Cálculo 2 - 2021.2

Aula 19: a definição da integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

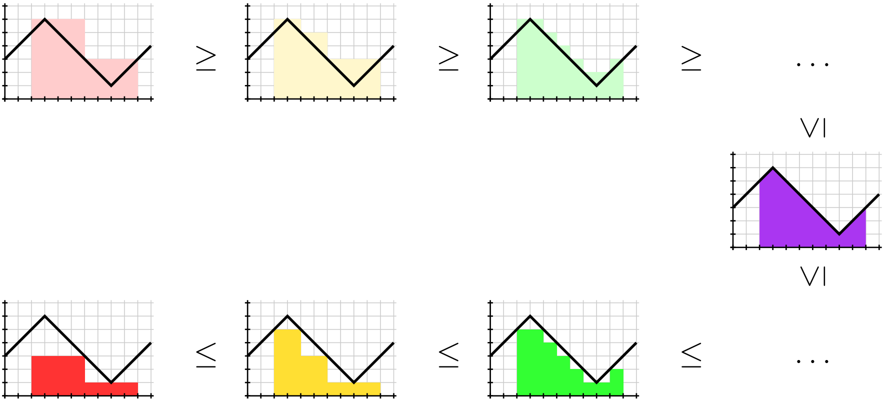
Introdução

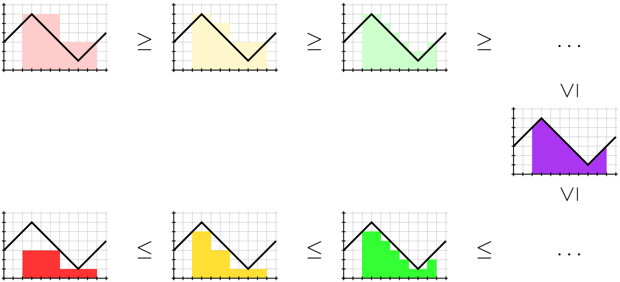
A definição formal da integral é bem complicada.

A gente primeiro tem que definir aproximações por retângulos por cima e por baixo usando sups e infs, depois a gente tem que definir os limites dessas aproximações por cima e por baixo do jeito certo, depois a gente tem que comparar esses limites...

Se o limite por cima e o limite por baixo dão o mesmo resultado então a nossa função é integrável, e a integral dela é o resultado desses limites — mas existem funções que não são integráveis.

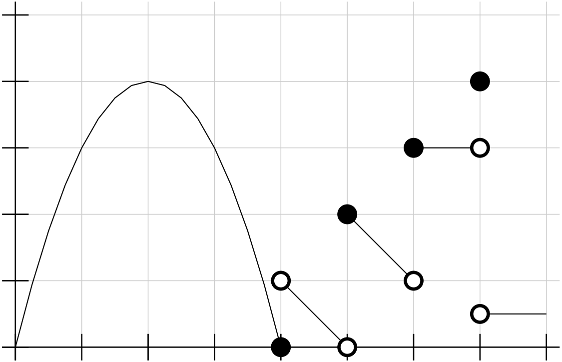
A gente vai ter que definir um monte de abreviações pras expressões matemáticas não ficarem grandes demais, e a gente vai ter que aprender a interpretar graficamente cada expressão... como nos próximos dois slides:



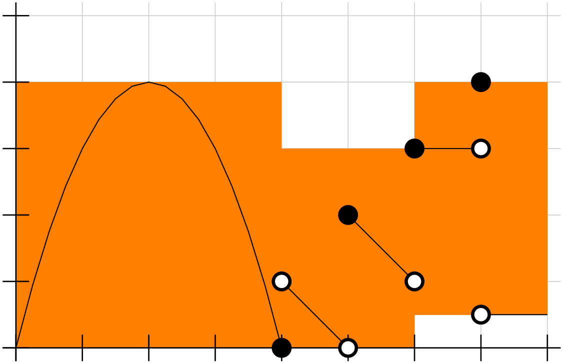


$$\begin{array}{ccccccc}
[\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^1}} & \geq & [\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^2}} & \geq & [\mathrm{sup}]_{[2,10]_{2^3}} & \geq & \ldots \\
&&&&&& \rotatebox{90}{$\leq$} \\
&&&&&& \displaystyle\int_{x=2}^{x=10} f(x)\,dx \\
&&&&&& \rotatebox{90}{$\leq$} \\
[\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^1}} & \leq & [\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^2}} & \leq & [\mathrm{inf}]_{[2,10]_{2^3}} & \leq & \ldots
\end{array}$$

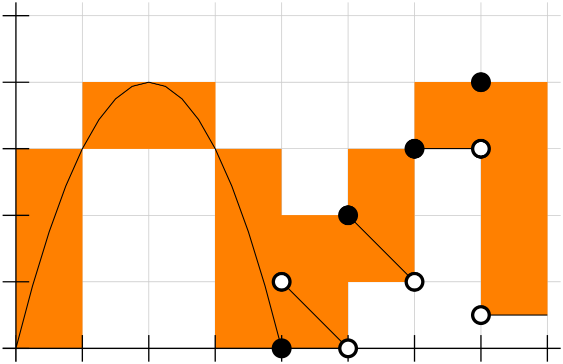
Também podemos desenhar só a diferença entre a aproximação por cima e a por baixo... Aí o resultado vai ser formado por retângulos "flutuando no ar". Se $f(x)$ é esta função mais complicada aqui, então...

$f(x) \quad =$ 

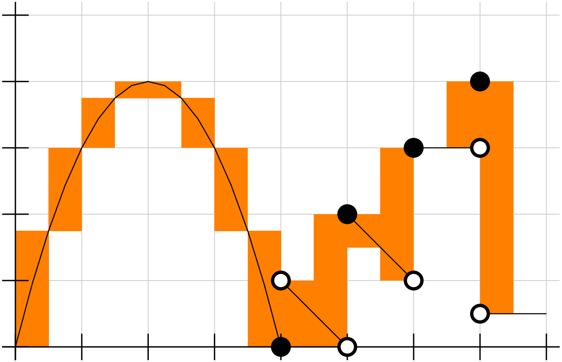
$$\underline{\int}_{[0,8]_{2^2}} f(x)\,dx \;=$$



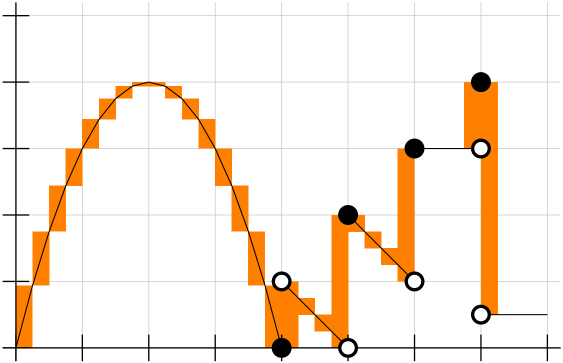
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^3}} f(x)\,dx \quad =$$



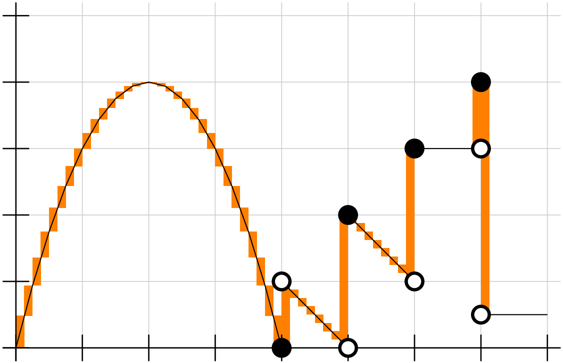
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^4}} f(x)\,dx \;=$$



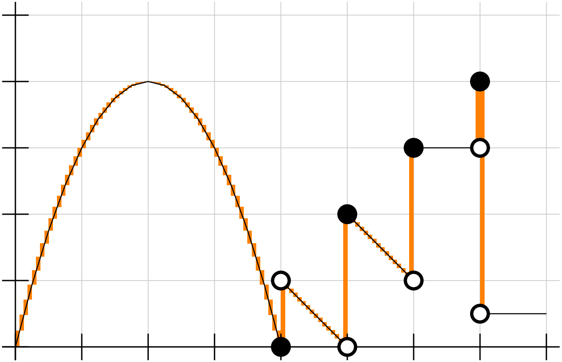
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^5}} f(x)\,dx \quad =$$



$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^6}} f(x)\,dx \;=$$



$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^7}} f(x)\,dx \;=$$



Métodos de integração: nomes

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}
$$

Cada uma dessas fórmulas é um "método de integração". Todos esses "métodos" aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os intervalos têm o mesmo comprimento.

Métodos de integração: nomes (2)

Todas as fórmulas do slide anterior supõem que estamos num contexto em que a partição P está definida.
Se usamos elas com uma partição em subscrito,
como em $[\mathrm{L}]_{\{4,5,7\}}$, isso vai querer dizer
que a partição P vai ser indicada no subscrito.
Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}]_{\{4,5,7\}} & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
& = & f(a_1)(b_1 - a_1) \\
& + & f(a_2)(b_2 - a_2) \\
& = & f(4)(5-4) \\
& + & f(5)(7-5,)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}]_{\{6,7,8,9\}} & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
& = & f(a_1)(b_1 - a_1) \\
& + & f(a_2)(b_2 - a_2) \\
& + & f(a_3)(b_3 - a_2) \\
& = & f(6)(7-6) \\
& + & f(7)(8-7) \\
& + & f(8)(9-8).
\end{array}$$

Nossas partições preferidas

Agora eu vou definir uma notação pra partição que divide um intervalo em N subintervalos iguais:

$$[a,b]_N = \{a,\ a+\tfrac{b-a}{N},\ a+2\tfrac{b-a}{N},\ \ldots,\ b\}$$

Exercício 1.

Calcule:

a) $[4,6]_1$

b) $[4,6]_{2^3}$

Dicas: $2^3 = 8$, e releia isto aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=16

Obs: mais tarde no curso você vai (ter que!) aprender a fazer as suas próprias definições...

Aproximações por cima

Mais duas definições:

A melhor aproximação por cima para a integral de f na partição P é:

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx = [\sup]_P,$$

O limite das aproximações por cima pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\sup]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por cima de f no intervalo $[a,b]$".

Aproximações por baixo

Mais duas definições:

A melhor aproximação por baixo para a integral de f na partição P é:

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx = [\inf]_P,$$

O limite das aproximações por baixo pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\inf]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por baixo de f no intervalo $[a,b]$".

A definição de integral

A nossa definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ vai ser:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;\overset{\Downarrow}{=}\; \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

se a igualdade marcada com '$\overset{\Downarrow}{=}$' for verdade.

Se a igualdade '$\overset{\Downarrow}{=}$' for falsa vamos dizer que:
"$f(x)$ não é integrável no intervalo $[a,b]$",
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não está definida", ou
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ dá erro".

(Compare com $\frac{42}{0}$, que também "não está definido", ou "dá erro"...)

Como esses limites funcionam?

Em Cálculo 1 você viu que algumas funções não são deriváveis.
Agora nós vamos ver que algumas funções não são integráveis.
O melhor modo de visualizar isso é usando estas definições:

$$
\begin{aligned}
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &= \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

Exercício 2.
Faça o exercício 1 do MT1 do semestre passado.
Ele tem gabarito, mas tente fazê-lo sem olhar o gabarito.

Link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-MT1.pdf#page=4`

Dica: reveja o exercício 10 deste PDF:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-infs-e-sups.pdf#page=19`

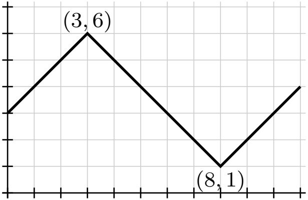
(Tudo a partir daqui vai ser reescrito)

Exercício 15.
a) Verifique que no exercício 14 você desenhou $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^0}} f(x)\,dx$, $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx$, $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx$, e $\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx$.

b) Calcule a área dessas quatro diferenças. Veja o vídeo!

Exercício 10.

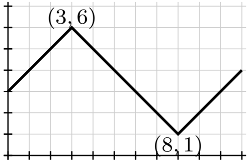
Lembre que:

$f(x) =$ 

a) Calcule $\sup(F([2,4]))$.
b) Calcule $\inf(F([2,4]))$.
c) Calcule $\sup(F([4,7]))$.
d) Calcule $\inf(F([4,7]))$.
e) Calcule $\sup(F([7,9]))$.
f) Calcule $\inf(F([7,9]))$.

Exercício 11.

Lembre que:

$f(x) =$ 

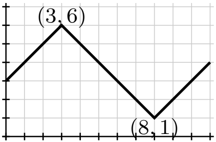
Digamos que $P = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$.
Represente graficamente num gráfico só:

a) $\sum_{i=1}^{N} \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)$,
b) a curva $y = f(x)$,
c) $\sum_{i=1}^{N} \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)$.

e verifique que você obteve algo bem parecido com a figura do slide 2.

Exercício 12.

Lembre que:

$f(x) =$ 

Em cada um dos itens abaixo represente graficamente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os dois somatórios pedidos.

a) $[\mathrm{sup}]_{\{1,10\}}$, $[\mathrm{inf}]_{\{1,10\}}$

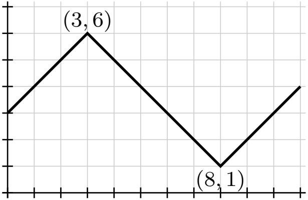
b) $[\mathrm{sup}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$, $[\mathrm{inf}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$

c) $[\mathrm{sup}]_{\{1,2,4,5,6,7,9,10\}}$, $[\mathrm{inf}]_{\{1,2,4,5,6,7,9,10\}}$

d) $[\mathrm{max}]_{\{1,10\}}$, $[\mathrm{min}]_{\{1,10\}}$

e) $[\mathrm{max}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$, $[\mathrm{min}]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$

Exercício 14.
Lembre que:

$f(x) =$ 

Em cada um dos itens abaixo represente graficamente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os dois somatórios pedidos.

a) $[\sup]_{[2,10]_{2^0}}$, $[\inf]_{[2,10]_{2^0}}$

b) $[\sup]_{[2,10]_{2^1}}$, $[\inf]_{[2,10]_{2^1}}$

c) $[\sup]_{[2,10]_{2^2}}$, $[\inf]_{[2,10]_{2^2}}$

d) $[\sup]_{[2,10]_{2^3}}$, $[\inf]_{[2,10]_{2^3}}$

Exercício 16.
Identifique nas figuras dos próximos dois slides:

$$\overline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \overline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x)\,dx,$$

$$\underline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \underline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x)\,dx,$$

$$\overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^1}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^2}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^3}} f(x)\,dx,\quad \overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^4}} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x=2}^{x=10} f(x)\,dx.$$

Dica: os "$\overline{\underline{\int}}_P \ldots dx$"s são feitos de "retângulos flutuando no ar", não de retângulos cujas bases estão em $y = 0$.