Cálculo 2 - 2022.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Introdução

Lembre que a gente não teve tempo no curso pra "aprender a resolver integrais" no sentido usual... "resolver integrais" significa começar com um problema como, sei lá, por exemplo,

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 8}\, dx \;=\; ?$$

e aí fazer um monte de contas até transformar a expressão original numa expressão que "é mais fácil de calcular" porque não tem mais um sinal de integral, e depois checar se todas as contas estão certas e listar quais condições têm que ser verdade pra todas as igualdades serem verdadeiras...
No curso só deu tempo da gente fazer o início disso, que é aprender e ler contas de "resolver integrais", e entender, verificar e justificar cada passo delas.
Em vários dos problemas desta prova você vai ter que justificar os passos mais difíceis de certas "contas de resolver integrais". Eu tentei fazer essa prova de um modo que valesse muito a pena vocês relerem ela depois e tentarem entender e justificar os outros passos dessas contas...

...mais precisamente: 1) eu escolhi integrais que usam técnicas que vão ser <u>muito úteis</u> nas matérias que vêm depois (principalmente as de Física); 2) eu pus links pra mais textos (com exercícios!) sobre essas técnicas de integração; 3) e se vocês tiverem que fazer vista de prova eu talvez peça pra vocês justificarem outros passos da contas pra ver se vocês estão sabendo a matéria...

A prova vai ser posta neste link aqui em breve:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P1.pdf`

Estudem por ela quando der!
Boa prova! =)

Questão 1

(Total: 5.0 pts)
(Sobre frações parciais)
Considere:

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(1)}{=} & \ln|x| \\
\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx & \overset{(2)}{=} & \displaystyle\int \frac{1}{u}\,du \\
& \overset{(3)}{=} & \ln|u| \\
& \overset{(4)}{=} & \ln|x+a| \\
\displaystyle\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x+5} & = & \displaystyle\frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)}+\frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\
& = & \displaystyle\frac{2(x+5)+4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\
& = & \displaystyle\frac{2x+10+4x+12}{(x+3)(x+5)} \\
& = & \displaystyle\frac{6x+22}{x^2+8x+15} \\
\displaystyle\int \frac{6x+22}{x^2+8x+15}\,dx & = & \displaystyle\int \frac{2}{x+3}+\frac{4}{x+5}\,dx \\
& = & \displaystyle\int \frac{2}{x+3}\,dx+\int \frac{4}{x+5}\,dx \\
& = & \displaystyle 2\int \frac{1}{x+3}\,dx+4\int \frac{1}{x+5}\,dx \\
& \overset{(12)}{=} & 2\ln|x+3|+4\ln|x+5|
\end{array}$$

Sejam [FP1], [FP2] e [FP12] as igualdades numeradas à esquerda.

a) **(2.0 pts)** Mostre como justificar o '$\overset{(2)}{=}$' usando o [MV2].

b) **(3.0) pts)** Mostre como justificar o '$\overset{(12)}{=}$'.

Questão 1: gabarito

Pra fazer o item (a) eu vou começar dando um nome curto – [FP_2] – pra igualdade '$\overset{(2)}{=}$', e relembrando qual é a fórmula [MV_2]:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{FP}_2] & = & \left(\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx = \int \frac{1}{u}\,dx\right) \\
[\mathrm{MV}_2] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right)
\end{array}$$

...e agora vou procurar uma substituição que transforma a [MV_2] em algo parecido com a [FP_2]. Eu não consigo encontrar ela direto, então vou fazer vários chutes – a escolha da substituição – e testes – escrever por extenso o resultado da substituição e ver se esse resultado é "parecido" com a [FP_2]:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=x+a \\ g'(x):=1 \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(x+a)\cdot 1\,dx = \int_{u=a+a}^{u=b+a} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=x+a \\ g'(x):=1 \\ a:=b \\ b:=c \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=b}^{x=c} f'(x+a)\cdot 1\,dx = \int_{u=x+a}^{u=x+a} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=x+a \\ g'(x):=1 \\ f'(x):=\frac{1}{x} \\ a:=b \\ b:=c \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=b}^{x=c} \frac{1}{x+a}\cdot 1\,dx = \int_{u=b+a}^{u=c+a} \frac{1}{u}\,du\right)
\end{array}$$

O último resultado acima é bastante bom. Note que ele tem um '$\cdot 1$' e que ele descreve uma mudança de variável na integral definida, não na integral indefinida.

Agora o item (b). Se combinarmos as igualdades '$\overset{(2)}{=}$', '$\overset{(3)}{=}$' e '$\overset{(4)}{=}$' obtemos a igualdade abaixo:

$$[\mathrm{FP}_{234}] \quad = \quad \left(\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a|\right)$$

Ela vale pra todo valor de a. Aqui estão dois casos particulares dela:

$$\begin{array}{l}
[\mathrm{FP}_{a=3}] = [\mathrm{FP}_{234}]\,[a:=3] = \left(\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x+3|\right) \\
[\mathrm{FP}_{a=5}] = [\mathrm{FP}_{234}]\,[a:=3] = \left(\displaystyle\int \frac{1}{x+5}\,dx = \ln|x+5|\right)
\end{array}$$

Considere esta série de igualdades:

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx & \overset{(20)}{=} & \ln|x+a| \\
\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,dx & \overset{(21)}{=} & \ln|x+3| \\
\displaystyle\int \frac{1}{x+5}\,dx & \overset{(22)}{=} & \ln|x+5| \\
\displaystyle 2\int \frac{1}{x+3}\,dx + 4\int \frac{1}{x+5}\,dx & \overset{(23)}{=} & 2\ln|x+3| + 4\ln|x+5|
\end{array}$$

As três primeiras são justificadas por fórmulas pras quais nós já demos nomes, e a última é consequência das duas do meio.

Questão 2

(Total: 3.0 pts)
(Sobre "integrais de potências de senos e cossenos")

A demonstração abaixo é do gabarito de uma prova antiga minha:

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
= \; & \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
= \; & \int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - \operatorname{sen} x^2)(\cos x) \, dx \\
\overset{(3)}{=} \; & \int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
= \; & \int s^5 - s^7 \, ds \\
= \; & \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
= \; & \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}$$

Esta caixinha aqui

$$\left[\begin{smallmatrix} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \operatorname{sen} x = s \\ (\cos x)^2 = 1 - s^2 \\ \cos x \, dx = ds \end{smallmatrix} \right]$$

"Explica" a mudança de variáveis.

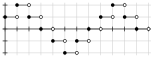
a) **(3.0 pts)** Mostre como justificar o '$\overset{(3)}{=}$' usando o [MV2].

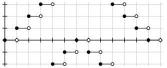
Questão 2: gabarito

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \left(\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - \operatorname{sen} x^2)(\cos x)\, dx \stackrel{(3)}{=} \int s^5 (1 - s^2)\, ds \right) \\
[\mathrm{MV}_2] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \right) \\
[\mathrm{MV}_2] \left[u := s \right] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{s=g(a)}^{s=g(b)} f'(s)\, ds \right) \\
[\mathrm{MV}_2] \begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ u := s \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(\operatorname{sen}(x)) \cdot \cos(x)\, dx = \int_{s=\operatorname{sen}(a)}^{s=\operatorname{sen}(b)} f'(s)\, ds \right) \\
[\mathrm{MV}_2] \begin{bmatrix} f'(x) := x^5(1 - x^2) \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ u := s \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \left(\operatorname{sen}(x)^5 \left(1 - \operatorname{sen}(x)^2 \right) \right) \cdot \cos(x)\, dx = \int_{s=\operatorname{sen}(a)}^{s=\operatorname{sen}(b)} \left(s^5 \left(1 - s^2 \right) \right)\, ds \right)
\end{array}
$$

Questão 3

(Total: 3.0 pts)
(Sobre funções escada)
Sejam:

$f(x) \ =$  ,

$g(x) \ =$  ,

$$F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt,$$

$$G(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt,$$

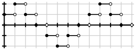
e seja $H(x)$ a função contínua cujo domínio é o conjunto $D = [0,7) \cup (7,12]$ e que obedece estas três condições:
1) $H(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt$ se $x \in [0,7)$,
2) $H(10) = 1$, e
3) "para todo $x \in (7,12]$ temos $H'(x) = g(x)$", onde eu pus a expressão acima entre aspas porque ela é um abuso de linguagem comum quando a gente fala de funções escada... a tradução disto pra uma linguagem mais formal é: "$H'(x) = g(x)$ é verdade em todos os pontos $x \in (7,12]$ nos quais a $g(x)$ é contínua.

a) **(0.5 pts)** Faça o gráfico da $F(x)$.
b) **(0.5 pts)** Faça o gráfico da $G(x)$.
c) **(1.0 pts)** Faça o gráfico da $H(x)$.

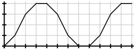
d) **(1.0 pts)** Digamos que a função $M(x)$ é definida exatamente da mesma forma que a $H(x)$, mas mudando o "$H(10) = 1$" por "$M(10) = 2$". Faça o gráfico da $M(x)$.

Questão 3: gabarito

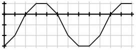
$$f(x) \quad =$$



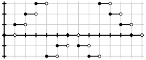
$$F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt \quad =$$



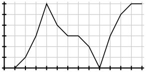
$$G(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt \quad =$$



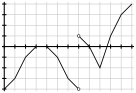
$$g(x) \quad =$$



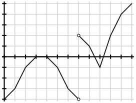
$$\int_{t=0}^{t=x} g(t)\,dt \quad =$$

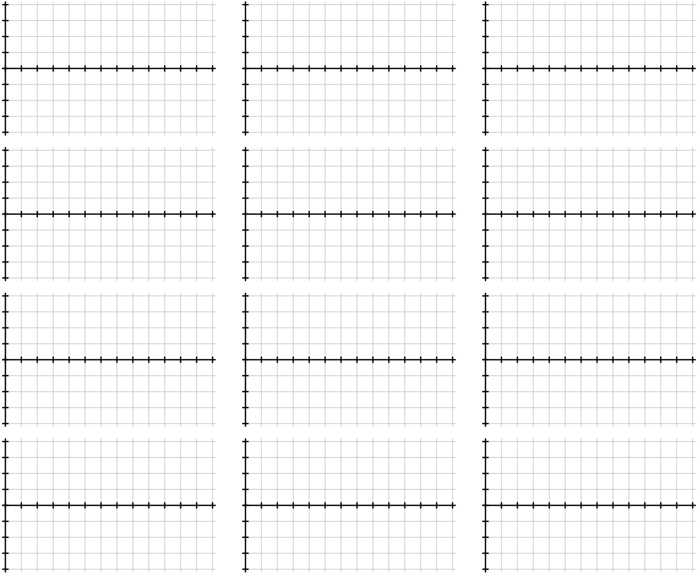


$$\begin{array}{r} H(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \ \ \text{se} \ \ x \in [0,7), \\ \text{“}H'(x) = g(x)\text{”} \ \ \text{se} \ \ x \in (7,12], \\ H(10) = 1 \end{array} \quad \Rightarrow$$



$$\begin{array}{r} M(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \ \ \text{se} \ \ x \in [0,7), \\ \text{“}M'(x) = g(x)\text{”} \ \ \text{se} \ \ x \in (7,12], \\ M(10) = 2 \end{array} \quad \Rightarrow$$





$$[\mathrm{RC}] \;=\; \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[\mathrm{MV}_1] \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & \overset{(1)}{=} & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & \overset{(2)}{=} & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & \overset{(3)}{=} & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & \overset{(4)}{=} & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MV}_2] \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;\overset{(4)}{=}\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\mathrm{MV}_3] \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right) \qquad [\mathrm{MV}_4] \;=\; \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MVI}_3] \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \\ \multicolumn{3}{l}{\text{Obs: } u = g(x)} \end{array} \right) \qquad [\mathrm{MVI}_4] \;=\; \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array} \right)$$

Links pra estudar esta matéria:

http://angg.twu.net/2019.2-C2/2019.2-C2.pdf#page=37
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-fracoes-parciais.pdf
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=240