Cálculo 2 - 2021.2

Comentários sobre o exercício 4 do
"Integrais como somas de retângulos (2)"

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Links:

Convenção sobre como representar booleanos:

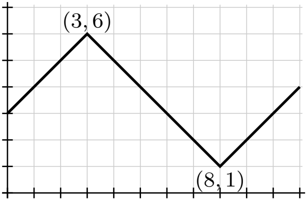
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=17

Exercício 4 do “somas 2”:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=18

Lembre que:

$f(x) =$

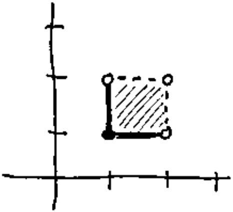


$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \le 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \le x \end{cases}$$

$$P(y) = (\forall x \in [7,9].\, y \le f(x))...$$

O exercício 4a pedia pra calcularmos $P(0.5)$, mas aqui vamos discutir como calcular $P(1.5)$ — porque no $P(1.5)$ as figuras são mais legais.

Vou supor que todo mundo sabe representar graficamente subconjuntos do plano. Por exemplo:

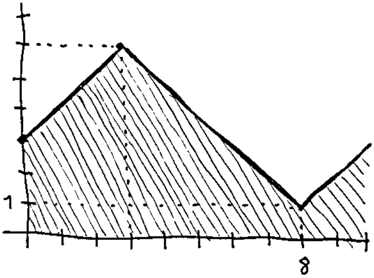
$$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[1,2) \text{ e } y\in[1,2)\,\} =$$ 

Exercício 1.
a) Seja $G(x,y) = (y \leq f(x))$. Represente graficamente o valor (booleano!) de $G(x,y)$ nos pontos do plano com $x \in 7, 8, 9$ e $y \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, usando a convenção de que '$\bullet$' quer dizer "verdadeiro" e '$\circ$' quer dizer falso.

b) Represente graficamente este conjunto:

$$\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x,y) \,\}$$

O modo mais rápido e mais fácil de entender de resolver o exercício 4a é visual. Os pares (x, y) que obedecem $y \leq f(x)$ são exatamente os pontos deste conjunto:



E $P(1.5)$, ou seja, $(\forall x \in [7, 9].\, 1.5 \leq f(x))$, é verdadeiro se e só se todos os pontos do conjunto $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1.5, 7 \leq x \leq 9 \,\}$ estão no conjunto dos "pares que obedecem $y \leq f(x)$".

Um outro modo — equivalente ao anterior — de calcular $P(1.5)$ é pegar todos os pontos de $\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=1.5, 7\le x\le 9\,\}$, e desenhar sobre cada um deles um '$\bullet$' quando $G(x,y)$ for verdadeiro naquele ponto e um '$\circ$' quando $G(x,y)$ for falso.

A expressão

$$(\forall x\in[7,9].\,1.5\le f(x))$$

vai ser verdadeira se e só se todas as (infinitas) bolinhas que desenhamos forem pretas.

Como é difícil calcular um número infinito de expressões e desenhar um infinito de bolinhas a gente faz só alguns casos e tenta reconhecer o padrão.

Exercício 2.
Seja f a função do slide 3, e:

$$\begin{array}{rcl} G(x,y) & = & (y \leq f(x)), \\ P(y) & = & (\forall x \in [7,9].y \leq f(x)) \\ & = & (\forall x \in [7,9].G(x,y)). \end{array}$$

Desenhe num gráfico só:
a) o conjunto $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x,y)\,\}$,

b) as (infinitas!) bolinhas brancas e pretas que correspondem a $P(1.5)$, e faça um círculo amassado em torno delas,

c) as (infinitas!) bolinhas brancas e pretas que correspondem a $P(0.5)$, e faça um círculo amassado em torno delas,

Exercício 2 (cont.)

d) Escreva do lado do seu gráfico algo como "$P(1.5)$ é falso porque algumas dessas bolinhas são brancas" e faça uma seta indo desse texto pro círculo amassado certo.

e) Escreva do lado do seu gráfico algo como "$P(0.5)$ é verdadeiro porque todas essas bolinhas são pretas" e faça uma seta indo desse texto pro círculo amassado certo.

O desenho que você acabou de fazer serve pra mostrar porque é que $P(1.5)$ é falso e $P(0.5)$ é verdadeiro.
Um leitor que tente entender esse desenho provavelmente vai aprender muitas coisas – úteis, e fáceis de generalizar – sem muito sofrimento.

No resto destes slides eu vou tentar explicar porque é que o desenho que você fez no Exercício 2 é um modo de mostrar que $P(1.5)$ é falso e $P(0.5)$ é verdadeiro MUITO melhor do que uma prova "textual" só por contas e texto em português.

Parte 2:
Contextos

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Releia a dica 7:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1-dicas.pdf#page=7
Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...

...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer “ok, jóia, tá certo!”.

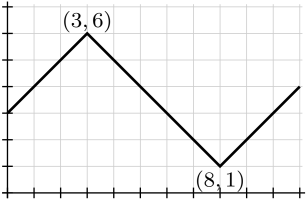
O “colega que seja menos seu amigo” vai fazer menos tentativas, e os personagens “o monitor” e “o professor” da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um “colega que seja menos seu amigo” te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa.
A solução dele começa com:

$$\text{Sabemos que } 2 = 3. \text{ Então...}$$

O que você faria?

No slide 3 nós definimos:

$f(x) =$ 

$$= \begin{cases} x+3 & \text{quando } x \leq 3, \\ 9-x & \text{quando } 3 < x < 8, \\ x-7 & \text{quando } 8 \leq x \end{cases}$$

$$P(y) = (\forall x \in [7,9].\, y \leq f(x))$$

Vou acrescentar mais uma definição:

$$Q(y) = (\forall x \in \{7,8,9\}.\, y \leq f(x))$$

Qualquer pessoa que já tenha pensado muito sobre esse problema sabe que $P(y)$ e $Q(y)$ são "equivalentes"...

..."equivalentes" no sentido de que $P(y)$ é verdade num certo valor de y se e só se $Q(y)$ é verdade naquele mesmo y.
Isto pode ser escrito em linguagem matemática deste jeito:

$$\forall y \in \mathbb{R}.(P(y) \leftrightarrow Q(y))$$

Dá pra demonstrar que '$\forall y \in \mathbb{R}.(P(y) \leftrightarrow Q(y))$' é verdade pra função f que estamos usando. A demonstração formal disso é difícil, e se você está interessado em aprender como fazer ela você pode entrar num grupo de Telegram que eu vou criar pra gente discutir isso mas no qual eu só vou deixar entrar quem já aprendeu sups e infs.

Se na sua demonstração você disser –
explicitamente ou implicitamente –
que é óbvio que isto aqui

$$\forall y \in \mathbb{R}.(P(y) \leftrightarrow Q(y))$$

é verdade quase qualquer pessoa vai parar de ler
nesse ponto, e vai dizer:

NÃO É ÓBVIO NÃO!!!

E ela vai ter razão.

Como se virar sem demonstrações formais?
Se você reler os exercícios que eu passei você vai ver que quase todos começam com "calcule" ou com "represente graficamente"; uns poucos deles dizem "expanda" ou "calcule passo a passo".

Nos exercícios de "calcule" basta você conseguir chegar ao resultado certo por um raciocínio que faça sentido pra você. Se você puder discutir com colegas, explicar o seu raciocínio pra eles e chegar a uma explicação que faça sentido pro "colega que seja seu amigo" da Dica 7, ótimo. Não é necessário chegar a uma demonstração que faça sentido pra alguém que vá ser super rigoroso e que vá parar assim que encontrar o primeiro erro.

Como se virar sem demonstrações formais? (2)

Dá pra gente apresentar argumentos informais pra pessoas rigorosíssimas de um jeito que elas aceitem, sim – DESDE QUE A GENTE MARQUE CLARAMENTE AS PARTES QUE NÃO ESTÃO TOTALMENTE FORMAIS.

Por exemplo, se você escrever algo como "Rascunho", "Esboço", ou "Não sei escrever isso aqui direito!!!" em cima destas contas,

$$\begin{array}{l} P(0.5) \\ f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V} \\ f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V} \\ f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V} \\ P(0.5) \quad \mathbf{V} \end{array}$$

o leitor não vai achar que tem erros (graves) aí.

Como se virar sem demonstrações formais? (3)

E se você mostrar essas contas

$$\begin{array}{l} P(0.5) \\ f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V} \\ f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V} \\ f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V} \\ P(0.5) \quad \mathbf{V} \end{array}$$

no tal grupo do Telegram que é só pra quem já aprendeu sups e infs e perguntar algo como:
“gente, vocês conseguem entender isso aqui?
Como a gente escreve isso de um jeito formal?”
aí as pessoas vão discutir como escrever os contextos que faltam, como reescrever o espaço antes de cada ‘**V**’ de um jeito que todo mundo entenda, etc...

Como se virar sem demonstrações formais? (4)

Repare que a pergunta "isso aqui tá certo?"

$$\begin{array}{l} P(0.5) \\ f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V} \\ f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V} \\ f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V} \\ P(0.5) \quad \mathbf{V} \end{array}$$

é totalmente diferente da pergunta:

"gente, vocês conseguem entender isso aqui?
Como a gente escreve isso de um jeito formal?"

...e eu considero que a gente não deve discutir a segunda pergunta nos grupos "normais" das duas turmas enquanto ainda tem muita gente que ainda não aprendeu a visualizar sups, infs, e a definição de integral.

Parte 3:
Abusos de linguagem e overloading

Abusos de linguagem

Tem expressões que se a gente usar entre aspas quase todo mundo vai entender... por exemplo:

> Para todo ponto (x,y) no "intervalo fechado" indo do ponto $(7,1)$ ao ponto $(9,1)$ a proposição $G(x,y)$ é verdadeira.

Um dos tipos mais comuns de abuso de linguagem é o overloading — mas sem uma definição explícita de como a operação funciona no tipo novo.

Um exemplo (famoso) de overloading:

$$2+3=5 \qquad \begin{pmatrix}2\\20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\320\end{pmatrix}$$

Exemplo de overloading: imagens de conjuntos
Lembre que a partir de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qualquer nós definimos uma função F que recebe subconjuntos de $\mathbb{R}$ e retorna subconjuntos de $\mathbb{R}$...

$$F(\{7,8,9\}) = \{f(7), f(8), f(9)\} = \{2,1,2\}$$

Alguns livros usam a mesma notação pra f e F:

$$f(\{7,8,9\}) = \{f(7), f(8), f(9)\} = \{2,1,2\}$$

e aí pra decidir qual é o significado de f
a gente precisa descobrir o tipo do argumento
dela – se é número ou conjunto de números.

Exemplo de overloading: imagens de conjuntos (2)

Estes livros estendem o significado original da f assim:

$$\begin{array}{l} \text{Se } A \subset \mathbb{R} \text{ então:} \\ \mathrm{f(A) = \{\, f(a) \mid a{\in}A \,\}} \end{array}$$

Eu estou evitando esse tipo de overloading no curso porque acho que ele deixaria muitos alunos meio desesperados... Só que várias pessoas tentaram inventar os seus próprios jeitos de fazer overloading... por exemplo:

$$\{2,3,4\} \le \{3,4,5\}$$

Isso é muito ambíguo – eu consigo pensar em vários jeitos de definir esse '$\le$' em conjuntos...

Exemplo de overloading ambíguo: '$\leq$' em conjuntos

Se usarmos esta definição pro '$\leq$' em conjuntos,

$$\begin{array}{l} \text{Se } A, B \subset \mathbb{R} \text{ então:} \\ (A \leq B) = (\forall a \in A. \forall b \in B. a \leq b) \end{array}$$

então temos $(\{2,3,4\} \leq \{3,4,5\}) = \mathbf{F}$.

Se usarmos esta definição pro '$\leq$' em conjuntos,

$$\begin{array}{l} \text{Se } A, B \subset \mathbb{R} \text{ então:} \\ (A \leq B) = (\forall a \in A. \exists b \in B. a \leq b) \end{array}$$

então temos $(\{2,3,4\} \leq \{3,4,5\}) = \mathbf{V}$.

Exemplo de overloading ambíguo: '$\leq$' em conjuntos (2)

...e se usarmos esta outra definição pro '$\leq$' em conjuntos,

$$\begin{array}{l} \text{Se } A, B \subset \mathbb{R} \text{ então:} \\ (A \leq B) = \{\, a \in A \mid \forall b \in B. a \leq b \,\} \end{array}$$

então temos $(\{2,3,4\} \leq \{3,4,5\}) = \{2,3\}$.

=(

"Eu amo overloading! E agora?"

Algumas pessoas:
1) adoram usar overloadings nas suas contas informais,
2) querem aprender a formalizar essas contas.
O que elas podem fazer?

Respostas:
a) Avisar que aquelas contas são informais
b) traduzir os overloadings pra algo formal – como:

$$\begin{array}{ll} & \{2,3,4\} \le \{3,4,5\} \\ \rightsquigarrow & \forall a \in \{2,3,4\}. \forall b \in \{3,4,5\}. a \le b \end{array}$$

c) aprender a definir overloadings formalmente.

Aparentemente o (c) é o mais legal de todos, né?...

"Eu amo overloading! E agora?" (2)

...só que pra

c) aprender a definir overloadings formalmente

você vai ter que aprender a testar as suas definições –
e pra isso você vai ter que aprender o (b):

b) traduzir os overloadings pra algo formal

e você vai ter que testar as suas traduções em um monte de casos. A gente só consegue aprender o (c) depois de já ter virado faixa-preta em usar o '$\forall$', o '$\exists$', o '$\{\ |\ \}$', e em tipar e em calcular expressões, e em fazer definições mais simples e testar elas...

Então você vai ter que começar aprendendo o (a) e o (b).

=(

Parte 4:
Mais sobre bolinhas

Lembre que estamos tentando aprender a calcular expressões como estas visualmente, por bolinhas...

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in \{1,2,3\}. x^2 > 4 & \forall x \in [1,3]. x^2 > 4 \\
\exists x \in \{1,2,3\}. x^2 > 4 & \exists x \in [1,3]. x^2 > 4 \\
\{\, x \in \{1,2,3\} \mid x^2 > 4 \,\} & \{\, x \in [1,3] \mid x^2 > 4 \,\}
\end{array}$$

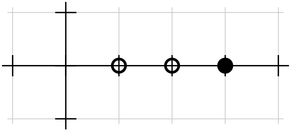
...porque não vai dar tempo de todo mundo aprender a calculá-las via demonstrações formais. Então todo mundo vai ter que aprender os métodos visuais primeiro, e quem conseguir aprendê-los pode vir discutir demonstrações formais num outro grupo do Telegram.

Lembre também que se você calcular coisas via bolinhas em cursos de outros professores eles podem não entender e podem ficar putos. Considere que o método das bolinhas é principalmente pra você aprender a calcular certas coisas de cabeça – ou em rascunhos no canto do papel.

Lembre que pra calcular estas expressões

$$\forall x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4$$
$$\exists x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4$$
$$\{\, x \in \{1,2,3\} \mid x^2 > 4 \,\}$$

nós podemos começar representando os resultados da expressão $x^2 > 4$ nos três valores de x que são "gerados" pelo $x \in \{1,2,3\}$...



Lembre que a gente viu "geradores" e "filtros" aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8

A expressão

$$\forall x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4$$

é verdadeira se e só se todas as bolinhas são pretas.
A expressão

$$\exists x \in \{1,2,3\}.x^2 > 4$$

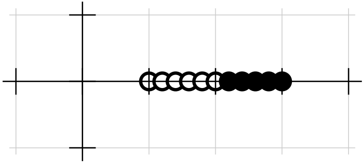
é verdadeira se e só se alguma bolinha é preta.
E o resultado de

$$\{\, x \in \{1,2,3\} \mid x^2 > 4 \,\}$$

é o conjunto de todos os ‘x’zes cujas bolinhas são pretas:

$$\{\, x \in \{1,2,3\} \mid x^2 > 4 \,\} = \{3\}.$$

E pra conjuntos infinitos?
Pra conjuntos infinitos — como o intervalo $[1,3]$ — nós podemos fazer algo parecido, mas vamos ter que fazer um desenho que finja que tem infinitas bolinhas... por exemplo:



Se fizermos um desenho razoável um leitor com uma certa boa vontade vai conseguir entender que temos bolinhas brancas em $x \in [1,2]$ e bolinhas pretas em $x \in (2,3]$...

...e aí $\{\, x \in [1,3] \mid x^2 > 4 \,\} = (2,3]$. =)

E pra conjuntos vazios?
Você lembra porque a gente define que $2^0 = 1$?
É porque o 1 é o elemento neutro da multiplicação,
e aí a gente tem:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}c@{\quad}l}
2^3 \cdot 2^2 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) & = & 2^5 \\
2^4 \cdot 2^1 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2) & = & 2^5 \\
2^5 \cdot 2^0 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2^0 & & \\
 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 1 & & \\
 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) & = & 2^5
\end{array}$$

A gente vai ter algo assim
pro '$\forall$' e pro '$\exists$' também:
$(\forall x \in \emptyset . P(x)) = \mathbf{V}$ (porque $\mathbf{V}$ é o elemento neutro do $\land$)
$(\exists x \in \emptyset . P(x)) = \mathbf{F}$ (porque $\mathbf{F}$ é o elemento neutro do $\lor$)

E pra conjuntos vazios? (2)

Veja:

$$\begin{array}{rcl}
(\forall x\in\{2,4\}.P(x))\land(\forall x\in\{9,20\}.P(x)) &=& (P(2)\land P(4))\land(P(9)\land P(20))\\
(\forall x\in\{2,4,9\}.P(x))\land(\forall x\in\{20\}.P(x)) &=& (P(2)\land P(4)\land P(9))\land(P(20))\\
(\forall x\in\{2,4,9,20\}.P(x))\land(\forall x\in\emptyset.P(x)) &=& (P(2)\land P(4)\land P(9)\land P(20))\land\mathbf{V}\\
&=& (P(2)\land P(4)\land P(9)\land P(20))
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(\exists x\in\{2,4\}.P(x))\lor(\exists x\in\{9,20\}.P(x)) &=& (P(2)\lor P(4))\lor(P(9)\lor P(20))\\
(\exists x\in\{2,4,9\}.P(x))\lor(\exists x\in\{20\}.P(x)) &=& (P(2)\lor P(4)\lor P(9))\lor(P(20))\\
(\exists x\in\{2,4,9,20\}.P(x))\lor(\exists x\in\emptyset.P(x)) &=& (P(2)\lor P(4)\lor P(9)\lor P(20))\lor\mathbf{F}\\
&=& (P(2)\lor P(4)\lor P(9)\lor P(20))
\end{array}$$