Cálculo 2 - 2021.2

Aula 22: integração por substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

No mini-teste 3 - link:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT3.pdf#page=4

vocês viram que quando a função G "é uma integral da f" nós podemos fazer contas como esta aqui:

$$\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx \quad = \quad G(5) - G(2)$$

Isto é um caso particular do TFC2, que tem várias versões diferentes... a fórmula dele é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$$

Neste semestre eu vou tentar
explicar o TFC2 e as consequências dele —
tipo: TODAS as técnicas de integração são
consequência do TFC2 — com uma abordagem
diferente da do semestre passado.

Dê uma olhada nestes slides do semestre passado:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-os-dois-TFCs.pdf`
Leia as páginas 2 até 4 dele,
a definição no fim da página 7,
e as páginas 10 até 12.

Exercício 1.
Faça os exercícios 1, 2 e 3 do PDF acima —
mas ao invés de fazer o 2 como eu pedi no semestre
passado faça esta versão modificada dele:

$$[\text{TFC2}]\begin{pmatrix} F(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ F'(x) := 4x - x^2 \\ b := 4 \\ a := 0 \end{pmatrix} \quad = \quad {\color{red}?}$$

Exercício 2.
Assista este vídeo,
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-C2-int-subst.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=YbVfNi-xGNw`
e depois tente entender cada uma
das igualdades do slide 7.

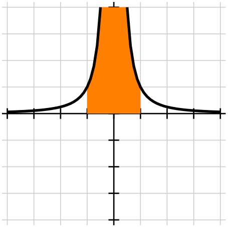
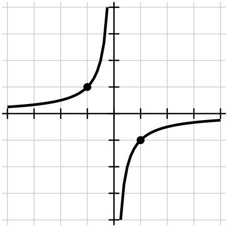
Dica: os '='s do slide 7 têm montes
de significados diferentes dependendo
do contexto. Tente fazer uma lista de
significados e pronúncias.

Obs: os próximos 3 slides não são
autocontidos – você vai precisar
assistir o vídeo pra entendê-los.

Um caso em que o TFC2 dá um resultado errado

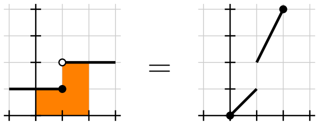
Se $F(x) = -x^{-1}$
então $F'(x) = x^{-2}$, e:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=-1}^{x=1} F'(x)\,dx & = & F(x)\big|_{x=-1}^{x=1} \\
\int_{x=-1}^{x=1} x^{-2}\,dx & = & (-x^{-1})\big|_{x=-1}^{x=1} \\
 & = & (-1^{-1}) - (-(-1)^{-1}) \\
 & = & -2
\end{array}$$

 $=$  $=($

Outro caso em que o TFC2 dá um resultado errado

$$\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\Big|_{x=0}^{x=2}$$



$$3 \quad = \quad 4 - 0$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{DefDif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \quad = \quad F(b) - F(a) \right) \\
[\text{TFC2}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{DefDif}] \left[{\scriptstyle F(x):=f(g(x))} \right] & = & \left(f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \quad = \quad f(g(b)) - f(g(a)) \right) \\
[\text{DefDif}] \left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ F(u):=f(u) \\ a:=g(a) \\ b:=g(b) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \quad = \quad f(g(b)) - f(g(a)) \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{TFC2}] \left[\begin{smallmatrix} F(x):=f(g(x)) \\ F'(x):=f'(g(x))g'(x) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{TFC2}] \left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ b:=g(b) \\ a:=g(a) \\ F(u):=f(u) \\ F'(u):=f'(u) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(\displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \quad = \quad f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
& = & f(g(b)) - f(g(a)) \\
& = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
& = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{array}
$$

A fórmula da derivada da função inversa

$$[\text{DFI1}] = \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) &=& x \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) &=& \frac{d}{dx} x \;\; = \;\; 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) &=& f'(g(x)) g'(x) \\ f'(g(x)) g'(x) &=& 1 \\ g'(x) &=& \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

$$[\text{DFI2}] = \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) &=& x \\ g'(x) &=& \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Exercício 3.

a) $[\text{DFI1}] \begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \end{bmatrix} = ?$

Exercício 3 (cont.)

b) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := y^2 \\ f'(y) := 2y \\ g(x) := \text{sqrt}(x) \\ g'(x) := \text{sqrt}'(x) \end{bmatrix} = ?$

c) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := \text{sen}\, y \\ f'(y) := \cos y \\ g(x) := \text{arcsen}(x) \\ g'(x) := \text{arcsen}'(x) \end{bmatrix} = ?$

d) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} x := s \\ f(\theta) := \text{sen}\, \theta \\ f'(\theta) := \cos \theta \\ g(s) := \text{arcsen}(s) \\ g'(s) := \text{arcsen}'(s) \end{bmatrix} = ?$

e) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} x := c \\ f(\theta) := \cos \theta \\ f'(\theta) := -\text{sen}\, \theta \\ g(c) := \cos^{-1}(c) \\ g'(c) := (\cos^{-1})'(c) \end{bmatrix} = ?$

Mais algumas fórmulas que não valem sempre

$$(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$$

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{sen} x)^2 &=& 1 - (\cos x)^2 \\ \sqrt{(\operatorname{sen} x)^2} &=& \sqrt{1 - (\cos x)^2} \\ \operatorname{sen} x &=& \sqrt{1 - (\cos x)^2} \\ (\cos x)^2 &=& 1 - (\operatorname{sen} x)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{(\cos x)^2} &=& \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2} \\ \cos x &=& \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2} \end{array}$$

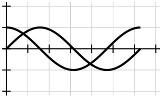
Exercício 4.

a) Escolha um número entre 42 e 99.
(Se você não conseguir converse com seus colegas!!!)

b) Escolha um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}\alpha < 0$
e verifique se $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-(\cos\alpha)^2}$.
Dica: escolha um α para o qual você sabe $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

c) Escolha um $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\beta < 0$
e verifique se $\cos\beta = \sqrt{1-(\cos\beta)^2}$.

d) Faça uma cópia do gráfico abaixo num papel



e desenhe sobre ela os conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\, \theta \in [0, 2\pi] \mid \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-(\cos\theta)^2}\,\}, \\ B & = & \{\, \theta \in [0, 2\pi] \mid \cos\theta = \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}\,\}. \end{array}$$

Juntando fórmulas estranhas

$$
\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \\
e^{\ln x} & = & x \\
\ln' x & = & \frac{1}{e^{\ln x}} \\
 & = & \frac{1}{x} \\
\int_{x=a}^{x=b} \ln' x \, dx & = & \ln x \big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x} \, dx & = & \ln x \big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}
$$

Juntando fórmulas estranhas

$$
\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \\
\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) & = & x \\
\operatorname{arcsen}' x & = & \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} \\
& = & \frac{1}{\sqrt{(\cos(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
& = & \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
& = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{arcsen}' x \, dx & = & \operatorname{arcsen} x\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & = & \operatorname{arcsen} x\big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}
$$

Um exemplo de mudança de variável

$$[\mathrm{EMV1}] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(g(b)) - f(g(a)) \\ &=& f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{EMV2}] = [\mathrm{EMV1}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(2x)\cdot 2\,dx &=& f(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(2b) - f(2a) \\ &=& f(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{EMV3}] = [\mathrm{EMV2}] \begin{bmatrix} f(x) := -\cos x \\ f'(x) := \operatorname{sen} x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& (-\cos(2x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& (-\cos(2b)) - (-\cos(2a)) \\ &=& (-\cos(u))\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen}(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{EMV4}] = \left(\int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen}(u)\,du = \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\ dx \right)$$

$$[\mathrm{EMV5}] = \left(\int_{u=a}^{u=b} \operatorname{sen}(u)\,du = \int_{x=a/2}^{x=b/2} 2\operatorname{sen}(2x)\,dx \right)$$

Outro exemplo de mudança de variável

Aqui a gente não substitui a f, só a f'...
Digamos que $f(x) = \int_{t=c}^{t=x} \tan t\, dt$,
e portanto $f'(x) = \tan x$.

$$[\text{OEMV3}] \quad = \quad [\text{EMV2}]\left[f'(x) := \tan x\right] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x)\cdot 2\,dx & = & (f(2x))|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (f(2b)) - (f(2a)) \\ & = & (f(u))|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{OEMV4}] \quad = \quad \left(\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\,du \quad = \quad \int_{x=a}^{x=b} \tan(2x)\cdot 2\ dx \right)$$

$$[\text{OEMV5}] \quad = \quad \left(\int_{u=a}^{u=b} \tan(u)\,du \quad = \quad \int_{x=a/2}^{x=b/2} 2\tan(2x)\,dx \right)$$

http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf
http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf

Um exemplo com contas

Isto aqui é um exemplo de como contas com integração por substituição costumam ser feitas na prática:

$$
\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}
$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x + 4$.

Outro exemplo com contas

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
&= \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
&= \int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
&= \int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
&= \int s^5 - s^7 \, ds \\
&= \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{array}\right]$$

Substituição na integral definida
Eu vou chamar a demonstração abaixo de [S2].
Ela é uma série de três igualdades: o '=' de cima,
o '=' de baixo, e o '=' da esquerda (que é um '||').
Eu vou chamar o "$F'(u) = f(u)$" de a hipótese do [S2].
Obs: nós ainda não acreditamos nessa demonstração...
vamos verificar as igualdades dela daqui a alguns slides.

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Lembre que dá pra substituir só alguns símbolos...
Por exemplo:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][g(x) := 2x] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Também podemos substituir o f por F'...
E aí a hipótese passa a ser "trivialmente verdadeira":

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l}
\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\
\begin{array}{ccc}
F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\
\| & & \\
F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du
\end{array}
\end{array}\right)
$$

$$
[\mathsf{S2}][f(u) := F'(u)] \quad = \quad \left(\begin{array}{l}
\text{Se } F'(u) = F'(u) \text{ então:} \\
\begin{array}{ccc}
F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(g(x))g'(x)\,dx \\
\| & & \\
F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} F'(u)\,du
\end{array}
\end{array}\right)
$$

Exercício 1.
Lembre que:

$$[\mathsf{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx} F(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Calcule os resultados destas expansões:
a) $[\mathsf{TFC2}] \left[F(x) := F(g(x)) \right]$
b) $[\mathsf{TFC2}] \left[x := u \right] \begin{bmatrix} a := g(a) \\ b := g(b) \end{bmatrix}$

...e verifique que se $f(u) = F'(u)$ então:
c) o que você obteve no (a) prova o '$=$' de cima da $[\mathsf{S2}]$,
d) o que você obteve no (b) prova o '$=$' de baixo da $[\mathsf{S2}]$,

O '=' à esquerda na [S2]
é bem fácil de verificar... ó:

$$\begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \end{array}$$

Se você conseguiu fazer todos os itens
do exercício 1 e conseguiu entender isso aí
então agora você entende o [S2] como uma
demonstração — você entende todas as
igualdades dele.

Pra que serve a hipótese do [S2]?
Ela serve pra gente lidar com 'f's que a gente não sabe integrar! Por exemplo:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}] \begin{bmatrix} f(x) := \tan x \\ g(u) := 2u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{l} {\color{red}\text{Se } F'(u) = \tan u \text{ então:}} \\ \begin{array}{rcl} F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x)\cdot 2\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Uma versão do [S2] para integrais indefinidas

Compare... e repare no "Obs: $u = g(x)$".

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

Versões sem a parte da esquerda

Compare:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

Versões sem a parte da esquerda (2)

...e compare:

$$[\mathsf{S2I}] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3I}] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

As pessoas costumam usar variações da [S3I], geralmente sem darem um nome pra função $g(u)$... Lembre que em vários exercícios que nós já fizemos ficava implícito que vocês tinham que descobrir qual era a substituição certa... por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
x^2\big|_{x=4}^{x=5} & = & \color{red}{?} \\
\left(f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := \color{red}{?} \\ a := \color{red}{?} \\ b := \color{red}{?} \end{bmatrix} & = & \color{red}{?} \\
\left(f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2 \\ a := 4 \\ b := 5 \end{bmatrix} & = & \left(x^2\big|_{x=4}^{x=5} = 5^2 - 4^2 \right) \\
x^2\big|_{x=4}^{x=5} & = & 5^2 - 4^2
\end{array}$$

Exercício 2.
Nos livros e nas notas de aula que você vai encontrar por aí o “Obs: $u = g(x)$” da nossa [S3I] quase sempre aparece escrito de (ZILHÕES DE!!!) outros jeitos, então o melhor que a gente pode fazer é tentar encontrar as substituições que transformam a nossa [S3I] em algo “mais ou menos equivalente” às igualdades complicadas que eu mostrei no vídeo e que eu disse que a gente iria tentar decifrar...

Nos itens a e b deste exercício você vai tentar encontrar as substituições — que eu vou escrever como ‘[?]’ — que transformam a [S3I] em algo “mais ou menos equivalente” às igualdades da direita.

Exercício 2 (cont.)
Encontre as substituições ‘[?]’s que façam com que:

a) $\begin{pmatrix} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{pmatrix}$ [?] vire algo como $\begin{pmatrix} \displaystyle\int 2\cos(3x+4)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \end{pmatrix}$

b) [S3I] [?] vire algo como $\begin{pmatrix} \displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5(1-\operatorname{sen} x^2)(\cos x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int s^5(1-s^2)\,ds \end{pmatrix}$

Gambiarras

Em geral é mais prático a gente usar umas gambiarras como "$\frac{du}{dx}dx = du$" ao invés do método "mais honesto" que a gente usou no exercício 2...

Às vezes essas gambiarras vão usar uma versão disfarçada do teorema da derivada da função inversa: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$, e umas outras manipulações esquisitas de 'dx's e 'du's que só aparecem explicadas direito nos capítulos sobre "diferenciais" dos livros de Cálculo.

Nós vamos começar usando elas como gambiarras mesmo, e acho que nesse semestre não vai dar pra ver como traduzir cada uma delas pra algo formal...

Gambiarras (2)

Quando a gente está começando e ainda não tem prática este modo de por anotações embaixo de chaves ajuda muito:

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5 (1 - s^2) \, ds$$

Quando a gente já tem mais prática acaba sendo melhor pôr todas as anotações dentro de caixinhas — por exemplo:

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x \, dx = ds \end{array} \right]$$

Gambiarras (3)
Essas caixinhas, como

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x\,dx = ds \end{array}\right]$$

vão ser os únicos lugares em que nós vamos permitir esses 'dx's e 'ds' "soltos", que não estão nem em derivadas e nem associados a um sinal '$\int$'...

E esses 'dx's e 'ds' "soltos" só vão aparecer em linhas que dizem como traduzir uma expressão que termina em 'dx' numa integral em x pra uma expressão que termina em 'ds' numa integral na variável s.

Nós vamos evitar usar s como uma abreviação para $\operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações

Tudo numa caixinha de anotações é consequência da primeira linha dela, que é a que define a variável nova. Por exemplo, se definimos a variável nova como $c = \cos x$ então $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$, e podemos reescrever isso na "versão gambiarra" como: $dc = -\operatorname{sen} x\,dx$, e também como $\operatorname{sen} x\,dx = (-1)dc$.

A caixinha vai ser:

$$\left[\begin{array}{c} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \\ dc = -\operatorname{sen} x\,dx \\ \operatorname{sen} x\,dx = (-1)\,dc \end{array}\right]$$

Mais sobre as caixinhas de anotações (2)

Muito importante: cada linha das caixinhas é uma série de igualdades — por exemplo $\mathsf{expr}_1 = \mathsf{expr}_2 = \mathsf{expr}_3$ — e cada uma dessas expressões $\mathsf{expr}_1, \ldots, \mathsf{expr}_n$ só pode mencionar ou a variável antiga ou a variável nova...

Então:

Bom: $dc = -\operatorname{sen} x \, dx$
Mau: $\frac{1}{-\operatorname{sen} x} dc = dx$
Bom: $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x$

Truque: em $\frac{dc}{dx}$ o c faz o papel de uma abreviação para $\cos x$, não de uma variável.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)
Quando a gente faz algo como

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5 (1 - s^2) \, ds$$

Cada chave é como uma igualdade da caixa de anotações "escrita na vertical"... por exemplo, "$\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s}$" é $s = \operatorname{sen} x$.

As outras chaves correspondem a outras igualdades da caixa de anotações — que têm que ser consequências desse $s = \operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)

Isto aqui está errado:

$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx}_{ds} \quad = \quad \int ({\color{red}\operatorname{sen} x})^5 (1 - s^2)\, ds$$

À esquerda do '=' a gente tem uma integral na qual só aparece a "variável antiga", que é x, e à direita do '=' a gente tem uma integral na qual aparecem tanto a variável antiga, x, quanto a nova, que é s... =(

Lembre que tanto o truque das caixinhas quanto o truque das chaves servem pra gente conseguir aplicar a [S3I] de um jeito mais fácil, e no [S3I] uma integral usa só a variável antiga e a outra usa só a nova.

Exercício 3.
Leia o início da seção 6.1 do APEX Calculus
e faça os exercíos 25 até 32 da página 280 dele. Link:
`http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf`

Exercício 4.
Leia o início da seção 6.1 do Martins/Martins
e refaça os exercícios resolvidos 1 a 6 dele
usando ou as nossas anotações sob chaves ou
as nossas anotações em caixinhas. Link:
`http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf`

Exercício 5.

A questão 2 da P1 do semestre passado dizia que:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável (ou: "por uma sequência de integrações por substituição") pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

E ela pedia pra vocês verificarem isso num caso específico.
Tente fazer essa questão olhando poucas vezes pro gabarito dela.
Link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4`

$$[\mathsf{S2}] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][f(u) := F'(u)] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(w)=\cos(2+w) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(\sqrt{v}) & = & \displaystyle\int \cos(2+\sqrt{v})\cdot(2\sqrt{v})^{-1}\,dv \\ \| & & \\ F(w) & = & \displaystyle\int \cos(2+w)\,dw \end{array} \\ \text{Obs: } w=\sqrt{v}. \end{array} \right)$$