Cálculo 3 - 2021.2

Aula 16: diagramas de numerozinhos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C3.html

Minecraft

Aqui tem um vídeo sobre o Minecraft que eu achei muito bom:
http://www.youtube.com/watch?v=fjZAgoxFKiQ

Assistam o trecho entre 3:00 e 8:30 dele.

O mundo do Minecraft é feito de cubos, e se não fosse pelas árvores, cavernas, nuvens, castelos e umas outras coisas complicadas nós poderíamos descrever a superfície desse mundo só dizendo a altura dela em cada ponto (x, y) — onde esses x e y são inteiros e a altura também é um número inteiro.

Diagramas de numerozinhos: postes

Nós vamos usar um método de representar superfícies por poucos números que eu chamo de "diagramas de numerozinhos". Cada número escrito sobre um ponto do plano (x, y) num diagrama de numerozinhos vai ser interpretado como a altura de um poste apoiado naquele ponto; se a gente escreveu "5" no ponto $(3, 4)$ isso quer dizer que temos um poste de altura 5 no ponto $(3, 4)$ do $\mathbb{R}^2$, e quando consideramos que esse poste está em $\mathbb{R}^3$ a base do poste é o ponto $(3, 4, 0)$ e o topo dele é o ponto $(3, 4, 5)$.

Nós geralmente vamos colocar postes só em pontos que têm coordenadas x e y inteiras, e vamos ligar o topo de cada poste aos topos dos postes vizinhos usando cabos que são segmentos de retas.

Dois vídeos antigos

Comece assistindo estes dois vídeos do semestre passado:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-curvas-de-nivel.mp4
http://www.youtube.com/watch?v=mrNyBAM0yqo

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-curvas-de-nivel-2.mp4
http://www.youtube.com/watch?v=usBNtNyZRCA

No semestre passado eu apresentei curvas de nível primeiro e diagramas de numerozinhos depois, mas neste semestre nós vamos ver isso na ordem oposta... então não se preocupe muito com as partes dos vídeos que falam de curvas de nível.

Exercício 1.
Faça este exercício aqui do semestre passado:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-curvas-de-nivel.pdf#page=3
Repare que ele tem gabarito! =)

Exercício 2.
Trate isto aqui como um item extra do exercício 1:
Sejam: $q(t) = \max(0, t-2)$, $r(t) = \min(q(t), 2)$,
$S(x, y) = \max(r(x), r(y))$.

a) Desenhe os gráficos de $q(t)$ e $r(t)$.
b) Faça o diagrama de numerozinhos de $S(x, y)$ –
use os pontos com $x, y \in \{0, \ldots, 6\}$ (49 pontos).
c) Represente a superfície $z = S(x, y)$ em 3D.
Faça o desenho à mão usando perspectiva improvisada.

Cabos na diagonal

Aqui tem um vídeo sobre algumas situações em que a gente obtém figuras ambíguas se a gente só ligar cada poste aos seus quatro vizinhos, e em que a gente consegue figuras bem melhores se a gente desenhar alguns cabos na diagonal:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-c3-cabos-na-diagonal.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=nxsIK0tPWAI

Exercício 3.

Assista o vídeo acima e descubra em quais lugares do seu exercício 2 você precisa acrescentar cabos na diagonal.

Algumas superfícies quadráticas
Dê uma olhada nas páginas 81 a 96 do Bortolossi —

Ele apresenta superfícies quadráticas de um jeito que supõe que a pessoa que está lendo 1) tem acesso a um computador pra fazer gráficos, e 2) que ela lembra a matéria do final de GA mais ou menos bem. Não tem nada a ver com a nossa situação...

Agora nós vamos ver um jeito de usar os diagramas de numerozinhos e as "variáveis dependentes" do Thompson pra visualizar certas superfícies quadráticas fazendo bem poucas contas — e depois vamos usar essas superfícies quadráticas pra um montão de coisas diferentes.

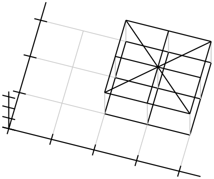
A equação da superfície

Nós vamos usar esta equação pra nossa superfície:

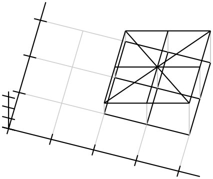
$$\begin{array}{rcl} z &=& z(x,y) \\ &=& z(x_1,y_1) \\ &=& a+b\cdot(x_1-x_0)+c\cdot(y_1-y_0) \\ &+& d\cdot(x_1-x_0)^2+e\cdot(x_1-x_0)(y_1-y_0) \\ &+& f\cdot(y_1-y_0)^2 \\ &=& a+b\Delta x+c\Delta y+d\Delta x^2+e\Delta x\Delta y+f\Delta y^2 \end{array}$$

Repare que vamos usar $x=x_1$ e $y=y_1$ pra podermos usar as convenções $\Delta x=x_1-x_0$ e $\Delta y=y_1-y_0$ sem precisamos definir nada extra.

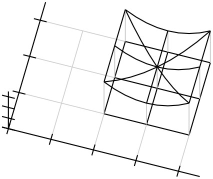
Nas figuras dos próximos slides vamos sempre usar $x_0=3$ e $y_0=2$.



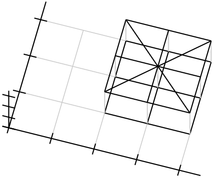
$z = 2$



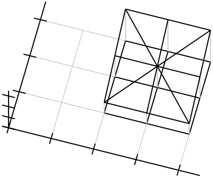
$z = 2 + \Delta x$



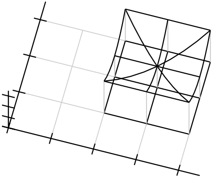
$z = 2 + \Delta x^2$



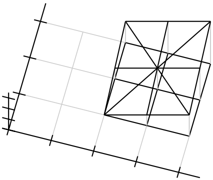
$z = 2$



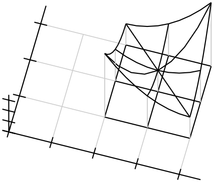
$z = 2 + \Delta y$



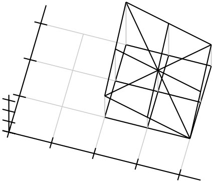
$z = 2 + \Delta y^2$



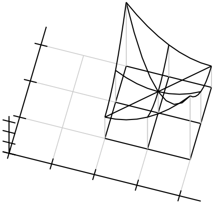
$z = 2 + (\Delta x + \Delta y)$



$z = 2 + (\Delta x + \Delta y)^2$



$z = 2 + (\Delta y - \Delta x)$



$z = 2 + (\Delta y - \Delta x)^2$

Exercício 4.

Faça o diagram de numerozinhos de cada uma das superfícies abaixo. Considere que os pontos que nos interessam são só os em que $x \in \{x_0 - 1, x_0, x_0 + 1\}$ e $y \in \{y_0 - 1, y_0, y_0 + 1\}$. Veja este vídeo pra entender:

`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=2noSv8hyNIk`

a) $z = 2$
b) $z = x$
c) $z = \Delta x$
d) $z = \Delta x^2$
e) $z = \Delta x^2 + 2$
f) $z = y$
g) $z = \Delta y$
h) $z = \Delta y^2$
i) $z = \Delta y^2 + 2$
j) $z = \Delta x^2 + \Delta y^2$
k) $z = \Delta x^2 + \Delta y^2 + 2$
l) $z = \Delta x + \Delta y$
m) $z = (\Delta x + \Delta y)^2$
n) $z = (\Delta x + \Delta y)^2 + 2$

Exercício 5.
Relembre o que era o "estudo do sinal de uma função" que você deve ter visto em Cálculo 1, e faça um diagramas indicando em que intervalos cada uma das funções abaixo é positiva, negativa, ou zero.

Dica: veja este vídeo, sobre diagramas de sinais em $\mathbb{R}^2$:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo

a) x
b) $x+1$
c) $x(x+1)$
d) $4-x$
e) $x(x+1)(4-x)$

Exercício 6.
Agora adapte essa idéia do diagrama do sinal para $\mathbb{R}^2$,
no quadrado com $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ e $y \in [y_0 - 1, y_0 + 1]$,
e faça o diagrama do sinal para cada uma das funções abaixo.
Dica: veja este vídeo, sobre diagramas de sinais em $\mathbb{R}^2$:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo

a) Δx
b) Δx^2
c) Δy
d) $\Delta x \Delta y$
e) $\Delta x + \Delta y$
f) $\Delta x - \Delta y$
g) $(\Delta x + \Delta y)^2$
h) $(\Delta x - \Delta y)^2$
i) $(\Delta x + \Delta y)(\Delta x - \Delta y)$
j) $(\Delta x + \Delta y)\Delta x$
k) $-(\Delta x + \Delta y)^2$

Exercício 7.
A partir de agora vamos considerar que:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x(t) \\ & = & x(t_1) \\ & = & x_0 + \alpha \cdot (t_1 - t_0) \\ & = & x_0 + \alpha \Delta t \\ y & = & y(t) \\ & = & y(t_1) \\ & = & y_0 + \beta \cdot (t_1 - t_0) \\ & = & y_0 + \beta \Delta t \end{array}$$

Onde $t_0 = 5$; x_0 e y_0 continuam os mesmos de antes, e α e β são constantes cujos valores podem depender do contexto.

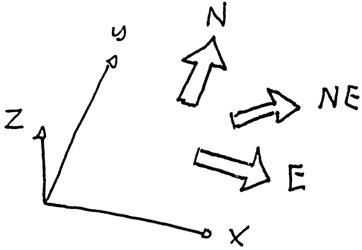
Exercício 7 (cont.)
A trajetória $(x(t), y(t))$ é sempre um movimento retilíneo uniforme pra quaisquer valores de α e β.

a) Calcule $\overrightarrow{(x_t, y_t)}$.

Cada escolha de valores para α e β dá uma trajetória diferente. Nos itens abaixo você vai visualizar algumas dessas trajetórias e vai desenhá-las no papel — desta forma aqui: você vai marcar no plano os pontos $(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$ para $\Delta t = -1, 0, 1$, vai escrever "$\Delta t = -1$", "$\Delta t = 0$" e "$\Delta t = 1$" do lado dos pontos correspondentes a esses valores de Δt, e ao lado de cada desenho você vai escrever os valores de α e β.

b) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 1$, $\beta = 0$.
c) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Exercício 7 (cont.)
...e além disso você vai escrever algo como "Leste" (ou "E"), "Noroeste" (ou "NW") do lado de cada um dos seus desenhos de trajetórias pra indicar em que direção o ponto (x, y) está andando. Use a convenção que costuma ser usada em mapas, matemática e videogames, em que o Leste é pra direita e o Norte é pra cima:



Exercício 7 (cont.)

d) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = 0$, $\beta = -1$ e diga o nome da direção dela.

e) Desenhe a trajetória associada a $\alpha = -1$, $\beta = 1$. e diga o nome da direção dela.

f) Quais são os valores mais simples de α e β — onde "simples" quer dizer "0, 1 ou -1" — que fazem a trajetória ir pro nordeste? E pro sudoeste?

Nos próximos exercícios eu vou me referir a essas trajetórias em que α e β são números "simples" pelos nomes das direções delas.

O significado geométrico de z_t

Nós sabemos calcular z, z_t e z_{tt} a partir de t,
e sabemos calcular z, z_t e z_{tt} em t_0.

Com um pouquinho de esforço você deve ser
capaz de visualizar o que acontece perto de t_0...
o valor da primeira derivada, $(z_t)(t_0)$, diz o seguinte:

$$\begin{array}{lcl}
z \text{ aumenta quando } t \text{ aumenta (“crescente”)} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) > 0 \\
z \text{ “fica horizontal” quando } t \text{ aumenta} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) = 0 \\
z \text{ diminui quando } t \text{ aumenta (“decrescente”)} & \Longleftrightarrow & (z_t)(t_0) < 0
\end{array}$$

Veja o vídeo!!!

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-3.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=VwowES6EM3Y

O significado geométrico de z_{tt}

Nos casos em que z "fica horizontal" nós vamos usar a segunda derivada, $(z_{tt})(t_0)$, pra ver se o gráfico de $z(t)$ "parece uma parábola" ao redor de t_0, e se essa parábola tem concavidade pra cima ou pra baixo:

$$\begin{array}{lcl}
\text{concavidade pra cima} & \iff & (z_{tt})(t_0) > 0 \\
\text{“parece horizontal”} & \iff & (z_{tt})(t_0) = 0 \\
\text{concavidade pra baixo} & \iff & (z_{tt})(t_0) < 0
\end{array}$$

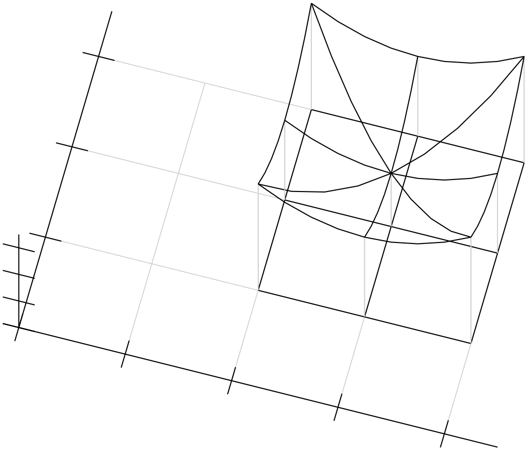
Eu usei muitos termos informais de propósito. No próximo exercício você vai tentar descobrir sem fazer contas qual é o comportamento da z em torno de t_0, e no outro exercício você vai fazer as contas e vai ver se o seu olhômetro funcionou direito.

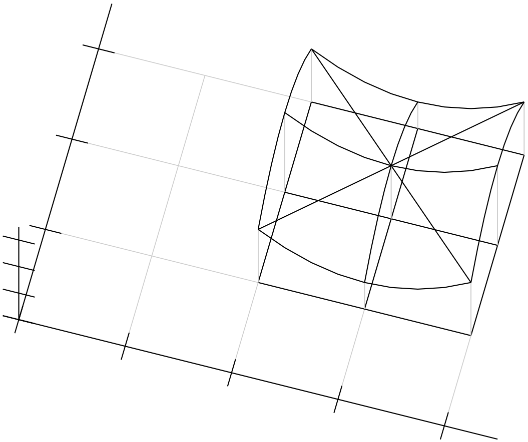
Exercício 8.
Em cada um dos desenhos dos próximos slides diga o que acontece quando a trajetória $(x(t), y(t))$ anda em uma das oito direções simples, que são:

norte, nordeste, leste, sudeste,
sul, sudoeste, oeste, noroeste.

Use estas categorias na suas respostas:

z cresce
z decresce
z faz uma parábola com concavidade pra cima
z faz uma parábola com concavidade pra baixo
z é "muito horizontal"





PDFs antigos:

Sobre “adivinhar trajetórias”:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-vetor-tangente.pdf#page=6

Diagramas de numerozinhos (2020.2):
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-rcadeia1.pdf#page=14

Mini-teste sobre cortes em superfícies no olhômetro (2020.2):
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf#page=4

Questão 1 da P1 de 2020.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-P1.pdf#page=8

Curvas de nível e diagramas de numerozinhos (2021.1):
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-curvas-de-nivel.pdf#page=3