Cálculo 3 - 2021.1

Aula 1: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C3.html

Neste semestre...

Desta vez um dos objetivos principais do curso vai ser a gente aprender a visualizar muitas coisas em 3D ou de cabeça ou fazendo umas pouquinhas contas e desenhos no papel. Pra isso a gente vai treinar fazer "desenhos tortos que todo mundo entenda" – porque fazer desenhos à mão livre medindo tudo no olhômetro costuma ser bem mais rápido do que fazer desenhos com régua – e em TODOS os exercícios que eu vou passar durante o curso as contas são simples o suficiente pra poderem ser feitas meio de cabeça e meio no papel.

Em Cálculo 2 você muitas vezes teve que desenhar figuras feitas de 4, 8, ou 16 retângulos, e aí você levava 5 minutos pra entender como desenhar o primeiro retângulo, depois só um minuto pra desenhar o segundo, e aos poucos você entendia o padrão, e no final você desenhava cada retângulo em menos de 5 segundos – e aí você conseguia *visualizar* como seria a figura correspondente com 256, 512 ou 1024 retângulos, e você passava a conseguir visualizar certos somatórios a partir das fórmulas deles, sem precisar desenhar as figuras correspondentes a eles.

Nos exercícios deste PDF você vai desenhar parábolas a partir de 5 pontos delas, e você vai tentar "adivinhar" o resto da parábola a partir destes poucos pontos. O modo matematicamente correto de fazer isto seria como o Bortolossi faz em alguns exercícios; dê uma olhada nas páginas 113 e 114 dele. O exercício [24] da página 113 dá seis fórmulas e seis gráficos – os gráficos estão na página seguinte – e ele pede pra você descobrir qual fórmula corresponde a qual gráfico.

Neste curso eu vou passar um monte de exercícios com enunciados como "tente adivinhar o gráfico da equação tal". Eu vou usar a expressão "tente adivinhar" pra enfatizar que o que a gente vai fazer não é totalmente formal: a partir de 5 pontos a gente consegue fazer uma "hipótese razoável" de como é o formato de uma parábola, a partir de 20 pontos dessa parábola a gente conseguiria fazer uma hipótese melhor de como ela é, e calculando um milhão de pontos dela a gente conseguiria fazer um desenho bem mais preciso dela... só que a gente quer aprender a fazer desenhos bons o suficiente a partir de contas que a gente possa fazer na mão!...

Leia isto aqui, do semestre passado:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-vetor-tangente.pdf#page=6`

Quem estiver interessado em aprender a usar o computador pra fazer os desenhos do curso pode entrar num grupo de Telegram cujo link vai estar na página do curso, mas que vai ser separado do grupo da turma. Quando a gente produzir notebooks do GeoGebra ou do Jupyter Notebooks que qualquer pessoa consiga rodar na sua máquina em poucos minutos aí eu vou compartilhar eles no grupo da turma e na página do curso, mas enquanto nós estivermos levando horas pra fazer cada figura/notebook eu prefiro que a discussão sobre eles seja no grupo dos programas.

Se você estiver interessado no grupo sobre programação talvez você vá querer participar desta oficina aqui também... dê uma olhada:
`http://angg.twu.net/2021-oficina.html`
Dê uma olhada nisto aqui também – mas não sei se vai dar pra gente ver isto na oficina...
`http://angg.twu.net/LATEX/2021emacsconf.pdf`
`http://angg.twu.net/emacsconf2021.html`

Introdução ao curso

Cálculo 3 é principalmente sobre:

1. funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ – que o Bortolossi costuma chamar de curvas parametrizadas, mas nós vamos chamar de trajetórias, e

2. funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, que vão gerar superfícies.

Depois que nós aprendermos o suficiente sobre (1) e (2) nós vamos poder lidar com coisas um pouco mais gerais, como funções $F : A \to \mathbb{R}^n$, onde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Nossos primeiros objetivos vão ser:

1. Aprender a representar graficamente algumas trajetórias, usando a idéia de traço do Bortolossi (cap.6, p.188), mas escrevendo algumas informações a mais, como "$t = 0$" e "$t = 1$" em alguns pontos,

2. Calcular e representar graficamente vetores tangentes a trajetórias ("vetores velocidade"),

3. Entender vetores secantes (cap.6, p.199),

4. Entender aproximações de primeira ordem pra trajetórias, que dão retas parametrizadas, e depois aproximações de segunda ordem, que vão dar parábolas parametrizadas.

...mas hoje nós vamos fazer uma revisão de algumas idéias de GA.

Você já deve ter visto estas duas convenções diferentes para representar pontos e vetores... am Álgebra Linear tanto pontos quanto vetores em $\mathbb{R}^2$ são representados como matrizes-coluna de altura 2:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}40\\50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}42\\53\end{pmatrix}$$

e em Geometria Analítica pontos e vetores são escritos de forma diferente – vetores têm uma seta em cima – e representados graficamente de formas diferentes...

$$(2,3) + \overrightarrow{(40,50)} = (42,53)$$

Vetores como setas

Um ponto (a, b) é interpretado graficamente como um ponto (a, b) de $\mathbb{R}^2$, e um vetor $\overrightarrow{(c, d)}$ é interpetado como um deslocamento, e desenhado como uma seta.

Se o vetor $\overrightarrow{(c, d)}$ aparece sozinho a representação gráfica dele é qualquer seta que anda c unidades pra direita e d unidades pra cima. Às vezes a gente pensa que $\overrightarrow{(c, d)}$ é o conjunto de *todas* as setas assim – o conjunto de todas as setas "equipolentes" a esta; veja a p.9 do livro do CEDERJ.

Uma convenção (temporária)

O resultado da expressão $(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}$ é o ponto $(a+c,b+d)$, mas a representação gráfica dele vai ser:
1) o ponto (a,b),
2) uma seta indo de (a,b) para $(a+c,b+d)$,
3) o ponto $(a+c,b+d)$,
4) anotações dos lados dos pontos (a,b) e $(a+c,b+d)$ dizendo os "nomes" destes pontos e uma anotação do lado da seta $\overrightarrow{(c,d)}$ dizendo o seu "nome" — como nos dois exemplos abaixo (oops! Falta fazer os desenhos!):

(pôr o desenho aqui)

Nesta aula vai ser obrigatório pôr todos os nomes, mas nas outras não.

A representação gráfica de

$$((1,1)+\overrightarrow{(2,0)})+\overrightarrow{(1,2)} = (1,1)+(\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)})$$

Vai ser um triângulo feito de três pontos e três setas – os que estão em vermelho aqui:

$$\underbrace{(\underbrace{(1,1)+\overrightarrow{(2,0)}}_{(3,1)})+\overrightarrow{(1,2)}}_{(4,3)} = \underbrace{(1,1)+(\underbrace{\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)}}_{\overrightarrow{(3,2)}})}_{(4,3)}$$

O objetivo do próximo exercício é você relembrar como representar graficamente certas expressões com pontos e vetores usando quase só o olhômetro, quase sem fazer contas.

Veja o vídeo!

Desenhando parábolas (quase) no olhômetro

Digamos que conhecemos A, $\vec{v}$, e $\vec{w}$. Então a trajetória

$$P(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$$

é uma parábola – e queremos aprender a desenhar os 5 pontos mais fáceis dela, que são $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$, $P(-2)$, usando o máximo de olhômetro e o mínimo possível de contas...

$\boxed{\text{Veja o vídeo!}}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro

1) Sejam $A = (3,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (2)

2) Sejam $A = (1,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (3)

3) Sejam $A = (1,1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1,1)}$.

Represente graficamente num gráfico só:

a) A

b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$

c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$

d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$

f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$

g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$

h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$

i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Exercício: desenhando parábolas (quase) no olhômetro (4)

4) Sejam $A = (2, 6)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(2, -1)}$.
Represente graficamente num gráfico só:
a) A
b) $(A + \vec{v}) + \vec{w}$
c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$
d) $(A + 2\vec{v}) + 4\vec{w}$
e) $(A + 4\vec{w}) + 2\vec{v}$
f) $(A - \vec{v}) + \vec{w}$
g) $(A + \vec{w}) - \vec{v}$
h) $(A - 2\vec{v}) + 4\vec{w}$
i) $(A + 4\vec{w}) - 2\vec{v}$

Obs: você vai precisar de um gráfico que contenha os pontos (0,0) e (12,8).