Cálculo 2 - 2021.2

Aula 26: mudança de variável
por gambiarras

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Introdução
No último PDF e na P1 a gente viu como fazer "integração por substituição" de um jeito mais ou menos fácil de formalizar... agora a gente vai ver o método que os livros usam, que nos permite fazer as contas bem rápido, mas que usa várias gambiarras, algumas delas bem difíceis de formalizar.

Os nomes "integração por substituição" e "integração por mudança de variável" costumam ser equivalentes. Vou me referir ao método que a gente vai ver agora como "mudança de variável", "mudança de variável por gambiarras", "MV", ou "MVG", pra gente poder usar o termo "substituição" pro '[:=]'.

Introdução (2)

Cada livro usa convenções um pouco diferentes pra como escrever as contas por MVG. Eu vou usar a convenção do exemplo do próximo slide, em que a resolução da integral fica à esquerda e as caixinhas indicando os truques que usamos em cada MV ficam à direita, separadas da contas da integral.

A primeira caixinha tem os truques pra mudar
da variável x pra variável u e pra voltar de u pra x.

A segunda caixinha tem os truques pra mudar
da variável u pra variável v e pra voltar de v pra u.

A terceira caixinha tem os truques pra mudar
da variável v pra variável w e pra voltar de w pra v.

A quarta caixinha tem os truques pra mudar
da variável w pra variável y e pra voltar de y pra w.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{u+4}\right)}{2\sqrt{u+4}}\,du \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}\,dv \\
&= \int \cos\left(2+w\right)dw \\
&= \int \cos y\,dy \\
&= \operatorname{sen} y \\
&= \operatorname{sen}\left(2+w\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{v}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{u+4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u=3x \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3\,dx \\ dx=\frac{1}{3}du \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} v=u+4 \\ du=dv \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} w=\sqrt{v} \\ \frac{dw}{dv}=\frac{1}{2}v^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} y=2+w \\ dy=dw \end{bmatrix}$$

Limites de integração
A coluna da esquerda tem uma série de integrais sem limites de integração — a gente está trabalhando numa notação abreviada em que os limites de integração foram apagados. Eles podem ser recolocados de novo no final, quando a gente for transformar essas contas abreviadas numa versão "desabreviada" delas.

Os limites de integração em x são diferentes
dos limites de integração em u, que são diferentes
dos limites de integração em v, que são diferentes
dos limites de integração em w, que são diferentes
dos limites de integração em y.

Detalhes em breve!

A coluna da esquerda tem uma série de igualdades. Ela é da forma $\langle \mathsf{expr}_1 \rangle = \langle \mathsf{expr}_2 \rangle = \ldots = \langle \mathsf{expr}_\mathsf{n} \rangle$, mas a gente escreve essa série de igualdades na vertical.

Repare que na coluna da esquerda
"as variáveis não se misturam":
$\langle \mathsf{expr}_1 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_{10} \rangle$ são "expressões em x",
$\langle \mathsf{expr}_2 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_9 \rangle$ são "expressões em u",
$\langle \mathsf{expr}_3 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_8 \rangle$ são "expressões em v",
$\langle \mathsf{expr}_4 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_7 \rangle$ são "expressões em w",
$\langle \mathsf{expr}_5 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_6 \rangle$ são "expressões em y".

A regra mais importante de todas

Na coluna da esquerda cada expressão é
uma expressão "em uma variável só".
Se você escrever algo como

$$\int \cos(2 + w)\, dy$$

Isso é um ERRO CONCEITUAL GRAVÍSSIMO
e a sua questão é ZERADA.

A gente não vai ter tempo de ver o porquê disso...
O motivo é que com essa proibição o método pra
"desabreviar" as contas fica simples —
sem essa proibição ele fica BEM mais complicado,
e a gente precisaria de uns truques de "notação
de físicos", que é um assunto bem difícil de
Cálculo 3, pra definir o método de desabreviação.

As caixinhas de truques

As caixinhas de truques da MVG têm uma sintaxe BEM diferente das caixinhas do '[:=]'.
Pra enfatizar isso a gente usa '='s dentro delas, não ':='s, e a gente escreve elas separadas do resto, à direita.

Dê uma olhada nas 9 primeiras páginas daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf

Dentro cada caixinha de truques da MVG a gente vai usar algumas expressões que só podem ser formalizadas direito usando a "notação de físicos", que a gente vai ver com detalhes em C3...
Vou mostrar como "ler em voz alta" uma caixinha e a gente vai tentar usar elas meio de improviso.

Lendo uma caixinha de truques em voz alta

$$\begin{bmatrix} u = 3x \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

Digamos que u e x são variáveis dependentes,
que obedecem a equação $u = 3x$.
Então podemos tratar u como uma função de x,
e temos $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(u(x)) = \frac{d}{dx}(3x) = \frac{d}{dx}(u(x)) = 3$.
Multiplicando os dois lados de $\frac{du}{dx} = 3$ por dx
obtemos $du = 3\,dx$; e multiplicando os dois lados de
$du = 3\,dx$ por $\frac{1}{3}$ obtemos $dx = \frac{1}{3}$.

Na caixinha

$$\begin{bmatrix} u = 3x \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

as duas últimas linhas são igualdades entre expressões incompletas. Você viu na P1 como substituir expressões incompletas, como parênteses, bananas e lentes...

Em expressões das formas '$\int \ldots\, dx$' e '$\int \ldots\, du$' o 'dx' e o 'du' fazem papel de "fecha parênteses", e as igualdades $du = 3\,dx$ e $dx = \frac{1}{3}du$ indicam substituições que você vai poder fazer nas integrais do lado esquerda que vão ser parecidas com as da questão 2 da P1.

Exercício 1.
Reescreva os exemplos 1 a 4 da seção 6.2 do livro do Daniel Miranda na notação que eu disse que nós vamos usar, em que todas caixinhas de truques são escritas explicitamente.

Link:
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=189`