Cálculo 2 - 2021.2

Aula 17: infs e sups

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Introdução

Infs e sups são um dos assuntos secundários de Cálculo 2 que vão ser mais úteis para as matérias seguintes. Infs e sups vão aparecer *explicitamente* nas próximas matérias muito poucas vezes, mas pra aprender infs e sups a gente vai ter que aprender as quatro coisas absurdamente úteis abaixo. Vamos ter que:

- aprender um certa linguagem formal pra descrever conjuntos – chamada de "set comprehensions" em inglês. Vou adaptar o material daqui:

  http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8

- aprender a visualizar certas operações – usando "tipos" e os truques com bolinhas brancas e pretas que nós começamos a ver nas páginas 11 até 20 deste PDF daqui:

  http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf

- aprender a lidar com contas que à primeira vista exigiriam um número infinito de operações e portanto um número infinito de páginas. Lembre que Cálculo 2 não é Cálculo 1 – em Cálculo 1 a gente aprende a fazer contas que chegam direto na solução, mas Cálculo 2 é baseado em chutar e testar, e nesta parte da matéria nós vamos usar o "chutar e testar" pra reconhecer padrões... aí ao invés da gente fazer as contas pra infinitos casos um de cada vez a gente vai começar fazendo elas pra, digamos, 5 casos, e ver se com esses 5 casos a gente consegue entender visualmente o que as nossas contas "querem dizer".

- aprender a fazer argumentos informais, com desenhos e explicações em português, que todo mundo entenda. Releia este PDF aqui:

  http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2-4.pdf

Set comprehensions

Quando eu dava Geometria Analítica e as aulas eram presenciais eu começava o curso com uns exercícios de "set comprehensions" – os das páginas 8 a 12 deste PDF:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8

Eu dividia a turma em grupos de 5 pessoas e dizia: "tentem entender isso aqui a partir dos exemplos e das poucas explicações em português. Vocês *provavelmente* vão conseguir entender quase tudo só discutindo entre vocês, tentando fazer os exercícios – inclusive os que têm umas pegadinhas difíceis – e comparando os resultados de vocês com os dos colegas, mas qualquer coisa me chamem"... e eu ficava circulando pela sala ajudando os grupos. Isso funcionava super bem, e geralmente em uma aula só de duas horas quase todo mundo conseguia fazer os exercícios.

Set comprehensions (2)

Como 1) as turmas estão meio desanimadas, com pouca gente participando das discussões e 2) todo mundo já fez Prog 1, eu vou usar um método diferente. Eu vou complementar a parte de "set compreensions" do "Material para GA" mostrando como traduzir as notações dele pra um pseudocódigo bem parecido com `C`, e a gente vai seguir direto pros exercícios com mais cara de Cálculo 2 e de infs e sups.

Basicamente:

- cada "gerador" vira um `for`,
- cada "filtro" vira um `if`,
- a "expressão" que aparece depois do ponto e vírgula na notação $\{\ldots\;;\;\ldots\}$ vira um `printf`,
- a tradução pra pseudo-`C` fica bem mais fácil se a gente primeiro traduzir as duas notações $\{\ldots\mid\ldots\}$ pra notação $\{\ldots\;;\;\ldots\}$.

Set comprehensions: um exemplo de tradução

$$\{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{gerador}},\ \underbrace{a\neq 3}_{\text{filtro}},\ \underbrace{b\in\{5,6,7\}}_{\text{gerador}}\ ;\ \underbrace{10a+b}_{\text{expressão}}\}$$

Vira:

```
for(a=1; a<=4; a++) {
  if (a!=3) {
    for(b=5; b<=7; b++) {
      printf("%d\n", 10*a + b);
    }
  }
}
```

Traduzindo '∀' e '∃'
Também dá pra gente traduzir pra pseudo-`C` expressões com '∀' e '∃'. Elas viram funções:

$\forall a \in A.P(a) \quad \rightsquigarrow$

```
for(a ∈ A) {
  if (¬P(a)) {
    return F;
  }
}
return V;
```

$\exists b \in B.Q(b) \quad \rightsquigarrow$

```
for(b ∈ B) {
  if (Q(b)) {
    return V;
  }
}
return F;
```

Nos próximos exercícios nós vamos tentar entender a sequência de definições abaixo como uma espécie de programa em que cada linha calcula o valor de uma variável nova a partir das variáveis anteriores...

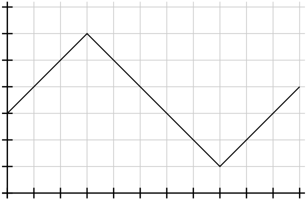
$$\begin{array}{rcl}
C & = & \{\, (b, f(b)) \mid b \in B \,\}, \\
D & = & \{\, f(b) \mid b \in B \,\}, \\
D' & = & \{\, d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d \,\}, \\
L & = & \{\, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d \,\}, \\
U & = & \{\, u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u \,\},
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl}
\mathbf{L} & : & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} & \to & \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\
& & y & \mapsto & (y \in L \text{ e } \forall \ell \in L. \ell \leq y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl}
\mathbf{U} & : & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} & \to & \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\
& & y & \mapsto & (y \in U \text{ e } \forall u \in U. y \leq u)
\end{array}$$

Essa sequência de definições supõe que f e B são conhecidas, e que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.
Nós vamos começar com um monte de exercícios nos quais f é a função que estávamos usando no último PDF – esta aqui,

$f(x) =$

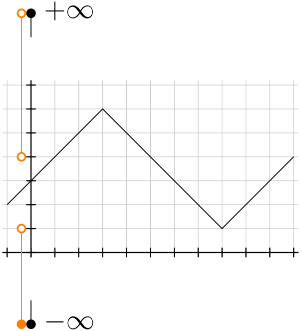


$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$$

e o conjunto B vai ser diferente em cada exercício.

Nós vamos usar algumas gambiarras pra representar subconjuntos de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ no eixo vertical... Vamos representar o $-\infty$ e o $+\infty$ muito mais perto do que onde eles deveriam estar e vamos desenhar alguns subconjuntos um pouco à esquerda do eixo y:

$[-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \quad =$



Exercício 1.

Sejam $B = \{7,8,9\}$, f a função do slide 8, e:

$$
\begin{array}{rcl}
C &=& \{\,(b,f(b)) \mid b \in B\,\}, \\
D &=& \{\,f(b) \mid b \in B\,\}, \\
D' &=& \{\,d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d\,\}, \\
L &=& \{\,\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d\,\}, \\
U &=& \{\,u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u\,\},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcl}
\mathbf{L} &:& \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} &\to& \{\mathbf{V},\mathbf{F}\} \\
&& y &\mapsto& (y \in L \text{ e } \forall \ell \in L. \ell \leq y)
\end{array}
$$

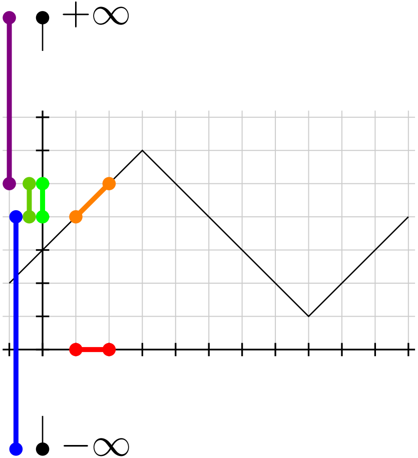
$$
\begin{array}{rcrcl}
\mathbf{U} &:& \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\} &\to& \{\mathbf{V},\mathbf{F}\} \\
&& y &\mapsto& (y \in U \text{ e } \forall u \in U. y \leq u)
\end{array}
$$

a) Calcule C, D, D', L e U e represente-os graficamente.
b) Calcule $\mathbf{L}(0), \mathbf{L}(1), \mathbf{L}(2), \mathbf{L}(3)$.
c) Calcule $\mathbf{U}(0), \mathbf{U}(1), \mathbf{U}(2), \mathbf{U}(3)$.
d) Represente graficamente $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$ usando "infinitas" bolinhas pretas e brancas pra cada um.

Dica: preste atenção no que é minúsculo e maiúsculo e nas fontes... L, ℓ e $\mathbf{L}$ são coisas completamente diferentes. Use uma pronúncia diferente pra cada um – por exemplo "élezão", "élezinho" e "éle bold". Pronuncie $\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ como "$\mathbb{R}$ estendido".

Uma figura

Se $B = [1, 2]$ temos:



Exercício 2.
Itens a, b, c, d: Faça a mesma coisa que você fez no exercício 1, mas agora com $B = [7, 9]$.

Agora os conjuntos B, C, D e D' vão ser infinitos e isso vai fazer alguns passos serem bem mais complicados.

e) A interseção $L \cap D$ é vazia? E a interseção $L \cap U$?

Exercício 3.
Itens a, b, c, d: Faça a mesma coisa que você fez no exercício 1, mas agora com $B = (7, 9)$.

e) A interseção $L \cap D$ é vazia? E a interseção $L \cap U$?

A definição de sup e inf

Aqui:

$$\begin{array}{rcl} L & = & \{\, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d \,\}, \\ U & = & \{\, u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u \,\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{L} & : & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} & \to & \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\ & & y & \mapsto & (y \in L \text{ e } \forall \ell \in L. \ell \leq y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{U} & : & \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} & \to & \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \\ & & y & \mapsto & (y \in U \text{ e } \forall u \in U. y \leq u) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\alpha \text{ é o inf de } D) & \leftrightarrow & \mathbf{L}(\alpha) \\ (\beta \text{ é o inf de } D) & \leftrightarrow & \mathbf{U}(\beta) \end{array}$$

Isto é verdade mas é difícil de demonstrar:
a) $\forall D \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}). \exists! \alpha \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}). (\alpha \text{ é o inf de } D)$
b) $\forall D \subset (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}). \exists! \beta \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}). (\beta \text{ é o inf de } D)$

...e é por isso que nós vamos poder tratar o sup e o inf como funções
que recebem como input qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ estendido
e retornam como output algum elemento de $\mathbb{R}$ estendido.

Exercício 4.
Seja $D = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
a) Calcule L, U, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\inf(D)$ e $\sup(D)$ e represente-os graficamente.
b) É verdade que $\inf(D) \in D$?
c) É verdade que $\sup(D) \in D$?

Exercício 5.
Seja $D = (2, 3) \cup (4, 5)$.
a) Calcule L, U, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\inf(D)$ e $\sup(D)$ e represente-os graficamente.
b) É verdade que $\inf(D) \in D$?
c) É verdade que $\sup(D) \in D$?

Exercício 6.
Seja $D = \mathbb{R}$.
a) Calcule L, U, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\inf(D)$ e $\sup(D)$ e represente-os graficamente.
b) É verdade que $\inf(D) \in D$?
c) É verdade que $\sup(D) \in D$?

Exercício 7.
Seja $D = \emptyset$.
a) Calcule L, U, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$, $\inf(D)$ e $\sup(D)$ e represente-os graficamente.
b) É verdade que $\inf(D) \in D$?
c) É verdade que $\sup(D) \in D$?
d) É verdade que $\inf(D) \leq \sup(D)$?

Exercício 8.
O slogan é "sups e infs dão as melhores aproximações por retângulos por cima e por baixo". Neste exercício e no próximo nós vamos entender o que isso quer dizer.

Sejam f a função do slide 8, $a = 2$, $b = 10$, $B = [a, b]$.

a) Desenhe num gráfico só: $f, a, b, B = [a, b], C, D = F(B)$, $\inf(F([a, b])), \min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b)), \sup(F([a, b]))$.

Obs: quando escrevemos "$D = F(B)$" na lista de itens ao invés de "$D, F(B)$" isso quer dizer "é fácil ver que D e $F(B)$ vão dar o mesmo resultado".

Obs 2: a definição de $F(B)$ está aqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=5`

Exercício 9.
O próximo slogan importante é este (duplo!):

> "o retângulo $\sup(F([a,b])) \cdot (b-a)$ é o retângulo mais baixo que está todo acima do gráfico da f, e o retângulo $\inf(F([a,b])) \cdot (b-a)$ é o retângulo mais alto que está todo abaixo do gráfico da f."

Sejam f a função do slide 8, $a = 2$, $b = 10$.

a) Desenhe num gráfico só: f,
$\sup(F([a,b])) \cdot (b-a)$,
$\inf(F([a,b])) \cdot (b-a)$.

Isto é parecido com o que você fez no MT1:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT1.pdf#page=5

Exercício 9 (cont.)

b) Interprete visualmente esta expressão:

$$\forall x \in [a,b].\ f(x) \leq \sup(F([a,b]))$$

Dica: você vai precisar de infinitos passos como este aqui:

> Compare a altura dos pontos $(2.34, f(2.34))$ e $(2.34, \sup(F([a,b])))$. Se o ponto $(2.34, f(2.34))$ estiver abaixo do ponto $(2.34, \sup(F([a,b])))$ então $f(2.34) \leq \sup(F([a,b]))$ é verdade e desenhamos uma bolinha preta em $x = 2.34$; senão desenhamos uma bolinha branca em $x = 2.34$.

Exercício 9 (cont.)

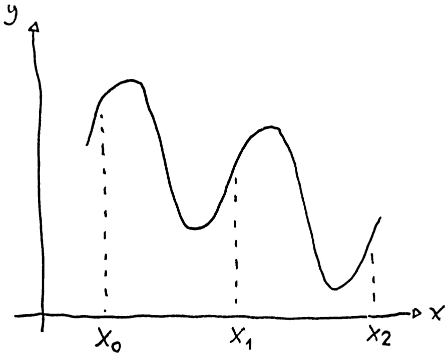
Agora verifique – visualmente! –
se cada uma das expressões abaixo é
verdadeira ou falsa:

c) $\forall x \in [a,b].\ f(x) \leq \sup(F([a,b]))$
d) $\forall x \in [a,b].\ \inf(F([a,b])) \leq f(x)$

e) $\forall x \in [a,b].\ f(x) \leq \sup(F([a,b])) - 0.1$
f) $\forall x \in [a,b].\ \inf(F([a,b])) + 0.1 \leq f(x)$

Exercício 10.

Agora que você entendeu visualmente o que $\sup(F([a,b]))$ e $\inf(F([a,b]))$ querem dizer faça duas cópias à mão do desenho abaixo, e...



Exercício 10 (cont.)

a) desenhe sobre a primeira delas

$$\sup(F([x_0, x_1])) \cdot (x_1 - x_0) + \sup(F([x_1, x_2])) \cdot (x_2 - x_1),$$

b) desenhe sobre a segunda delas

$$\inf(F([x_0, x_1])) \cdot (x_1 - x_0) + \inf(F([x_1, x_2])) \cdot (x_2 - x_1).$$