Cálculo 2 - 2021.2

Aula 26: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Introdução

Seja $(*)$ a EDO abaixo:

$$f'(x) = 2x \qquad (*)$$

Ela tem muitas soluções. Por exemplo, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^2 + 3$ são duas soluções diferentes dela.

Desenhando várias soluções dela num gráfico — veja o próximo slide — dá pra entender como é o conjunto de todas as soluções dela: ele é um conjunto de infinitas curvas disjuntas, que "cobrem o $\mathbb{R}^2$ todo", no sentido de que cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pertence a exatamente uma dessas curvas (ou: "soluções").

Por exemplo, o ponto $(2, 5)$ pertence à solução $f(x) = x^2 + 1$.

A “solução geral” da EDO $f'(x) = 2x$ é $f(x) = x^2 + C$; para obter soluções particulares substituimos esse C por números. Por exemplo, a solução de

$$f'(x) = 2x, \qquad f(2) = 5$$

é $f(x) = x^2 + 1$.

Campos de direções

Vamos agora considerar esta outra EDO:

$$f'(x) = -\frac{x}{y}$$

Nós ainda não sabemos quais são as soluções dela...
Mas existe um jeito simples de interpretar graficamente o que ela quer dizer. Para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ nos permite calcular o coeficiente angular no ponto (x, y) da solução que passa pelo ponto (x, y).
Por exemplo:

$(x,y)=(-2,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(-1,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1/2$	$(x,y)=(0,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$	$(x,y)=(1,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1/2$	$(x,y)=(2,2)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1$
$(x,y)=(-2,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2$	$(x,y)=(-1,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(0,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$	$(x,y)=(1,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(x,y)=(2,1)$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2$

Veja as figuras daqui:

http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_15.1_ate_15.3.pdf

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando $\frac{dy}{dx} = \infty$ desenhe o tracinho na vertical.

a) $\frac{dy}{dx} = -1$

b) $\frac{dy}{dx} = x$

c) $\frac{dy}{dx} = 2x$

d) $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e) $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f) $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g) $\frac{dy}{dx} = -y/x$

Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhômetro a partir dos campos de direções delas.

Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a) $y = x^2$
b) $y = \sqrt{x}$
c) $y = 1/x$
d) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Na página seguinte temos o método geral para resolver EDOs com variáveis separáveis. Vou chamá-lo de [EDOVSG] pra podermos discutir como obter casos particulares dele usando a operação '[:=]', ao invés de termos que escrever coisas como "substituindo $f(x)$ por ___ acima obtemos...".

O método [EDOVSG] usa algumas gambiarras — veja o vídeo pra explicações.

$$[\text{EDOVSG}] = \left(\begin{array}{c}
\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)} \\[2ex]
g(y)\,dy = f(x)\,dx \\[2ex]
\begin{array}{ccc}
\int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\
\Vert & & \Vert \\
G(y)+C_1 & & F(x)+C_2
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{rl}
G(y)+C_1 & = F(x)+C_2 \\
G(y) & = F(x)+C_2-C_1 \\
 & = F(x)+C_3
\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{cl}
G^{-1}(G(y)) & = G^{-1}(F(x)+C_3) \\
\Vert & \\
y &
\end{array}
\end{array} \right)$$

Digamos que queremos resolver esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Aparentemente dá pra resolvê-la usando

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) := -x \\ g(y) := y \end{bmatrix} \ ,$$

mas também precisamos das primitivas $F(x)$ e $G(y)$, e da inversa $G^{-1}(y)$... a substituição certa é:

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) := -x \\ g(y) := y \\ F(x) := -\frac{x^2}{2} \\ G(y) := \frac{y^2}{2} \\ G^{-1}(z) := \sqrt{2z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\begin{array}{ccc} \int y\,dy & = & \int -x\,dx \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \frac{y^2}{2}+C_1 & & -\frac{x^2}{2}+C_2 \end{array}$$

$$\frac{y^2}{2}+C_1 = -\frac{x^2}{2}+C_2$$

...que dá isto:

$$\begin{array}{rcl} \frac{y^2}{2} & = & -\frac{x^2}{2}+C_2-C_1 \\ & = & -\frac{x^2}{2}+C_3 \\ \sqrt{2\cdot\frac{y^2}{2}} & = & \sqrt{2\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+C_3\right)} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ y & & \sqrt{2C_3-x^2} \\ & & \shortparallel \\ & & \sqrt{C_4-x^2} \end{array}$$

(As últimas linhas têm passos extras.)

Como testar uma solução

Digamos que estamos tentando resolver a EDO

$$\begin{array}{rcll} f'(x) & = & -\dfrac{x}{f(x)}, & \qquad \text{ou:} \\ \dfrac{dy}{dx} & = & -\dfrac{x}{y} & \end{array}$$

e queremos ver se estas duas funções são solução dela:
$f_1(x) = x^2 + 3$, $f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Como testar uma solução (2)

Basta fazer:

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2+3 \\ f'(x) = 2x \end{bmatrix} \;=\; \left(2x = -\frac{x}{x^2+3}\right)$$

$$\left(f'(x) = -\frac{x}{f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{25-x^2} \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \end{bmatrix} \;=\; \left(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)$$

e ver se as igualdades da direita são verdadeiras para todo x no domínio de cada função — aliás, nos pontos em que a função é derivável...

A função $f_1(x) = x^2$ está definida em todo $\mathbb{R}$ e é derivável em $\mathbb{R}$, e a função $f_2(x) = \sqrt{25-x^2}$ está definida no intervalo fechado $[-5,5]$ e é derivável no intervalo aberto $(-5,5)$.

Também dá pra testar soluções gerais, basta tratar os 'C's delas como constantes.

Exercício 3.
No exercício 1g você desenhou o campo de direções desta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad (**)$$

e pelo campo de direções você deve ter conseguido ter uma noção de quais são as soluções dela... (dica: hipérboles!)

a) Resolva a EDO (∗∗) fazendo isto aqui:

$$[\mathsf{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) = -1/x \\ g(y) = 1/y \\ F(x) = \textcolor{red}{?} \\ G(y) = \textcolor{red}{?} \\ G^{-1}(y) = \textcolor{red}{?} \end{bmatrix}$$

(Dica: preencha os '?'s corretamente)

Exercício 3.

b) Diga qual é a solução geral.

c) Teste a sua solução geral.

d) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2, 3)$.

e) Obtenha a solução que passa pelo ponto $(2, -2)$.

Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{array}{rcl} y &=& 3+\sqrt{x+4}, \quad \text{isto é,} \\ f(x) &=& 3+\sqrt{x+4}, \end{array}$$

e sejam:

$$\begin{array}{rcl} g(y) &=& (y-3)^2+4, \\ h(y) &=& (y-4)^2+3. \end{array}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se $f^{-1}(y)=g(y)$ ou se $f^{-1}(y)=h(y)$... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1}(f(x))=x)\left[\begin{smallmatrix} f(x):=3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y):=(y-3)^2+4 \end{smallmatrix}\right] &=& \color{red}{?} \\ (f^{-1}(f(x))=x)\left[\begin{smallmatrix} f(x):=3+\sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y):=(y-4)^2+3 \end{smallmatrix}\right] &=& \color{red}{?} \end{array}$$

Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 3+\sqrt{x+4} \\ y & = & 3+\sqrt{x+4} \\ y-3 & = & \sqrt{x+4} \\ (y-3)^2 & = & x+4 \\ (y-3)^2-4 & = & x \\ (y-3)^2-4 & = & f^{-1}(y) \end{array}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

Exercício 4.
Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(x) & = & 2+3\sqrt{5x+6} \\
f_2(x) & = & 2+3\sqrt[4]{5x+6} \\
f_3(x) & = & 2+3(4x+5)^6 \\
f_4(x) & = & 2+3\ln(4x+5) \\
f_5(x) & = & 2+3e^{4x+5} \\
f_6(x) & = & \sqrt{2+3e^{4x+5}} \\
\\
f_7(x) & = & \ln x \\
f_8(x) & = & \ln -x \\
f_9(x) & = & |x| \\
f_{10}(x) & = & \ln |x|
\end{array}$$

Porque é que $f_9^{-1}(x)$ e $f_{10}^{-1}(x)$ não existem?

Resolvendo "direto"

No segundo vídeo sobre esta parte da matéria – este aqui:

`http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs-2.mp4`

eu comecei mostrando como resolver a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

depois passei pro caso geral,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

e aí defini o "método" [EDOVSG]... e nos exercícios que vieram depois disso nós usamos o [EDOVSG] e a operação '[:=]'.

Exercício 5.
a) Tente resolver esta EDO “direto”,
como no início do vídeo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

E pare quando você chegar neste ponto:

$$y^2 = x + C_4$$

O passo seguinte, se seguirmos o método do vídeo, é

$$y = \pm\sqrt{x + C_4}...$$

Exercício 5 (cont.)
Podemos considerar que temos duas soluções gerais:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) & = & +\sqrt{x+C_4}, \quad \text{e} \\ f_2(x) & = & -\sqrt{x+C_4}. \end{array}$$

b) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_1(2) = 3$.
c) Encontre o valor que C_4 que faz com que $f_2(4) = -5$.
d) Encontre a solução que passa pelo ponto $(-3, -4)$.

Duas fórmulas. Sejam:

$$
[\mathsf{EDOVSG1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{f(x)}{g(y)} \\
g(y)\,dy & = & f(x)\,dx \\
\int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\
\| \quad & & \| \\
G(y)+C_1 & & F(x)+C_2 \\
G(y)+C_1 & = & F(x)+C_2 \\
G(y) & = & F(x)+C_2-C_1 \\
 & = & F(x)+C_3 \\
G^{-1}(G(y)) & = & G^{-1}(F(x)+C_3) \\
\| \quad & & \\
y \quad & &
\end{array} \right)
$$

$$
[\mathsf{EDOVSG2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{f(x)}{g(y)} \\
y & = & G^{-1}(F(x)+C_3)
\end{array} \right)
$$

Lembre que eu expliquei nos vídeos que à medida que a matéria dos Cálculos avança cada vez mais coisas passam a ser implícitas ao invés de explícitas...

A linha de cima do [S2I] dizia "Se $F'(u) = f(u)$ então:"...

No [EDOVSG1] e no [EDOVSG2] vai ficar implícito que temos que ter $F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$, $C_3 = C_2 - C_1$, $G^{-1}(G(y))$, e todos os domínios também são omitidos...

Exercício 6.
a) Escreva o resultado da substituição

$$[\mathsf{EDOVSG1}] \begin{bmatrix} f(x) := 2x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := e^y \\ G^{-1}(x) := \ln x \end{bmatrix}$$

e escreva "$= [\mathsf{E6}]$" à direita do seu resultado
pra indicar que nós vamos usar a expressão $[\mathsf{E6}]$
pra nos referir a essa expressãozona.

b) Nessa substituição nós não obedecemos a condição
$G'(y) = g(y)$, e isso deve ter feito com que alguns dos
'='s na sua $[\mathsf{E6}]$ sejam falsos. Quais?

Dica pro exercício 6

O resultado da 6a deve ser algo desta forma:

$$\left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y)\,dy & = & f(x)\,dx \\ \int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\ \| & & \| \\ G(y)+C_1 & & F(x)+C_2 \\ G(y)+C_1 & = & F(x)+C_2 \\ G(y) & = & F(x)+C_2-C_1 \\ & = & F(x)+C_3 \\ G^{-1}(G(y)) & = & G^{-1}(F(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array}\right) \begin{bmatrix} f(x) := 2x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := e^y \\ G^{-1}(x) := \ln x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right) = \text{[E6]}$$

Outra dica...

Faça um retângulo de papel com a [EDOVSG1], como este:

http://angg.twu.net/2021.1-C2/retangulo_de_papel.jpg

Tipos de ‘=’s

Vamos numerar os ‘=’s da [EDOVSG1]:

$$
\left(
\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{f(x)}{g(y)} \\
g(y)\,dy & = & f(x)\,dx \\
\int g(y)\,dy & = & \int f(x)\,dx \\
\| & & \quad \| \\
G(y)+C_1 & & F(x)+C_2 \\
G(y)+C_1 & = & F(x)+C_2 \\
G(y) & = & F(x)+C_2-C_1 \\
 & = & F(x)+C_3 \\
G^{-1}(G(y)) & = & G^{-1}(F(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}
\right)
\qquad
\left(
\begin{array}{rcl}
\square & \overset{(1)}{=} & \square \\
\square & \overset{(2)}{=} & \square \\
\int\square & \overset{(3)}{=} & \int\square \\
\|(4) & & \|(5) \\
\square & & \square \\
\square & \overset{(6)}{=} & \square \\
\square & \overset{(7)}{=} & \square \\
 & \overset{(8)}{=} & \square \\
\square & \overset{(9)}{=} & \square \\
(10)\,\| & & \\
\square & &
\end{array}
\right)
$$