx$' e '$\int \ldots\, du$' o 'dx' e o 'du' fazem papel de "fecha parênteses", e as igualdades $du = 3\,dx$ e $dx = \frac{1}{3}du$ indicam substituições que você vai poder fazer nas integrais do lado esquerda que vão ser parecidas com as da questão 2 da P1.

Exercício 1.
Reescreva os exemplos 1 a 4 da seção 6.2 do livro do Daniel Miranda na notação que eu disse que nós vamos usar, em que todas caixinhas de truques são escritas explicitamente.

Link:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=189

Cálculo 2 - 2021.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Regras e avisos

As regras são as mesmas dos mini-testes e das provas dos outros semestres – veja por exemplo:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf

Exceto que as questões serão disponibilizadas às 0:40 da terça 25/jan/2022 e você vai ter até as 10:00 da quinta 26/jan/2022 pra entregar as respostas, e que eu vou responder perguntas tipo "onde eu encontro mais informações sobre a questão tal?" se elas forem feitas no grupo da turma.

Quase todas as questões desta prova vão ser pré-requisitos pra P2 – a P2 vai supor que você sabe "encontrar a substituição certa" muito bem e que você fez as questões desta prova com muita atenção.

Questão 1
(Total: 9.5 pts)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{DefDif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \;=\; F(b)-F(a) \right) \\
[\text{TFC2}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{EMV1}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b))-f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right) \\
[\text{Alface}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)
\end{array}
$$

Questão 1 (cont.)

a) **(3.0 pts)** Descubra qual é a substituição

“da forma $\begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=? \\ g(t):=? \\ g'(t):=? \end{bmatrix}$” que faz com que isto seja verdade:

$$[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=? \\ g(t):=? \\ g'(t):=? \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} h(-x)\cdot(-1)\,dx = \int_{u=?}^{u=?} h(u)\,du \right)$$

Chame o resultado desta substituição de [Tomate]
e ponha a sua resposta exatamente no mesmo formato
que as definições das fórmulas [EMV2] e [EMV3] daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-int-subst.pdf#page=13

Ou seja, [Tomate] = [Alface][?] = (?).

Questão 1 (cont.)

b) **(2.0 pts)** Qual é o resultado de aplicar a substituição que você obteve e usou no item (a) na "fórmula" [EMV1], que na verdade é uma sequência de igualdades?

Chame a sua fórmula nova de [Repolho]. A sua resposta deve ser neste formato aqui:

$$[\text{Repolho}] \quad = \quad [\text{EMV1}][?] \quad = \quad (?).$$

Questão 1 (cont.)

c) **(1.0 pts)** Seja

$$[\text{Milho}] \quad = \quad [\text{Repolho}] \begin{bmatrix} b{:=}3 \\ a{:=}2 \\ f(t){:=}\ln t \\ h(t){:=}\frac{1}{t} \end{bmatrix}.$$

Escreva o resultado desta substituição explicitamente, no formato:

$$[\text{Milho}] \quad = \quad [\text{Repolho}][?] \quad = \quad (?),$$

Questão 1 (cont.)

d) **(3.5 pts)** Como a gente sabe muito pouco de números complexos a gente considera que o domínio da função $\ln(x)$ é $(0,+\infty)$, e que $\ln(x)$ não está definida, ou "dá erro", quando $x \in (-\infty, 0]$. Alguns programas de computador vão dizer que $\ln(-1) = \pi i$ — mas eles estão usando uma outra definição do ln.

A demonstração [Trilho] da página seguinte mostra dois modos diferentes de calcular uma certa integral — um modo dá erro, e o outro dá um valor fácil de calcular (se você tiver uma calculadora que calcula log)...

Os livros costumam fazer o passo '$\overset{(1)}{=}$' dela como se ele fosse óbvio. Compare com:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=189

Encontre uma substituição da forma [TFC2][?] = (?) que justifique o passo '$\overset{(1)}{=}$' da [Trilho]. Você não vai obter algo exatamente igual à igualdade '$\overset{(1)}{=}$', só algo "equivalente" a ela.

$$
[\text{Trilho}] = \begin{pmatrix}
\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx & = & (\ln x))|_{x=-3}^{x=-2} \\
& = & \ln(-2) - \ln(-3) \\
& = & \textsf{erro} - \textsf{erro} \\
& = & \textsf{erro} \\
\\
\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx & \overset{(1)}{=} & \int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{-u} \cdot (-1)\,du \\
& = & \int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{u}\,du \\
& = & (\ln u)|_{u=3}^{u=2} \\
& = & \ln(2) - \ln(3)
\end{pmatrix}
$$

Questão 2.
(Total: 0.5 pts)

Nas próximas aulas nós vamos aprender os truques pra fazer contas com integrais bem rápido — como no livro do Daniel Miranda; veja o link na questão (1d).

Na definição do '[:=]' que nós usamos até agora ele só substituía variáveis e funções por "expressões completas"... por exemplo, "4+" e ")" não são expressões completas.

Seja [BL] a igualdade abaixo:

$$[\mathrm{BL}] \quad = \quad \left((\!| f(x) |\!) \quad = \quad [\![g(y)]\!] \right)$$

Questão 2 (cont.)

Eu sei que algumas pessoas de Linguagens Funcionais usam as notações ‘$(\!|\ldots|\!)$’ e ‘$[\![\ldots]\!]$’ como se fossem uns tipos especiais de parênteses, e sei que a pronúncia de ‘$(\!|f(x)|\!)$’ é “$f(x)$ entre bananas” e a de ‘$[\![g(y)]\!]$’ é “$g(y)$ entre lentes” – mas não sei o que eles significam.

Lá no início do curso a gente aprendeu a usar o ‘[:=]’ em expressões que a gente não entendia.

Questão 2 (cont.)

Em algumas gambiarras muito específicas a gente vai autorizar o '[:=]' a substituir algumas expressões incompletas (por outras expressões incompletas).

Digamos que nesta questão o '[:=]' está autorizado a substituir o abre-banana, o fecha-banana, o abre-lente e o fecha-lente por outras expressões incompletas.

(0.5 pts) Diga o resultado da substituição abaixo.

$$\Big((\!| f(x) |\!) \;=\; [\![g(y)]\!] \Big) \begin{bmatrix} |\!) & := & +2|\!) \\ ]\!] & := & \cdot 3]\!] \end{bmatrix} \;=\; ?$$

Questão 1: gabarito

a)

$$[\text{Alface}] \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\text{Tomate}] \;=\; [\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=h(t) \\ g(t):=-t \\ g'(t):=-1 \end{bmatrix} \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} h(-x)\cdot(-1)\,dx \;=\; \int_{u=-a}^{u=-b} h(u)\,du \right)$$

b)

$$[\text{EMV1}] \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(g(b)) - f(g(a)) \\ &=& f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{Repolho}] = [\text{EMV1}]\begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=h(t) \\ g(t):=-t \\ g'(t):=-1 \end{bmatrix} \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} h(-x)\cdot(-1)\,dx &=& f(-x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(-b) - f(-a) \\ &=& f(u)\big|_{u=-a}^{u=-b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=-a}^{u=-b} h(u)\,du \end{array} \right)$$

c)

$$[\text{Repolho}] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} h(-x)\cdot(-1)\,dx &=& f(-x)|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(-b)-f(-a) \\ &=& f(u)|_{u=-a}^{u=-b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=-a}^{u=-b} h(u)\,du \end{array}\right)$$

$$[\text{Milho}] = [\text{Repolho}]\left[\begin{smallmatrix} b:=3 \\ a:=2 \\ f(t):=\ln t \\ h(t):=\frac{1}{t} \end{smallmatrix}\right] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{-x}\cdot(-1)\,dx &=& (\ln -x)|_{x=2}^{x=3} \\ &=& (\ln -3)-(\ln -2) \\ &=& (\ln u)|_{u=-2}^{u=-3} \\ &=& \displaystyle\int_{u=-2}^{u=-3} \frac{1}{u}\,du \end{array}\right)$$

d)

$$
\begin{aligned}
[\text{Trilho (1)}] &= \left(\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx \overset{(1)}{=} \int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{-u}\cdot(-1)\,du\right) \\
[\text{Alface}] &= \left(\ \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \ = \ \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\ \right) \\
[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t){:=}f(t) \\ f'(t){:=}\frac{1}{t} \\ g(t){:=}-t \\ g'(t){:=}-1 \end{bmatrix} &= \left(\ \int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{-x}\cdot(-1)\,dx \ = \ \int_{u=-a}^{u=-b} \frac{1}{u}\,du\ \right) \\
[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t){:=}f(t) \\ f'(t){:=}\frac{1}{t} \\ g(t){:=}-t \\ g'(t){:=}-1 \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ u:=x \end{smallmatrix}\right] &= \left(\ \int_{u=a}^{u=b} \frac{1}{-u}\cdot(-1)\,du \ = \ \int_{x=-a}^{x=-b} \frac{1}{x}\,dx\ \right) \\
[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t){:=}f(t) \\ f'(t){:=}\frac{1}{t} \\ g(t){:=}-t \\ g'(t){:=}-1 \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ u:=x \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a:=3 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right] &= \left(\ \int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{-u}\cdot(-1)\,du \ = \ \int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx\ \right) \\
[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t){:=}f(t) \\ f'(t){:=}\frac{1}{t} \\ g(t){:=}-t \\ g'(t){:=}-1 \\ x:=u \\ u:=x \\ a:=3 \\ b:=2 \end{bmatrix} &= \left(\ \int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{-u}\cdot(-1)\,du \ = \ \int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx\ \right)
\end{aligned}
$$

Questão 2: gabarito

$$\left((\!|f(x)|\!) \;\; = \;\; [\![g(y)]\!] \right) \left[\begin{array}{rcl} |\!) & := & +2|\!) \\ ]\!] & := & \cdot 3]\!] \end{array} \right] \;\; = \;\; \left((\!|f(x)+2|\!) \;\; = \;\; [\![g(y)\cdot 3]\!] \right)$$

Cálculo 2 - 2021.2

Aula 26: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Introdução

Seja $(*)$ a EDO abaixo:

$$f'(x) = 2x \qquad (*)$$

Ela tem muitas soluções. Por exemplo, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^2 + 3$ são duas soluções diferentes dela.

Desenhando várias soluções dela num gráfico — veja o próximo slide — dá pra entender como é o conjunto de todas as soluções dela: ele é um conjunto de infinitas curvas disjuntas, que "cobrem o $\mathbb{R}^2$ todo", no sentido de que cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pertence a exatamente uma dessas curvas (ou: "soluções").

Por exemplo, o ponto $(2, 5)$ pertence à solução $f(x) = x^2 + 1$.

A "solução geral" da EDO $f'(x) = 2x$ é $f(x) = x^2 + C$; para obter soluções particulares substituimos esse C por números. Por exemplo, a solução de

$$f'(x) = 2x, \qquad f(2) = 5$$

é $f(x) = x^2 + 1$.

Campos de direções

Vamos agora considerar esta outra EDO:

$$f'(x) = -\frac{x}{y}$$

Nós ainda não sabemos quais são as soluções dela...
Mas existe um jeito simples de interpretar graficamente o que ela quer dizer. Para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ nos permite calcular o coeficiente angular no ponto (x, y) da solução que passa pelo ponto (x, y).
Por exemplo:

$(x,y){=}(-2,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}1$	$(x,y){=}(-1,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}1/2$	$(x,y){=}(0,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}0$	$(x,y){=}(1,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}-1/2$	$(x,y){=}(2,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}-1$
$(x,y){=}(-2,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}2$	$(x,y){=}(-1,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}1$	$(x,y){=}(0,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}0$	$(x,y){=}(1,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}1$	$(x,y){=}(2,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}{=}-2$

Veja as figuras daqui:

http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_15.1_ate_15.3.pdf

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$
b) $\frac{dy}{dx} = x$
c) $\frac{dy}{dx} = 2x$
d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$
e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$
f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$
g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.

Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$
b) $y = \sqrt{x}$
c) $y = 1/x$
d) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Na página seguinte temos o método geral para resolver EDOs com variáveis separáveis. Vou chamá-lo de [EDOVSG] pra podermos discutir como obter casos particulares dele usando a operação '[:=]', ao invés de termos que escrever coisas como "substituindo $f(x)$ por ___ acima obtemos...".

O método [EDOVSG] usa algumas gambiarras — veja o vídeo pra explicações.

$$
[\mathsf{EDOVSG}] = \left(
\begin{array}{c}
\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)} \\[2ex]
g(y)\,dy = f(x)\,dx \\[2ex]
\begin{array}{ccc}
\int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
G(y)+C_1 & & F(x)+C_2
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{rl}
G(y)+C_1 & = F(x)+C_2 \\
G(y) & = F(x)+C_2-C_1 \\
 & = F(x)+C_3
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l}
G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x)+C_3) \\
\quad\shortparallel \\
\quad y
\end{array}
\end{array}
\right)
$$

Digamos que queremos resolver esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Aparentemente dá pra resolvê-la usando

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) := -x \\ g(y) := y \end{bmatrix} ,$$

mas também precisamos das primitivas $F(x)$ e $G(y)$, e da inversa $G^{-1}(y)$... a substituição certa é:

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) := -x \\ g(y) := y \\ F(x) := -\frac{x^2}{2} \\ G(y) := \frac{y^2}{2} \\ G^{-1}(z) := \sqrt{2z} \end{bmatrix}$$

...que dá isto:

$$
\begin{array}{ccc}
\frac{dy}{dx} & = & -\frac{x}{y} \\
y\,dy & = & -x\,dx \\
\int y\,dy & = & \int -x\,dx \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\frac{y^2}{2} + C_1 & & -\frac{x^2}{2} + C_2 \\
\\
\frac{y^2}{2} + C_1 & = & -\frac{x^2}{2} + C_2 \\
\frac{y^2}{2} & = & -\frac{x^2}{2} + C_2 - C_1 \\
 & = & -\frac{x^2}{2} + C_3 \\
\sqrt{2 \cdot \frac{y^2}{2}} & = & \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + C_3\right)} \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
y & & \sqrt{2C_3 - x^2} \\
 & & \shortparallel \\
 & & \sqrt{C_4 - x^2}
\end{array}
$$

(As últimas linhas têm passos extras.)

Como testar uma solução

Digamos que estamos tentando resolver a EDO

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & = & -\dfrac{x}{f(x)}, & \qquad \text{ou:} \\ \dfrac{dy}{dx} & = & -\dfrac{x}{y} & \end{array}$$

e queremos ver se estas duas funções são solução dela:
$f_1(x) = x^2 + 3,\ f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Como testar uma solução (2)

Basta fazer:

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2+3 \\ f'(x) = 2x \end{bmatrix} = \left(2x = -\frac{x}{x^2+3}\right)$$

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{25-x^2} \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \end{bmatrix} = \left(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)$$

e ver se as igualdades da direita são verdadeiras para todo x no domínio de cada função — aliás, nos pontos em que a função é derivável...

A função $f_1(x) = x^2$ está definida em todo $\mathbb{R}$ e é derivável em $\mathbb{R}$, e a função $f_2(x) = \sqrt{25-x^2}$ está definida no intervalo fechado $[-5,5]$ e é derivável no intervalo aberto $(-5,5)$.

Também dá pra testar soluções gerais, basta tratar os 'C's delas como constantes.

Exercício 3.
No exercício 1g você desenhou o campo de direções desta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad (**)$$

e pelo campo de direções você deve ter conseguido ter uma noção de quais são as soluções dela... (dica: hipérboles!)

a) Resolva a EDO $(**)$ fazendo isto aqui:

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) = -1/x \\ g(y) = 1/y \\ F(x) = \color{red}{?} \\ G(y) = \color{red}{?} \\ G^{-1}(y) = \color{red}{?} \end{bmatrix}$$

(Dica: preencha os '?'s corretamente)

Exercício 3.
b) Diga qual é a solução geral.
c) Teste a sua solução geral.
d) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2,3)$.
e) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2,-2)$.

Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{array}{rcl} y &=& 3+\sqrt{x+4}, \quad \text{isto é,} \\ f(x) &=& 3+\sqrt{x+4}, \end{array}$$

e sejam:

$$\begin{array}{rcl} g(y) &=& (y-3)^2+4, \\ h(y) &=& (y-4)^2+3. \end{array}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y) = g(y)$ ou se $f^{-1}(y) = h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1}(f(x)) = x) \left[\begin{smallmatrix} f(x) := 3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-3)^2+4 \end{smallmatrix} \right] &=& {\color{red}?} \\ (f^{-1}(f(x)) = x) \left[\begin{smallmatrix} f(x) := 3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-4)^2+3 \end{smallmatrix} \right] &=& {\color{red}?} \end{array}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& 3+\sqrt{x+4} \\ y &=& 3+\sqrt{x+4} \\ y-3 &=& \sqrt{x+4} \\ (y-3)^2 &=& x+4 \\ (y-3)^2-4 &=& x \\ (y-3)^2-4 &=& f^{-1}(y) \end{array}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.
Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(x) & = & 2+3\sqrt{5x+6} \\
f_2(x) & = & 2+3\sqrt[4]{5x+6} \\
f_3(x) & = & 2+3(4x+5)^6 \\
f_4(x) & = & 2+3\ln(4x+5) \\
f_5(x) & = & 2+3e^{4x+5} \\
f_6(x) & = & \sqrt{2+3e^{4x+5}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
f_7(x) & = & \ln x \\
f_8(x) & = & \ln -x \\
f_9(x) & = & |x| \\
f_{10}(x) & = & \ln |x|
\end{array}$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Resolvendo "direto"

No segundo vídeo sobre esta parte da matéria – este aqui:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs-2.mp4

eu comecei mostrando como resolver a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

depois passei pro caso geral,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

e aí defini o "método" [EDOVSG]... e nos exercícios que vieram depois disso nós usamos o [EDOVSG] e a operação '[:=]'.

Exercício 5.
a) Tente resolver esta EDO "direto",
como no início do vídeo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

E pare quando você chegar neste ponto:

$$y^2 = x + C_4$$

O passo seguinte, se seguirmos o método do vídeo, é

$$y = \pm\sqrt{x + C_4}\ldots$$

Exercício 5 (cont.)
Podemos considerar que temos duas soluções gerais:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= +\sqrt{x+C_4}, \quad \text{e} \\ f_2(x) &= -\sqrt{x+C_4}. \end{aligned}$$

b) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_1(2) = 3$.
c) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_2(4) = -5$.
d) Encontre a solução que passa pelo ponto $(-3, -4)$.

Duas fórmulas. Sejam:

$$[\mathsf{EDOVSG1}] = \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{f(x)}{g(y)} \\ g(y)\,dy &=& f(x)\,dx \\ \int g(y)\,dy &=& \int f(x)\,dx \\ \| && \| \\ G(y)+C_1 && F(x)+C_2 \\ G(y)+C_1 &=& F(x)+C_2 \\ G(y) &=& F(x)+C_2-C_1 \\ &=& F(x)+C_3 \\ G^{-1}(G(y)) &=& G^{-1}(F(x)+C_3) \\ \| && \\ y && \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{EDOVSG2}] = \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{f(x)}{g(y)} \\ y &=& G^{-1}(F(x)+C_3) \end{array} \right)$$

Lembre que eu expliquei nos vídeos que à medida que a matéria dos Cálculos avança cada vez mais coisas passam a ser implícitas ao invés de explícitas...

A linha de cima do [S2I] dizia "Se $F'(u) = f(u)$ então:"...

No [EDOVSG1] e no [EDOVSG2] vai ficar implícito que temos que ter $F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$, $C_3 = C_2 - C_1$, $G^{-1}(G(y))$, e todos os domínios também são omitidos...

Exercício 6.
a) Escreva o resultado da substituição

$$\text{[EDOVSG1]} \begin{bmatrix} f(x) := 2x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := e^y \\ G^{-1}(x) := \ln x \end{bmatrix}$$

e escreva "$=$ [E6]" à direita do seu resultado
pra indicar que nós vamos usar a expressão [E6]
pra nos referir a essa expressãozona.

b) Nessa substituição nós não obedecemos a condição $G'(y) = g(y)$, e isso deve ter feito com que alguns dos '$=$'s na sua [E6] sejam falsos. Quais?

Dica pro exercício 6

O resultado da 6a deve ser algo desta forma:

$$\left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y)\,dy &=& f(x)\,dx \\ \int g(y)\,dy &=& \int f(x)\,dx \\ \parallel && \parallel \\ G(y)+C_1 && F(x)+C_2 \\ G(y)+C_1 &=& F(x)+C_2 \\ G(y) &=& F(x)+C_2-C_1 \\ &=& F(x)+C_3 \\ G^{-1}(G(y)) &=& G^{-1}(F(x)+C_3) \\ \parallel && \\ y && \end{array}\right) \begin{bmatrix} f(x) := 2x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := e^y \\ G^{-1}(x) := \ln x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right) = \text{[E6]}$$

Outra dica...
Faça um retângulo de papel com a [EDOVSG1], como este:
http://angg.twu.net/2021.1-C2/retangulo_de_papel.jpg

Tipos de '='s

Vamos numerar os '='s da [EDOVSG1]:

$$\left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{f(x)}{g(y)} \\
g(y)\,dy & = & f(x)\,dx \\
\int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\
\| & & \| \\
G(y)+C_1 & & F(x)+C_2 \\
G(y)+C_1 & = & F(x)+C_2 \\
G(y) & = & F(x)+C_2-C_1 \\
 & = & F(x)+C_3 \\
G^{-1}(G(y)) & = & G^{-1}(F(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{rcl}
\square & \overset{(1)}{=} & \square \\
\square & \overset{(2)}{=} & \square \\
\int\square & \overset{(3)}{=} & \int\square \\
\|{(4)} & & \|{(5)} \\
\square & & \square \\
\square & \overset{(6)}{=} & \square \\
\square & \overset{(7)}{=} & \square \\
 & \overset{(8)}{=} & \square \\
\square & \overset{(9)}{=} & \square \\
(10)\,\| & & \\
\square & &
\end{array}\right)$$

Cálculo 2 - 2021.2

Aula 28: revisão pra P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

A P2 vai ter duas questões sobre calcular integrais do jeito rápido, omitindo os limites de integração e usando mudanças de variável. Na prova vocês **VÃO TER QUE** calcular essas integrais usando **EXATAMENTE** a notação das caixinhas de truques da MVG, como aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-mud-var-gamb.pdf#page=4

Eu não conheço nenhum livro que explique direito porque é que a gente não pode misturar variáveis... um ou outro livro menciona isso brevemente e supõe que o leitor vai entender o porquê depois de estudar dezenas de horas, mas só.

Exercício 1.
Reescreva os exemplos das páginas 189 a 194 do livro do Daniel Miranda na notação que você vai ter que usar na P2, em que as caixinhas de truques aparecem explicitamente à direita das contas. Link:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf

Os próximos dois exercícios são sobre coisas que o livro do Daniel Miranda explica bem brevemente na página 195 e bem detalhadamente na seção 8.3.

Exercício 2.
A caixinha de truques da MVG pra substituição $s = \operatorname{sen}\theta$ é essa aqui:

$$\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \\ (\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 \\ (\cos\theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen}\theta)^2 \\ (\cos\theta)^2 = 1 - s^2 \end{bmatrix}$$

As últimas linhas dela são opcionais mas são úteis.

a) Use esta caixinha pra integrar $\int (\operatorname{sen}\theta)^2(\cos\theta)^2 \cdot \cos\theta\, d\theta$.
b) Confira a sua resposta derivando o seu resultado.

Exercício 3.

a) Faça uma caixinha de truques da MVG
pra substituição $c = \cos\theta$.

Dica: pode ser que nela apareçam uma coisas como $(-1)dc$ ou $(-1)d\theta$. Alguns livros escrevem isso como $-dc$ ou $-d\theta$, mas eu acho que as contas ficam mais claras com '(-1)' ao invés de '$-$'.

b) Use essa caixinha pra integrar

$$\int (\cos\theta)^2 (\operatorname{sen}\theta)^2 \cdot \operatorname{sen}\theta \, d\theta.$$

c) Confira a sua resposta derivando o seu resultado.

Cálculo 2 - 2021.2

Segunda prova (P2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Regras e dicas

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes, exceto que a prova será disponibilizada às 22:00 da quinta, 3/fev/2022, e você deverá entregá-la até as 22:00 do sábado, 5/fev/2022.

Importante

Os símbolos "[MVG]", "[RP2]" e "[EVS]"
nas questões são referências a estes PDFs:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-mud-var-gamb.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-revisao-pra-P2.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-edovs.pdf

Nas questões 1 e 2 desta prova você **VAI TER QUE** usar a notação das caixinhas de truques do [MVG].

Questão 1.
(Total: 3.0 pts)
Obs: esta questão é muito parecida
com o exercício 3 do [RP2].

a) **(2.0 pts)** Use a substituição $c = \cos\theta$ pra integrar

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^3 (\cos\theta)^3 \, d\theta.$$

b) **(1.0 pts)** Confira a sua resposta derivando-a.

Introdução à questão 2
Os livros costumam ensinar Substituição Trigonométrica exatamente do jeito que o Daniel Miranda faz na seção 8.4 do livro dele — que é um jeito que só funciona pra pessoas com muito mais memória que eu. Pra mim o jeito que usa a caixinha de truques que está explicada aqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-contas-em-C2.pdf#page=8`

é bem mais fácil...
Você **VAI TER QUE** usá-lo na questão 2.

Introdução à questão 2 (cont.)

Dá pra resolver a questão 2 usando mudanças de variáveis bem simples. O objetivo da questão 2 é treinar você pra resolver integrais que só podem ser resolvidas por substituição trigonométrica, então se você resolver a 2 por outros métodos você vai estar treinando outras coisas e contornando o objetivo da questão. Releia o “VAI TER QUE” que eu pus em negrito no slide anterior!

Em alguns outros lugares da prova eu também pedi que a resolução seja feita por um determinando método ou posta num determinado formato. Recomendo que você leve esses pedidos muito a sério.

Questão 2.
(Total: 3.0 pts)

a) **(2.0 pts)** Use o método do slide anterior pra integrar

$$\int s\sqrt{1-s^2}\,ds.$$

b) **(1.0 pts)** Confira a sua resposta derivando-a.

Introdução à questão 3

Na parte do curso sobre EDOs com variáveis separáveis nos vimos um método para resolvê-las...

Nós vimos porque o método funciona — a "demonstração" dele tem umas gambiarras bem difíceis de formalizar — e vimos que podemos aplicar o método mesmo sem entender ele direito, só usando o '[:=]'...

Pra "aplicar o método" nós primeiro usamos o '[:=]' pra obter várias "soluções gerais", e depois pra procurar a solução que passa por um certo ponto (x, y) dado nós precisamos escolher a "solução geral" certa, ajustar umas constantes nela, e depois precisamos testar essa solução.

Introdução à questão 3 (cont.)

Nos slides 19 e 20 do [EVS] eu falei sobre de três tipos de soluções gerais: um com '$\pm\sqrt{\ldots}$' , um com '$+\sqrt{\ldots}$', e um com '$-\sqrt{\ldots}$'.

Às vezes os enunciados vão dizer qual tipo você vai ter que usar e às vezes você vai ter que descobrir o tipo certo.

Uma dica pra questão 3

No slide 21 do [EVS] eu defini as fórmulas [EDOVSG1] e [EDOVSG2]. A [EDOVSG1] é bem grande, e eu recomendo **<u>MUITO</u>** que antes de fazer a questão 3 você copie ela numa folha de papel e recorte-a — como você fez com a [S2I] no início do curso, aqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=10`

Questão 3.
(Total: 5.0 pts)
Seja $(*)$ esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y} \qquad (*)$$

a) **(1.0 pts)** Encontre uma substituição para a [EDOVSG2] que dá a solução geral da EDO $(*)$ com '$\pm\sqrt{\ldots}$' e chame o resultado desta substituição de [Daigoro]. A sua resposta deve ser algo desta forma:

$$[\text{Daigoro}] \quad = \quad [\text{EDOVSG2}] \begin{bmatrix} f(x) = ? \\ g(y) = ? \\ F(x) = ? \\ G(y) = ? \\ G^{-1}(y) = ? \end{bmatrix} \quad = \quad (?)$$

Questão 3 (cont.)

b) **(1.0 pts)** Encontre uma substituição para a [EDOVSG2] que dá a solução da EDO $(*)$ que passa pelo ponto $(x, y) = (2, 3)$. Aqui você vai ter que usar '$+\sqrt{\ldots}$' ou '$-\sqrt{\ldots}$', e a sua resposta deve ser algo desta forma:

$$[\text{Itto}] \quad = \quad [\text{EDOVSG2}]\begin{bmatrix} f(x) = ? \\ g(y) = ? \\ F(x) = ? \\ G(y) = ? \\ G^{-1}(y) = ? \\ C_3 = ? \end{bmatrix} \quad = \quad (?)$$

c) **(1.0 pts)** Verifique a sua solução obedece $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{y}$.
d) **(1.0 pts)** Verifique a sua solução passa pelo ponto $(2, 3)$.

Questão 3 (cont.)

e) **(1.0 pts)** Mostre qual é o resultado de aplicar a substituição que você obteve no item (b) na [EDOVSG1]. O resultado deve ser algo desta forma:

$$[\text{Ogami}] \quad = \quad [\text{EDOVSG1}]\begin{bmatrix} f(x) = ? \\ g(y) = ? \\ F(x) = ? \\ G(y) = ? \\ G^{-1}(y) = ? \\ C_3 = ? \end{bmatrix} \quad = \quad (?)$$

Questão 1: gabarito

a)

$$
\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^3\,d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^2(\cos\theta)^3(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&= \int (1-c^2)(c)^3(-1)\,dc \\
&= \int (c^2-1)(c)^3\,dc \\
&= \int c^5 - c^3\,dc \\
&= \frac{c^6}{6} - \frac{c^4}{4} \\
&= \frac{(\cos\theta)^6}{6} - \frac{(\cos\theta)^4}{4}
\end{aligned}
\qquad
\left[
\begin{array}{c}
c{=}\operatorname{sen}\theta \\
\frac{dc}{d\theta}{=}\frac{d}{d\theta}\cos\theta{=}-\operatorname{sen}\theta \\
dc{=}-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(-1)dc{=}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(\cos\theta)^2{+}(\operatorname{sen}\theta)^2{=}1 \\
(\operatorname{sen}\theta)^2{=}1{-}(\cos\theta)^2 \\
(\operatorname{sen}\theta)^2{=}1{-}c^2
\end{array}
\right]
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta}\left(\frac{(\cos\theta)^6}{6} - \frac{(\cos\theta)^4}{4}\right) \\
&= 6\frac{(\cos\theta)^5}{6}(\cos'\theta) - 4\frac{(\cos\theta)^3}{4}(\cos'\theta) \\
&= ((\cos\theta)^5 - (\cos\theta)^3)(-\operatorname{sen}\theta) \\
&= (\cos\theta)^3((\cos\theta)^2 - 1)(-\operatorname{sen}\theta) \\
&= (\cos\theta)^3(-1)(\operatorname{sen}\theta)^2(-\operatorname{sen}\theta) \\
&= (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)^3
\end{aligned}
$$

Questão 2: gabarito

a)

$$\begin{aligned}
&\int s\sqrt{1-s^2}\,ds \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)(\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
&= \int c^2\cdot(-1)\,dc \\
&= -\tfrac{c^3}{3} \\
&= -\tfrac{(\cos\theta)^3}{3} \\
&= -\tfrac{\sqrt{1-s^2}^3}{3}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}
s{=}\operatorname{sen}\theta \\
\frac{ds}{d\theta}{=}\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta{=}\cos\theta \\
ds{=}\cos\theta\,d\theta \\
1{-}s^2{=}\cos^2\theta \\
\sqrt{1{-}s^2}{=}\cos\theta \\
\theta{=}\operatorname{arcsen}s
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}
c{=}\operatorname{sen}\theta \\
\frac{dc}{d\theta}{=}\frac{d}{d\theta}\cos\theta{=}-\operatorname{sen}\theta \\
dc{=}-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(-1)dc{=}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(\cos\theta)^2{+}(\operatorname{sen}\theta)^2{=}1 \\
(\operatorname{sen}\theta)^2{=}1{-}(\cos\theta)^2 \\
(\operatorname{sen}\theta)^2{=}1{-}c^2
\end{array}\right]$$

b)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(-\frac{\sqrt{1-s^2}^3}{3}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(-\tfrac{1}{3}(1-s^2)^{3/2}\right) \\
&= -\tfrac{1}{3}\tfrac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}\cdot\tfrac{d}{ds}(1-s^2) \\
&= -\tfrac{1}{3}\tfrac{3}{2}(1-s^2)^{1/2}\cdot(-2s) \\
&= s\sqrt{1-s^2}
\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$[\text{EDOVSG2}] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{f(x)}{g(y)} \\ y &=& G^{-1}(F(x)+C_3) \end{array} \right)$$

$$[\text{Daigoro}] = [\text{EDOVSG2}] \begin{bmatrix} f(x)=-4x \\ g(y)=y \\ F(x)=-2x^2 \\ G(y)=y^2/2 \\ G^{-1}(y)=\sqrt{2y} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{-4x}{y} \\ y &=& +\sqrt{2(-2x^2+C_3)} \end{array} \right)$$

$$[\text{Itto}] = [\text{EDOVSG2}] \begin{bmatrix} f(x)=-4x \\ g(y)=y \\ F(x)=-2x^2 \\ G(y)=y^2/2 \\ G^{-1}(y)=\sqrt{2y} \\ C_3=25/2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} &=& \frac{-4x}{y} \\ y &=& +\sqrt{2(-2x^2+25/2)} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} y = \sqrt{2(-2x^2+C_3)} \\ 3 = \sqrt{2(-2(2)^2+C_3)} = \sqrt{-16+2C_3} \\ 9 = -16+2C_3 \\ 2C_3 = 25 \\ C_3 = 25/2 \\ y = \sqrt{2(-2x^2+25/2)} = \sqrt{25-4x^2} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(25-4x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(25-4x^2)^{-1/2}\cdot(-8x) = \frac{-4}{\sqrt{25-4x^2}} \\ \frac{-4x}{y} = \frac{-4}{\sqrt{25-4x^2}} \end{array}$$

Cálculo 2 - 2021.2

Aula nn: frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Na aula passada nós vimos que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$,
e portanto $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$ para $x > 0$.
Nós vamos deixar pra ver depois
como integrar $\int \frac{1}{x}\,dx$ em $x < 0$.

Exercício 1.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5)+4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 + 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 2.

a) together $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)={?}$

b) together $\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)={?}$

c) together $\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)={?}$

Exercício 3.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 3: uma solução pro item (a)

a)
$$\begin{array}{rcl}
\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} &=& \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\
\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} &=& \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&=& \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&=& \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\
c &=& A+B \\
d &=& -Ab-Ba \\
e &=& -a-b \\
f &=& ab
\end{array}$$

Exercício 3: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o '[:=]':

$$\begin{array}{l}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f}\right)\begin{bmatrix} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{bmatrix} \\ =\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}\right),\end{array}$$

e sabemos que esta igualdade é verdade:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{array}{rcl} c &=& A+B \\ d &=& -Ab-Ba \\ e &=& -a-b \\ f &=& ab \end{array}$$

é uma solução para a equação

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \quad \ldots$$

mas não sabemos se é a única solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o '[:=]'. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5)=0:$$

São:

$$\begin{array}{l} ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=2] \;= \\ ((2-2)(2-5)=0) \\ ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=5] \;= \\ ((5-2)(5-5)=0) \end{array}$$

Nenhum livro "básico" define "solução de uma equação" desse jeito — como "a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira" — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são "equações" e "soluções"...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição "as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter 'x'" o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 3: uma solução pro item (b)
Temos duas soluções para

$$(x-a)(x-b) = x^2 - 7x + 10 :$$

uma é $a = 2$ e $b = 5$, e a outra é $a = 5$ e $b = 2$.
Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar.
A gente pode chutar que $a = 5$, $b = 2$, e que c, d, e, f são os que a gente obtém pelo item (a), e aí ver se isso nos leva a uma solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 3: item c
Seja [PFP] esta igualdade aqui – o
"princípio por trás das frações parciais":

$$[\mathrm{PFP}] \quad = \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad = \quad \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251`
e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\mathrm{PFP}] \begin{bmatrix} a{:=}? \\ b{:=}? \\ A{:=}? \\ B{:=}? \end{bmatrix}$$

que "está por trás" da sua solução.

Exercício 3: item d

Agora sejam [PIP1] e [PIP2] estas fórmulas –
os "princípios por trás da integração por partes".
Repare que cada uma delas é um par de igualdades.

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{PIP1}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx & = & f(x)g(x) \\ \int f'(x)g(x)\,dx & = f(x)g(x) - & \int f(x)g'(x)\,dx \end{array} \right) \\
[\text{PIP2}] & = & \left(\begin{array}{rcl} \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx & = & f(x)g(x) \\ \int f(x)g'(x)\,dx & = f(x)g(x) - & \int f'(x)g(x)\,dx \end{array} \right)
\end{array}
$$

d) Resolva o exercício 6.10.3 do livro do Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=206

Você vai precisar usar integração por partes duas vezes nele.
Depois que você resolver esse exercício mostre que em cada
um dos passos em que você usou integração por partes
você usou ou o [PIP1] ou o [PIP2], e mostre que substituições
você usou nesses "PIP"s.

Slogan: contas sem "vai um" podem ser traduzidas pra contas com polinômios.

O que mais nos interessa pra Frações Parciais é divisão com resto. Exemplo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 7 & 7 & 3 & 12 \\ \cline{5-5}
-2 & 4 & & & 231 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 7 & & \\
- & 3 & 6 & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 3 & \\
 & - & 1 & 2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2400 &= 200 \cdot 12 \\
360 &= 30 \cdot 12 \\
12 &= 1 \cdot 12 \\
2772 &= 231 \cdot 12 \\
2773 &= 231 \cdot 12 + 1
\end{aligned}
$$

...e tradução do exemplo para polinômios:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+7x^2+7x+3 & \quad x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-(2x^3+4x^2)} & 2x^2+3x+1 \\
\qquad\quad 3x^2+7x & \\
\qquad \underline{-(3x^2+6x)} & \\
\qquad\qquad\quad 1x+3 & \\
\qquad\qquad \underline{-(1x+2)} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
2x^3+4x^2+0x+0 & = & (2x^2+0x+0)\cdot(x+2) \\
3x^2+6x+0 & = & (3x+0)\cdot(x+2) \\
1x+2 & = & 1\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+1 & = & (2x^2+3x+1)\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+3 & = & (2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1
\end{array}
$$

Exercício 4.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2}\, dx \quad = \quad ?$$

Exercício 5.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide 7 a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original
em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Uma questão da P1 do semestre passado

A questão 3 da P1 do semestre passado,

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.