

Cálculo 3 - 2021.2

Primeira prova (P1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.2-C3.html>

Regras e dicas

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes,

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT2.pdf>

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 22:30 do dia 21/janeiro/2022 e deve ser entregue até as 10:30 do dia 23/janeiro/2022.

Pra fazer essa prova você vai precisar de idéias que a gente viu durante o curso todo. Se você precisar saber onde estão as idéias necessárias pra resolver algum item pergunte **no grupo do Telegram da turma** que eu respondo com um link pros slides, vídeos, ou livros em que aquela idéia aparece.

Questão 1.

(Total: 5.0 pts)

Esta questão é baseada no Exercício 5 do PDF sobre Séries de Taylor.

Digamos que $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y = y(x) = f(x)$, $z = z(y) = g(y)$, $h = g \circ f$.

Calcule $\text{deriv}_{x_0}^3(h(x))$ em “notação de físicos”.

Dica: você pode começar fazendo MUITAS contas pequenas e traduções simples que você sabe são verdade — por exemplo “ $z = z(y(x)) = g(f(x))$ ”, “ $z_x = \frac{d}{dx}g(f(x))$ ”, “ $z_y = z_y(y) = \frac{d}{dy}g(y) = g'(y) = g'(y(x))$ ”, etc.

Questão 2.**(Total: 5.0 pts)**Sejam $x = x(t) = f(t)$, $y = y(t) = g(t)$, $z = z(x, y) = H(x, y) = x + y - 5$, $P(t) = (x(t), y(t)) = (4 - t^2, 3 + t)$, $t_0 = 0$.

Calcule:

a) **(0.2 pts)** $x_0, y_0, P(0), P(1), P(-1)$,b) **(0.3 pts)** $P'(t), P''(t), P'(0), P'(1), P'(-1), P''(0)$.

Represente graficamente num gráfico só:

c) **(0.5 pts)** $P(0) + P'(0), P(1) + P'(1), P(-1) + P'(-1)$,d) **(0.5 pts)** A trajetória $P(t)$ entre $t = -1$ e $t = +1$,e) **(0.5 pts)** $P(0) + P''(0)$.

Questão 2 (cont.)

f) **(0.2 pts)** Faça o diagrama de numerozinhos de $H(x, y)$ para $x \in \{x_0 - 1, x_0, x_0 + 1\}$, $y \in \{y_0 - 1, y_0, y_0 + 1\}$.

g) **(0.8 pts)** Represente graficamente a superfície $z = H(x, y)$ no quadrado com $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$, $y \in [y_0 - 1, y_0 + 1]$. Faça um desenho em perspectiva improvisada com postes ligados por cabos, como aqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-diag-nums.pdf#page=9>

Desenhe sobre a sua figura do item anterior as seguintes trajetórias (para $t \in [-1, 1]$):

h) **(0.2 pts)** $(x(t), y(t), 0)$,

i) **(0.8 pts)** $(x(t), y(t), z(x, y))$.

Questão 2 (cont.)

Sejam:

$$Q(t) = (x(t), y(t), 0),$$

$$R(t) = (x(t), y(t), z(x(t), y(t))).$$

- i) **(0.8 pts)** Calcule $R(0)$, $R'(0)$, $R''(0)$.
- j) **(0.2 pts)** Calcule $Q(0)$, $Q'(0)$, $Q''(0)$.