Cálculo 3 - 2021.2

Aula 26: Taylor em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C3.html

Introdução
Na P1 vocês viram como calcular a série de Taylor de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ truncada até qualquer grau...

Agora nós vamos ver um pouco do que acontece quando a gente calcula a primeira e a segunda derivada de funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, onde $m, n \in \{1, 2\}$.

Comece dando uma olhada neste PDF e nestes vídeos do semestre passado:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-matriz-jacobiana.pdf

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-matriz-jacobiana.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=kMGtZk5er9w

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-matriz-jacobiana-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=D_YKka3RG9E

Algumas superfícies de primeiro grau

Uma superfície $z = F(x, y)$ é uma função homogênea de primeiro grau quando ela é desta forma daqui: $F(x, y) = ax + by$.

Vamos começar verificando que você sabe desenhar o diagramas de numerozinhos dessas funções desse tipo bem rápido — que você já sabe que padrões eles obedecem e que você consegue desenhar cada um em poucos segundos.

Exercício 1.
Desenhe o diagrama de numerozinhos 5×5 de cada uma das funções abaixo. Use $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

a) $-3x$
b) $2y$
c) $4x - y$
d) $-4x - 3y$

Algumas curvas de nível

Leia a definição do Bortolossi de curvas de nível nas páginas 97 até 100 do capítulo 3 dele.

Exercício 2

Desenhe pelo menos 5 curvas de nível sobre cada um dos diagramas de numerozinhos que você fez no exercício 1, e do lado de cada uma dela escreva o valor de z nela — por exemplo, '$z = 0$', '$z = 4$', $z = -42$, etc.

Exercício 3

Em cada um dos seus 4 diagramas de numerozinhos escolha uma curva de nível dele *na qual* $z \neq 0$ — ela vai ser uma reta — e dê uma parametrização para ela. Lembre que retas parametrizadas em $\mathbb{R}^2$ têm essa forma aqui:

$$r \;=\; \{\,(\alpha,\beta) + t\overrightarrow{(\gamma,\delta)} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$$

Exercício 4

Agora entenda a definição de "vetor gradiente" do Bortolossi.
Ela está na página 298 do livro, no capítulo 8.
Para cada umas suas quatro superfícies:

a) calcule $\nabla z(x, y)$,
b) verifique que $\nabla z(x, y)$ não depende do ponto (x, y),
c) calcule $\nabla z(2, 3)$,
d) calcule $\nabla z(x, y) \cdot \overrightarrow{(\gamma, \delta)}$, onde '$\cdot$' é o produto escalar e $\overrightarrow{(\gamma, \delta)}$ é o vetor diretor da reta parametrizada dessa superfície que você encontrou no exercício 3.
e) Verifique que $\nabla z(x, y) \perp \overrightarrow{(\gamma, \delta)}$, isto é, que o gradiente e o vetor diretor são ortogonais.