Cálculo 2 - 2022.1

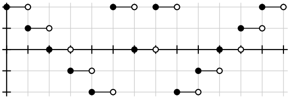
Prova de reposição (VR)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Questão 1

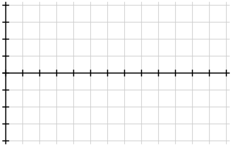
(Total: 1.0 pts)

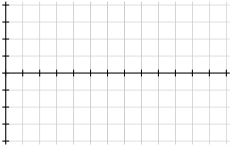
Sejam:

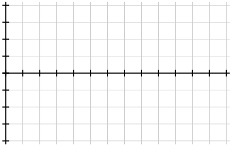
$f(x) \ =$ 

e $F(x) = \displaystyle\int_{t=6}^{t=x} f(x)\,dt.$

Faça o gráfico da $F(x)$.







Questão 1: gabarito

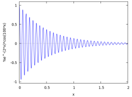
Questão 2

(Total: 6.0 pts)
Obs: esta questão é uma versão modificada de uma questão da P2.

EDOs *parecidas* com essa aqui

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \qquad (*)$$

vão ser incrivelmente importantes nos cursos de Física. Algumas delas descrevem "oscilações amortecidas", como esta figura:



A maioria dos livros "normais" de EDOs ensinam um modo de resolver a $(*)$ que eu acho muito árido. Nesta questão você vai ver um método pra resolver EDOs desse tipo que eu acho bem mais legal, e que eu aprendi num curso de Álgebra Linear. Nesse método a gente trata funções como vetores (de dimentão infinita) e a derivada como uma transformação linear (uma "matriz de dimensão infinita"). Quando eu precisar enfatizar que estou "em Álgebra Linear" eu vou escrever f e D ao invés de $f(x)$ e $\frac{d}{dx}$.

Isto aqui é uma demonstração quase completa do modo rápido de encontrar as "soluções básicas" e a "solução geral" da EDO $(*)$... ela é "quase completa" no sentido de que ela é o que as pessoas escrevem no quadro quando explicam esse método, mas sem a parte falada.

$$\begin{aligned}
f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) &= 0 \\
\tfrac{d}{dx}\tfrac{d}{dx}f(x) + 7\tfrac{d}{dx}f(x) + 10f(x) &= 0 \\
(\tfrac{d}{dx}\tfrac{d}{dx} + 7\tfrac{d}{dx} + 10)f(x) &= 0 \\
(D^2 + 7D + 10)f &= 0 \\
(D^2 + (2+5)D + (2\cdot 5))f &= 0 \\
(D+2)(D+5)f &= 0 \\
(D+2)(D+5)e^{-5x} &= (D+2)(De^{-5x} + 5e^{-5x}) \\
&= (D+2)(-5e^{-5x} + 5e^{-5x}) \\
&= (D+2)0 \\
&= 0 \\
(D+5)(D+2)f &= 0 \\
(D+5)(D+2)e^{-2x} &= (D+5)(De^{-2x} + 2e^{-2x}) \\
&= (D+5)(-2e^{-2x} + 2e^{-2x}) \\
&= (D+5)0 \\
&= 0 \\
(D^2 + 7D + 10)(\gamma e^{-2x} + \delta e^{-5x}) &= 0
\end{aligned}$$

(Continua...)

Questão 2 (cont.)

...e isto aqui é uma versão mais curta da demonstração da página anterior:

$$\begin{array}{rcl} f''(x)+7f'(x)+10f(x) & = & 0 \\ (D^2+7D+10)f & = & 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f & = & 0 \\ (D^2+7D+10)(\gamma e^{-2x}+\delta e^{-5x}) & = & 0 \end{array}$$

Aqui que você já tem uma certa prática com problemas de "encontre a substituição certa" você vai fazer um problema de "encontre a generalização certa". Vou explicar ele em português.

a) **(0.2 pts)** Você vai definir [EDOLP] – de "EDO linear, caso particular" – como sendo o bloco de quatro igualdades acima. Faça isso na notação certa, que é algo como "[EDOLP] = ?".

b) **(2.3 pts)** Depois disso você vai procurar a "generalização certa" da [EDOLP], e na "substituição certa" que transforma ela na [EDOLP]. O seu objetivo é chegar em algo da forma [EDOLG][S] = [EDOLP]; o nome "[EDOLG]" vem de "EDO linear, caso geral". É difícil chegar na [EDOLG] direto, então vou dar instruções pra você chegar lá por chutar-e-testar.

Chame as suas tentativas de [EDOLG1], [EDOLG2], etc, e as suas substituições de [S1], [S2], etc. O seu objetivo é chegar numa [EDOLG$_n$] que não tenha mais os números 2, 5, 7 e 10; eles devem ter sido substuídos ou por variáveis ou por expressões que dependem dessas variáveis.

O seu objetivo *final* neste item é chegar num caso em que [S] seja só isto aqui:

$$[\mathrm{S}] = \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix}$$

E isto valha:

$$[\mathrm{EDOLG}] \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix} \text{“}{=}\text{”}[\mathrm{EDOLP}]$$

Eu pus o "=" entre aspas porque você vai não chegar a algo exatamente igual à [EDOLP], só em algo equivalente à EDOLP... como o que a gente fez nos exercícios de "justifique esse passo".

Questão 2 (cont.)

c) **(1.0 pts)** Seja:

$$[S2] = \begin{bmatrix} \alpha := 3 \\ \beta := 4 \\ \gamma := 1 \\ \delta := 0 \end{bmatrix}$$

Calcule o resultado disto aqui:

$$[\text{EDOO}] = [\text{EDOLG}][\text{S2}] = ?$$

d) **(2.5 pts)** No item (c) você definiu o [EDOO] ("outra EDO") como uma sequência de quatro igualdades. Se você tiver feito tudo certo até aqui, e você interpretar as quatro igualdades da [EDOO] do jeito correto, você vai ver que elas dizem algo como:

A função $f(x) = e^{20x}$
é solução da EDO
$f''(x) + 42f'(x) + 99f(x) = 0$

...só que eu pus números errados de propósito. Descubra os números certos – a única dica que eu posso dar aqui é que o 20 do e^{20x} tem que virar ou 3, ou 4, ou -3, ou -4 – e verifique que essa $f(x)$ realmente é solução dessa EDO.

Questão 2: gabarito

Questão 3

(Total: 3.0 pts)

Calcule as seguintes integrais indefinidas e teste os seus resultados.

a) **(1.0 pts)**

$$\int 2x + \frac{4}{x^3} + \cos 4x \, dx$$

b) **(2.0 pts)**

$$\int (3x+4)^{20} \, dx$$

Dica pro item (b): se você souber o método de mudança de variável que os livros usam você consegue calcular ela bem rápido usando a mudança de variável $u = 3x + 4$. Dá pra calcular essa integral por chutar-e-testar, mas dá um pouquinho mais de trabalho.

Gabarito
(sem os testes)

a)

$$x^2 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x$$

b)

$$\frac{(3x+4)^{21}}{63}$$