

Cálculo 2 - 2021.2

Aula 4: integrais como somas de retângulos (1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.2-C2.html>

Links pra vídeos antigos

Vamos usar estes vídeos antigos aqui:
este de 2020.2,

<http://angg.twu.net/eev-videos/2020.2-C2-somas-1.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=bbZfQmtFCSw>

e este de 2021.1, sobre o exercício 9:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=Ht5iLKGlYSM>

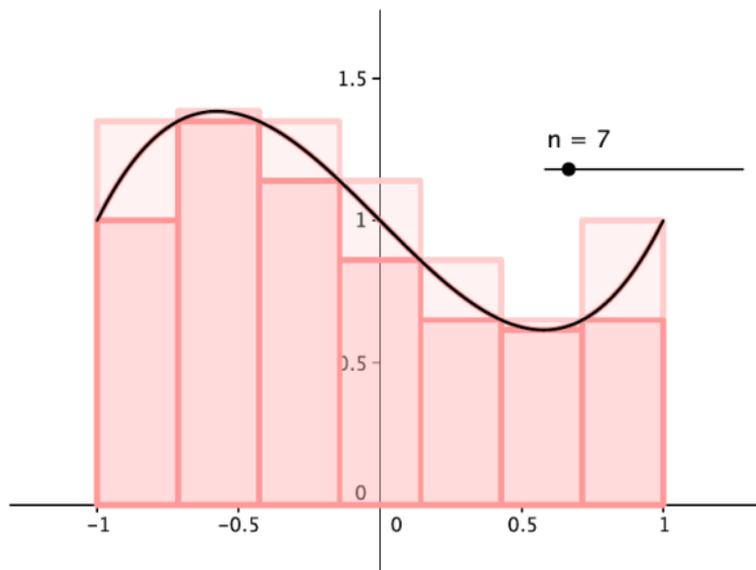
Este sobre não tou entendendo nada
também vai ser bem importante:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1-dicas.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=pCD1p9FZYdI>

Algumas figuras

Dê uma olhada nas notas de aula da Cristiane Hernández, linkadas na página do curso... ela usa várias figuras como essa aqui:



Algumas áreas fáceis de calcular

Por enquanto a gente sabe calcular a área de algumas figuras simples: retângulos, triângulos, trapézios, e figuras formadas por vários retângulos, triângulos e trapézios.

Algumas pessoas viram no Ensino Médio um método de calcular a área de qualquer polígono. Vamos rever isto agora.

Assista os primeiros 10 minutos deste vídeo do Mathologer:

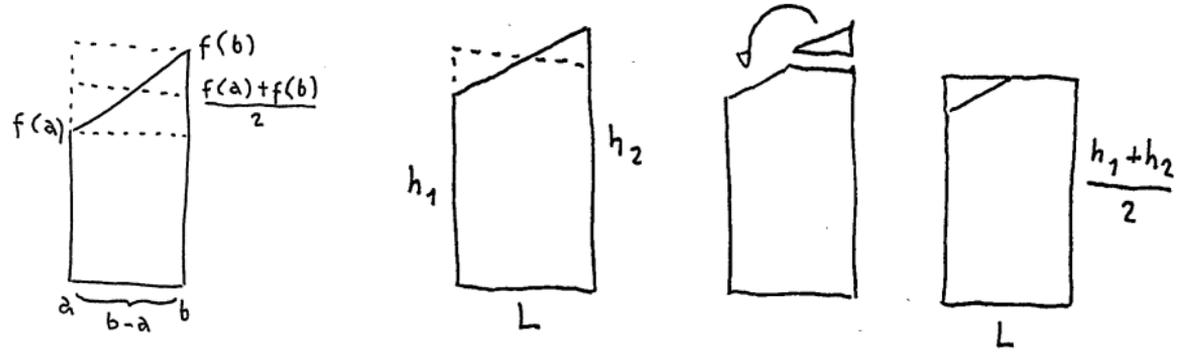
<http://www.youtube.com/watch?v=0KjG8Pg6LGk>

Algumas idéias dele vão ser muito importantes pra gente depois. Por exemplo, que áreas podem ser calculadas de vários jeitos, e que alguns pedaços devem ser contados “negativamente”.

Na verdade nós vamos usar principalmente retângulos e trapézios...

Áreas de trapézios

O truque pra calcular a área de um trapézio é transformá-lo num retângulo com a mesma área que ele por cortar-e-colar. Veja:



Nossa função preferida

Seja $f(x) = 4 - (x - 2)^2$.

Isto é uma parábola com a concavidade pra baixo.

Verifique que:

$$f(0) = 4 - 4 = 0,$$

$$f(1) = 4 - 1 = 3,$$

$$f(2) = 4 - 0 = 4,$$

$$f(3) = 4 - 1 = 3,$$

$$f(4) = 4 - 4 = 0.$$

Além disso $f'(x) = -2(x - 2)$, $f'(1) = 2$, $f'(3) = -2$, e

a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 1$ tem coef. angular 2, e

a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 3$ tem coef. angular -2.

Exercício 1: use estas informações para traçar o gráfico de $f(x)$ entre $x = 0$ e $x = 4$.

Dois jeitos de visualizar $(x, f(x))$

Jeito burro:

Em $x = 2.5$ temos

$$f(2.5) = 4 - (2.5 - 2)^2 = 4 - 0.5^2 = 4 - 0.25 = 3.75.$$

Encontre o ponto $y = 3.75$ no eixo y .

Desenhe o ponto $(2.5, 3.75)$.

Jeito esperto/rápido:

Encontre no eixo x o ponto $x = 2.5$.

Suba esse ponto pra curva $y = f(x)$ –
você encontrou o ponto $(2.5, f(2.5))$!

O “jeito esperto” está explicado neste vídeo aqui:

<http://www.youtube.com/watch?v=bbZfQmtFCSw#t=4m00s>

Ele vai ser **MUITO** importante!!!!!!!!!!

Mais exercícios

Exercício 2. Desenhe o gráfico da nossa função preferida (obs: sempre no intervalo entre $x = 0$ e $x = 4$!) e desenhe sobre ele o retângulo “cuja área é $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5)$ ”. Truque: isto é altura \cdot base, e a base vai de $x = 0.5$ a $x = 1.5$.

Exercício 3. Desenhe em outro gráfico a nossa função preferida e sobre ela os retângulos da soma abaixo:
 $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5) + f(1.5) \cdot (2 - 1.5) + f(2) \cdot (3 - 2) + f(3.5)(3.5 - 3)$

Partições

Informalmente uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um modo de decompor $[a, b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição “certa” é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco.
Caso geral:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_N, b_N],$$

onde:

N é o número de intervalos,

$a = a_1, b = b_N$, (“extremidades”)

$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido ($i = 1, \dots, N$)

$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1, \dots, N - 1$

Partições (2)

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.
Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i
1	2	3.5
2	3.5	4
3	4	6
4	6	7

corresponde à partição de $[2, 7]$ do slide anterior.

Exercício 4. Converta esta “partição”

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

numa tabela. Neste caso quem são a , b e N ?

Partições (3)

A definição **certa** de partição é a seguinte.

Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de \mathbb{R} , e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b .

Então P é uma **partição** do intervalo $[a, b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$ corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução ponha os elementos de P em ordem e chame-os de b_0, \dots, b_N ; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a , b , e N .

Exercício 5. Converta a partição $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$ para o formato tabela e para o formato $[a, b] = [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N]$.

Partições definem muitas coisas implicitamente

Quando dizemos algo como “Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$ ” estamos criando um contexto no qual há uma partição “default” definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N , a , b , e para cada a_i e b_i . Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N f(b_i) \cdot (b_i - a_i) &= \sum_{i=1}^2 f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\ &= f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\ &= f(4) \cdot (4 - 2.5) + f(6) \cdot (6 - 4)\end{aligned}$$

Note que a expressão $\sum_{i=a}^b \text{expr}$ quer dizer “some várias cópias da expressão expr , a primeira com i substituído por a , a segunda com i substituído por $a + 1$, etc etc, até a cópia com i substituído por b ”...

Se você tiver dificuldade pra interpretar alguma expressão com somatórios você pode calculá-la beem passo a passo usando a operação ‘ $[:=]$ ’ da aula passada. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=4}^7 f(b_i) \cdot (b_i - a_i) &= (f(b_i) \cdot (b_i - a_i))[i := 4] \\
 &+ (f(b_i) \cdot (b_i - a_i))[i := 5] \\
 &+ (f(b_i) \cdot (b_i - a_i))[i := 6] \\
 &+ (f(b_i) \cdot (b_i - a_i))[i := 7] \\
 &= f(b_4) \cdot (b_4 - a_4) \\
 &+ f(b_5) \cdot (b_5 - a_5) \\
 &+ f(b_6) \cdot (b_6 - a_6) \\
 &+ f(b_7) \cdot (b_7 - a_7) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Alguns exercícios de visualizar somas de retângulos...

Exercício 6. Seja f a nossa função preferida e seja P a partição $\{0.5, 1, 2, 2.5\}$. Represente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^N f(b_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 7. Seja f a nossa função preferida e seja P a mesma partição que no exercício anterior. Represente num gráfico só – separado do gráfico do exercício anterior!!! – a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^N f(a_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 8. Usando a mesma função f e a mesma partição P dos exercícios anteriores, represente num outro gráfico a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$. Repare que $\frac{a_i+b_i}{2}$ é o ponto médio do intervalo $[a_i, b_i]$, e é fácil encontrar pontos médios no olhómetro.

Agora comparando com a Wikipedia

Exercício 9. Dê uma olhada na página

https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

da Wikipedia. Vamos tentar entender alguns pedaços dela.

Seja P a “partição do intervalo $[0, 3]$ em 6 subintervalos iguais”. Tem um ponto em que a página da Wikipedia diz: “os pontos da partição serão...” – entenda as definições dela, descubra quem é Δx neste caso, e escreva quais são os pontos desta partição na linguagem da página da Wikipedia e na linguagem que eu usei nos slides.

Expand a fórmula da página da Wikipedia para a “soma média” neste caso. Expand também a nossa fórmula $\sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$ e compare as duas expansões.

(Vamos ver o que são “ínfimos” e “supremos” na aula que vem)

Dicas pro exercício 9

Eu pus um vídeo com várias dicas pro exercício 9 aqui:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=Ht5iLKGLysM>

Uma dica extra... no Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como $\frac{6}{4}$ tem que ser simplificada pra $\frac{3}{2}$, mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais $\frac{1}{4}$ eu acho bem melhor escrever essa sequência como $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}$ do que como $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \dots$

Dicas pro exercício 9 (2)

Além disso no exercício 9 você vai ter alguns somatórios de expressões como $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$ em que todos os ' $(b_i - a_i)$'s dão o mesmo valor. Você *pode* reescrever todos esses ' $(b_i - a_i)$'s como números, mas se você parar as suas expansões e simplificações um passo antes e mantiver eles como $(0.5 - 0)$, $(1 - 0.5)$, etc, aí vai ser fácil interpretar cada $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$ como um retângulo.

Sobre o “jeito esperto”, leia isto aqui:

http://ang.twu.net/2021.1-C2/2021-jun-18-pergunta_sobre_jeito_esperto.pdf

Trapézios

Tem dois modos diferentes da gente interpretar geometricamente $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$:

- 1) como um retângulo de altura $\frac{f(a)+f(b)}{2}$, ou
- 2) como um trapézio com vértices

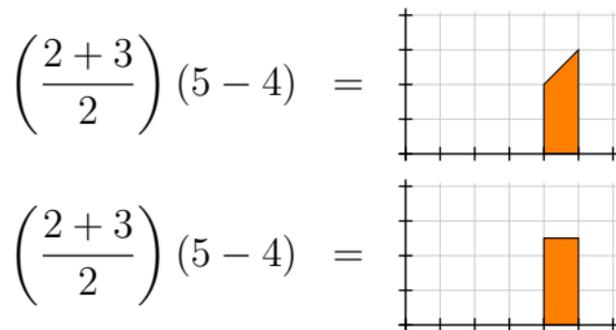
$$(a, 0), (b, 0), (b, f(b)), (a, f(a))$$

Exercício 10. Sejam f a nossa função preferida e P a partição $\{0, 1, 2\}$. Desenhe num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os trapézios da soma:

$$\sum_{i=1}^N \frac{f(a_i) + f(b_i)}{2} (b_i - a_i)$$

(Veja as figuras da “Regra Trapezoidal” na página da Wikipedia)

...ou seja, estas duas igualdades estão certas:



A primeira mostra a representação geométrica do $\left(\frac{2+3}{2}\right)(5-4)$ como um trapézio, e a segunda mostra a representação geométrica do $\left(\frac{2+3}{2}\right)(5-4)$ como um retângulo de altura $\frac{2+3}{2} = 2.5$.

Exercício 11.

Para cada uma das expressões abaixo faça as duas representações gráficas dela: a que interpreta a expressão como uma soma de trapézios e que interpreta ela como uma soma de retângulos.

a) $(\frac{2+1}{2})(2-1) + (\frac{2+4}{2})(5-2)$

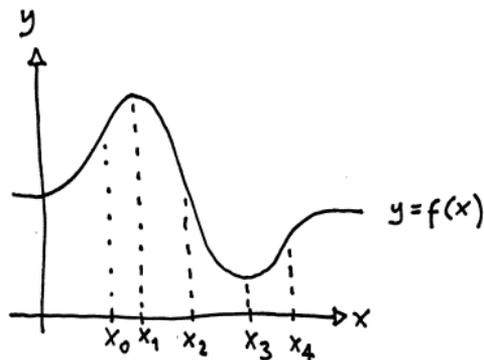
b) $(\frac{0+1}{2})(1-0) + (\frac{1+2}{2})(2-1) + (\frac{2+3}{2})(3-2) + (\frac{3+5}{2})(5-3)$

c) $(\frac{1+1}{2})(2-1) + (\frac{1-0}{2})(3-2) + (\frac{0-1}{2})(4-3) + (\frac{-1-1}{2})(5-4)$

d) $(\frac{1+1}{2})(2-1) + (\frac{1-1}{2})(4-2) + (\frac{-1-1}{2})(5-4)$

e) $(\frac{-1+3}{2})(5-1)$

f) $(\frac{1-2}{2})(4-1)$

Exercício 12.

Faça duas cópias à mão do desenho acima – o gráfico da função f com indicações de quais são os pontos x_0, \dots, x_4 do eixo x . Você vai fazer cada item do exercício sobre uma das cópias. As cópias não precisam ser muito precisas.

Exercício 12 (cont.)

a) Represente graficamente sobre a primeira cópia:

$$f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_3 - x_2) + f(x_4)(x_4 - x_3)$$

b) Represente graficamente sobre a segunda cópia
a interpretação da expressão abaixo como trapézios

e a interpretação dela como retângulos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} \right) (f(x_1) - f(x_0)) \\ + & \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \right) (f(x_2) - f(x_1)) \\ + & \left(\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} \right) (f(x_3) - f(x_2)) \\ + & \left(\frac{f(x_3)+f(x_4)}{2} \right) (f(x_4) - f(x_3)) \end{aligned}$$

Métodos de integração: nomes

$$\begin{aligned}
 [\text{L}] &= \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
 [\text{R}] &= \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
 [\text{Trap}] &= \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
 [\text{M}] &= \sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i - a_i) \\
 [\text{min}] &= \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\text{max}] &= \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\text{inf}] &= \sum_{i=1}^N \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
 [\text{sup}] &= \sum_{i=1}^N \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
 \end{aligned}$$

Cada uma dessas fórmulas é um “método de integração”. Todos esses “métodos” aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os intervalos têm o mesmo comprimento.

Exercício 13.

Seja f a nossa função preferida, e seja P a partição $P = \{1, 4\}$.

- a) Represente num gráfico só f e $[L]$.
- b) Represente num gráfico só f e $[R]$.
- c) Represente num gráfico só f e $[Trap]$ (dos dois jeitos).
- d) Represente num gráfico só f e $[M]$.
- e) Represente num gráfico só f e $[min]$.
- f) Represente num gráfico só f e $[max]$.