Cálculo 2 - 2022.1

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Questão 1

(Total: 2.5 pts)
Isto é um exemplo de substituição trigonométrica:

$$\begin{aligned}
\int s^4 \sqrt{1-s^2}^{10} \, ds &\overset{(1)}{=} \int (\operatorname{sen}\theta)^4 \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}^{10} \cos\theta \, d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^4 \sqrt{(\cos\theta)^2}^{10} \cos\theta \, d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^{10} \cos\theta \, d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^{11} \, d\theta
\end{aligned}$$

Alguns livros justificam essa mudança de variável dizendo só algo como: "seja $s = \operatorname{sen}\theta$; então $ds = \cos\theta \, d\theta$".
Note que a gente não chega a resolver a integral – a gente só transforma a integral original, $\int s^4 \sqrt{1-s^2}^{10} \, ds$, em algo que é um pouco mais fácil de integrar.

Justifique a igualdade '$\overset{(1)}{=}$' usando o [MV$_2$].
Fórmulas:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{MV}_2] &= \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) \, du \right) \\
[\mathrm{RC}] &= \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \right)
\end{aligned}$$

Questão 2

(Total: 3.5 pts)
Todos os métodos pra resolver EDOs que eu conheço direito podem ser expressos usando o '[:=]'. Por exemplo, digamos que a nossa EDO é:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \qquad (*)$$

Se traduzirmos a $(*)$ pra notação antiga – a que eu chamo de "notação de físicos" (sempre entre aspas!) no curso de Cálculo 3 – ela vira:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

Uma EDO com variáveis separáveis (obs: vou abreviar isso pra "EDOVS"; obs 2: eu nunca vi ninguém mais usando essa abreviação) é uma em que "$\frac{dy}{dx}$ pode ser expresso na forma $\frac{g(x)}{h(y)}$ com $g(x)$ dependendo só de x e $h(y)$ dependendo só de y". Pra pegar um exemplo concreto, vamos definir $g(x)$ como $-2x$ e $h(y)$ como $2y$; aí temos $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \frac{-2x}{2y} = \frac{g(x)}{h(y)}$. O método pra encontrar soluções de uma EDOVSs pode ser resumido na "demonstração" à direita. Os passos desse método que ficam implícitos são: 1) escolha uma primitiva $G(x)$ para $g(x)$; 2) escolha uma primitiva $H(y)$ para $h(y)$; 3) escolha as constantes C_1 e C_2; 4) defina C_3 como $C_2 - C_1$; 4) escolha uma inversa $H^{-1}(x)$ para a função $H(y)$ – ela tem que obedecer $H^{-1}(H(x)) = x$.

a) **(1.0 pts)** Qual é o resultado da substituição ? Dica: ele deve terminar com algo como $y = -\sqrt{25 - x^2}$.

b) **(1.0 pts)** Verifique que a função $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ é uma solução para a EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

c) **(1.0 pts)** Verifique que essa solução passa pelos pontos $(0, -5)$, $(3, -4)$ e $(4, -3)$.

d) **(0.5 pts)** Verifique que se estivermos trabalhando só com números reais então $f(10)$ não está definida – ou seja, o domínio dessa solução não é o $\mathbb{R}$ todo.

$$[\text{EDOVSG}] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\ \parallel & & \parallel \\ H(y) + C_1 & & G(x) + C_2 \\ H(y) & = & G(x) + C_2 - C_1 \\ & = & G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$[\text{SE}_1] = \begin{bmatrix} g(x) := -2x \\ G(x) := -x^2 \\ h(x) := 2x \\ H(x) := x^2 \\ H^{-1}(x) := -\sqrt{x} \\ C_1 := 4 \\ C_2 := 29 \\ C_3 := 25 \end{bmatrix}$$

Questão 3.

(Total: 1.0 pts)

Desenhe os campos de direções para as EDOs abaixo. Mais precisamente: para cada um dos 25 pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ calcule o valor de $\frac{dy}{dx}$ naquele ponto, interprete esse valor como um coeficiente angular, e faça um tracinho com esse coeficiente angular centrado naquele ponto (x, y).

a) **(0.5 pts)** Faça isso para a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

b) **(0.5 pts)** Faça isso para a EDO

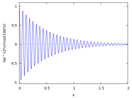
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2}.$$

Questão 4

(Total: 3.0 pts)
EDOs *parecidas* com essa aqui

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \qquad (*)$$

vão ser incrivelmente importantes nos cursos de Física. Algumas delas descrevem "oscilações amortecidas", como esta figura:



A maioria dos livros "normais" de EDOs ensinam um modo de resolver a $(*)$ que eu acho muito árido. Nesta questão você vai ver um método pra resolver EDOs desse tipo que eu acho bem mais legal, e que eu aprendi num curso de Álgebra Linear. Nesse método a gente trata funções como vetores (de dimentão infinita) e a derivada como uma transformação linear (uma "matriz de dimensão infinita"). Quando eu precisar enfatizar que estou "em Álgebra Linear" eu vou escrever f e D ao invés de $f(x)$ e $\frac{d}{dx}$.

Isto aqui é uma demonstração quase completa do modo rápido de encontrar as "soluções básicas" e a "solução geral" da EDO $(*)$... ela é "quase completa" no sentido de que ela é o que as pessoas escrevem no quadro quando explicam esse método, mas sem a parte falada.

$$\begin{array}{rcl}
f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) & = & 0 \\
\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) + 7\frac{d}{dx}f(x) + 10f(x) & = & 0 \\
(\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} + 7\frac{d}{dx} + 10)f(x) & = & 0 \\
(D^2 + 7D + 10)f & = & 0 \\
(D^2 + (2+5)D + (2 \cdot 5))f & = & 0 \\
(D+2)(D+5)f & = & 0 \\
(D+2)(D+5)e^{-5x} & = & (D+2)(De^{-5x} + 5e^{-5x}) \\
 & = & (D+2)(-5e^{-5x} + 5e^{-5x}) \\
 & = & (D+2)0 \\
 & = & 0 \\
(D+5)(D+2)f & = & 0 \\
(D+5)(D+2)e^{-2x} & = & (D+5)(De^{-2x} + 2e^{-2x}) \\
 & = & (D+5)(-2e^{-2x} + 2e^{-2x}) \\
 & = & (D+5)0 \\
 & = & 0 \\
(D^2 + 7D + 10)(\gamma e^{-2x} + \delta e^{-5x}) & = & 0
\end{array}$$

(Continua...)

Questão 4 (cont.)

...e isto aqui é uma versão mais curta da demonstração da página anterior:

$$\begin{array}{rcl} f''(x)+7f'(x)+10f(x) & = & 0 \\ (D^2+7D+10)f & = & 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f & = & 0 \\ (D^2+7D+10)(\gamma e^{-2x}+\delta e^{-5x}) & = & 0 \end{array}$$

Aqui que você já tem uma certa prática com problemas de "encontre a substituição certa" você vai fazer um problema de "encontre a generalização certa". Vou explicar ele em português.

Você vai definir [EDOLP] – de "EDO linear, caso particular" – como sendo o bloco de quatro igualdades acima. Faça isso na notação certa, que é algo como "[EDOLP] = ?".

Depois disso você vai procurar a "generalização certa" da [EDOLP], e na "substituição certa" que transforma ela na [EDOLP]. O seu objetivo é chegar em algo da forma [EDOLG][S] = [EDOLP]; o nome "[EDOLG]" vem de "EDO linear, caso geral". É difícil chegar na [EDOLG] direto, então vou dar instruções pra você chegar lá por chutar-e-testar.

Chame as suas tentativas de [EDOLG1], [EDOLG2], etc, e as suas substituições de [S1], [S2], etc. O seu objetivo é chegar numa [EDOLG$_n$] que não tenha mais os números 2, 5, 7 e 10; eles devem ter sido substuídos ou por variáveis ou por expressões que dependem dessas variáveis.

O seu objetivo *final* é chegar num caso em que [S] seja só isto aqui:

$$[\mathrm{S}] = \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix}$$

E isto valha:

$$[\mathrm{EDOLG}] \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix} \text{“}=\text{”}[\mathrm{EDOLP}]$$

Eu pus o "=" entre aspas porque você vai não chegar a algo exatamente igual à [EDOLP], só em algo equivalente à EDOLP... como o que a gente fez nos exercícios de "justifique esse passo".

Quem for fazer a VS vai ver como nos últimos semestres a gente usou essa técnica pra aprender a demonstrar algumas fórmulas das tabelas de integração dos livros – a gente começava com um caso particular e "generalizava ele do jeito certo" depois.

Questão 1: gabarito

(Com vários chutes e testes)

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{TRIG}_1] & = & \left(\displaystyle\int s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\,ds = \int \mathrm{sen}(\theta)^4\sqrt{1-(\mathrm{sen}(\theta))^2}^{10}\cos(\theta)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(\mathrm{sen}(x))\cdot\cos(x)\,dx = \int_{u=\mathrm{sen}(a)}^{u=\mathrm{sen}(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} f'(\mathrm{sen}(\theta))\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} f'(s)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(x):=\sqrt{x}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} \sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} \sqrt{s}^{10}\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(x):=1-\sqrt{x}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} 1-\sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} 1-\sqrt{s}^{10}\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(s):=s^4\sqrt{1-s^2}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} \mathrm{sen}(\theta)^4\sqrt{1-\mathrm{sen}(\theta)^2}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\,ds\right)
\end{array}
$$

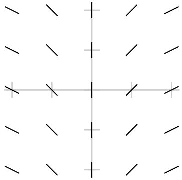
Questão 2: gabarito do item a

$$
[\text{EDOVSG}] = \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\displaystyle\int h(y)\,dy & = & \displaystyle\int g(x)\,dx \\
\parallel & & \parallel \\
H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\
H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\
& = & G(x)+C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\parallel & & \\
y & &
\end{array} \right)
$$

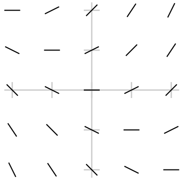
$$
[\text{EDOVSG}] \begin{bmatrix} g(x) := -2x \\ G(x) := -x^2 \\ h(x) := 2x \\ H(x) := x^2 \\ H^{-1}(x) := -\sqrt{x} \\ C_1 := 4 \\ C_2 := 29 \\ C_3 := 25 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{-2x}{2y} \\
2y\,dy & = & -2x\,dx \\
\displaystyle\int 2y\,dy & = & \displaystyle\int -2x\,dx \\
\parallel & & \parallel \\
y^2+4 & & -x^2+29 \\
y^2 & = & -x^2+29-4 \\
& = & -x^2+25 \\
-\sqrt{y^2} & = & -\sqrt{-x^2+25} \\
\parallel & & \\
y & &
\end{array} \right)
$$

Questão 3: gabarito

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$:



b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2}$:



Questão 4: gabarito

$$[\text{EDOLP}] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+7f'(x)+10f(x) &=& 0 \\ (D^2+7D+10)f &=& 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f &=& 0 \\ (D^2+7D+10)(\gamma e^{-2x}+\delta e^{-5x}) &=& 0 \end{array}\right)$$

$$[\text{EDOLG}_1] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+7f'(x)+10f(x) &=& 0 \\ (D^2+7D+10)f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+7D+10)(\gamma e^{-\alpha x}+\delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array}\right) \qquad [\text{S}_1] = \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix}$$

$$[\text{EDOLG}_2] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+jf'(x)+kf(x) &=& 0 \\ (D^2+jD+k)f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+jD+k)(\gamma e^{-\alpha x}+\delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array}\right) \qquad [\text{S}_2] = \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \\ j := 7 \\ k := 10 \end{bmatrix} \qquad [\text{S}_3] = \begin{bmatrix} j := (\alpha+\beta) \\ k := (\alpha\cdot\beta) \end{bmatrix}$$

$$[\text{EDOLG}_2][\text{S}_3] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+(\alpha+\beta)f'(x)+(\alpha\cdot\beta)f(x) &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))(\gamma e^{-\alpha x}+\delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array}\right) \qquad [\text{EDOLG}] = [\text{EDOLG}_2][\text{S}_3]$$

$$[\text{EDOLG}] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+(\alpha+\beta)f'(x)+(\alpha\cdot\beta)f(x) &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))(\gamma e^{-\alpha x}+\delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array}\right)$$

$$[\text{EDOLG}]\begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+(2+5)f'(x)+(2\cdot 5)f(x) &=& 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f &=& 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f &=& 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))(\gamma e^{-2x}+\delta e^{-5x}) &=& 0 \end{array}\right), \quad \text{que é “muito parecido” com o } [\text{EDOLP}]\ldots$$