Cálculo 2 - 2022.1

VS aberta (VSA)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Questão 1

(Total: 3.0 pts)
Esta questão é continuação das questões sobre EDOs de 2a ordem ("lineares, com coeficientes constantes, etc, etc...") que eu pus na P2 e na VR. Quando eu puser essa prova na página do curso eu vou colocar links pra essas questões.

Em todas as questões desta prova uma lacuna como _ quer dizer "aqui vai ter um número mas eu não posso dizer qual é – você vai ter que descobrir ele"... por exemplo, $e^{\_x}$ pode ser e^{42x}, e^{-200x}, ou outras coisas assim.

Sejam:

$$[\text{ECS}] = \left(\begin{array}{rcl}
e^{i\theta} & = & \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \\
\text{sen}\,-\theta & = & -\,\text{sen}\,\theta \\
\cos -\theta & = & -\cos\theta \\
e^{-i\theta} & = & \cos -\theta + i\,\text{sen}\,-\theta \\
 & = & \cos -\theta - i\,\text{sen}\,\theta \\
 & = & \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \\
e^{i\theta} + e^{-i\theta} & = & 2\cos\theta \\
e^{i\theta} - e^{-i\theta} & = & 2i\,\text{sen}\,\theta \\
\cos\theta & \overset{(9)}{=} & \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
\text{sen}\,\theta & \overset{(10)}{=} & \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
\cos k\theta & \overset{(11)}{=} & \frac{1}{2}(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) \\
\text{sen}\,k\theta & \overset{(12)}{=} & \frac{1}{2i}(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} + e^{(\alpha-\beta i)\theta} & = & e^{\alpha}(e^{\beta i\theta} + e^{-\beta i\theta}) \\
 & = & 2\,e^{\alpha}\cos\beta\theta \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} - e^{(\alpha-\beta i)\theta} & = & e^{\alpha}(e^{\beta i\theta} - e^{-\beta i\theta}) \\
 & = & 2i\,e^{\alpha}\cos\beta\theta
\end{array}\right)$$

$$[\text{EDOLG}] = \left(\begin{array}{rcl}
f''(x) + (\alpha+\beta)f'(x) + (\alpha\cdot\beta)f(x) & = & 0 \\
(D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))f & = & 0 \\
(D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))f & = & 0 \\
(D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))(\gamma e^{-\alpha x} + \delta e^{-\beta x}) & = & 0
\end{array}\right)$$

Eu vou usar notações como [ECS$_9$] e [ECS$_{13..14}$] pra me referir a linhas individuais e a sequências contíguas de linhas do [ECS].
Todas as linhas são fáceis de demonstrar a partir da [ECS$_1$], mas muita gente tinha dificuldade em passar das igualdades (9) e (10) pras (11) e (12), porque isso precisa de uma substituição como $[\theta := k\theta]$.
A [ECS$_1$] é complicada de demonstrar – nos semestres "normais" a gente via uma introdução a séries de Taylor pra se convencer de que a [ECS$_1$] é verdade, mas a gente não via uma demonstração formal da [ECS$_1$].

a) **(0.2 pts)** Calcule o resultado da substituição

$$[\text{EDOLG}]\begin{bmatrix}\alpha := -2+10i \\ \beta := -2-10i\end{bmatrix}$$

e chame-o de [E$_1$].

b) **(2.8 pts)** As idéias da [ECS] devem indicar que existe uma função da forma $g_1(x) = e^{\_x}\cos(\_x)$ que é solução da EDO da primeira linha da resposta do seu item (a). Chame esta EDO de $(*)$ e verifique se a sua função $g_1(x)$ é solução da EDO $(*)$. Se não for chute outra função – chame-a de $g_2(x)$ – e veja se ela é solução da EDO $(*)$. Se ainda não for faça outro chute-e-teste, e repita. Lembre de NUNCA de apagar um chute-e-teste que não resolveu o seu problema original.

Questão 1: gabarito

$$[\text{EDOLG}] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x) + (\alpha+\beta)f'(x) + (\alpha\cdot\beta)f(x) & = & 0 \\ (D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))f & = & 0 \\ (D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))f & = & 0 \\ (D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))(\gamma e^{-\alpha x} + \delta e^{-\beta x}) & = & 0 \end{array}\right)$$

$$[\text{E}_1] = [\text{EDOLG}] \begin{bmatrix} \alpha := (-2+10i) \\ \beta := (-2-10i) \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{rcl} f''(x) + ((-2+10i)+(-2-10i))f'(x) + ((-2+10i)\cdot(-2-10i))f(x) & = & 0 \\ (D^2 + ((-2+10i)+(-2-10i))D + ((-2+10i)\cdot(-2-10i)))f & = & 0 \\ (D^2 + ((-2+10i)+(-2-10i))D + ((-2+10i)\cdot(-2-10i)))f & = & 0 \\ (D^2 + ((-2+10i)+(-2-10i))D + ((-2+10i)\cdot(-2-10i)))(\gamma e^{-(-2+10i)x} + \delta e^{-(-2-10i)x}) & = & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{rcl} f''(x) + (-4)f'(x) + 104f(x) & = & 0 \\ (D^2 + (-4)D + 104)f & = & 0 \\ (D^2 + (-4)D + 104)f & = & 0 \\ (D^2 + (-4)D + 104)(\gamma e^{-(-2+10i)x} + \delta e^{-(-2-10i)x}) & = & 0 \end{array}\right)$$

A última linha acima diz que $e^{2x}e^{-10ix}$ e $e^{2x}e^{10ix}$
são soluções da EDO $f''(x) - 4f'(x) + 104f(x) = 0$. $\quad (*)$
Então $e^{2x}e^{-10ix} + e^{2x}e^{10ix} = e^{2x}(2\cos 10x)$
também deve ser solução dessa EDO, e $e^{2x}\cos 10x$ também.
Sejam $g(x) = e^{2x}\cos 10x$ e $h(x) = e^{2x}\,\text{sen}\,10x$. Daí:

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & 2g(x) - 10h(x) \\ h'(x) & = & 2h(x) + 10g(x) \\ g''(x) & = & -96g(x) - 40h(x) \\ h''(x) & = & -96h(x) + 40g(x) \\ g''(x) - 4g'(x) + 104g(x) & = & (-96g(x) - 40h(x)) - 4(2g(x) - 10h(x)) + 104g(x) \\ & = & 0 \\ h''(x) - 4h'(x) + 104h(x) & = & (-96h(x) + 40g(x)) - 4(2h(x) + 10g(x)) + 104h(x) \\ & = & 0 \end{array}$$

e portanto tanto $g(x)$ quanto $h(x)$ são soluções da EDO $(*)$.

Questão 2

(Total: 7.0 pts)
Alguns livros ensinam substituição trigonométrica começando direto por casos complicados em que o "termo malvado" da integral é este:

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$$

Seja:

$$[\mathrm{T}] = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2} & = & \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2}\beta^2x^2} \\ & = & \sqrt{\alpha^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2\right)} \\ & = & \sqrt{\alpha^2}\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2} \\ & = & \alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)^2} \end{pmatrix}$$

a) **(0.2 pts)** Calcule:

$$[\mathrm{T}]\begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 3 \end{bmatrix}$$

b) **(2.8 pts)** Digamos que a gente quer transformar esta integral

$$\int x^2\sqrt{4-9x^2}\,dx \qquad (**)$$

numa mais simples usando substituição trigonométrica. Use o truque do item (a), o [MV$_2$] e as idéias do gabarito da questão 1 da P2 pra transformar a $(**)$ em "algo em θ".

c) **(4.0 pts)** Digamos que $(***)$ é esta integral:

$$\int x^\gamma \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}^{\,\delta}\,dx \qquad (***)$$

Mostre que uma mudança de variável com $u = \frac{\beta}{\alpha}x$ transforma esta integral numa da forma:

$$\_\int u^{\_}\left(\sqrt{1-u^2}\right)^{\_}\,dx$$

Dica: comece com o caso particular em que $\gamma = 1$ e $\delta = 1$ e depois tente casos mais complicados.

Peçam dicas!!!

Questão 2: gabarito

a) [T] $\begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \sqrt{2^2 - 3^2x^2} & = & \sqrt{2^2 - \frac{2^2}{2^2}3^2x^2} \\ & = & \sqrt{2^2\left(1 - \frac{3^2}{2^2}x^2\right)} \\ & = & \sqrt{2^2}\sqrt{1 - \frac{3^2}{2^2}x^2} \\ & = & 2\sqrt{1 - \left(\frac{3}{2}x\right)^2} \end{array} \right)$

b)

$$\begin{array}{rcl} \int x^2\sqrt{4 - 9x^2}\,dx & = & \int x^2\sqrt{2^2 - 3^2x^2}\,dx \\ & = & \int x^2 \cdot 2\sqrt{1 - (\frac{3}{2}x)^2}\,dx \\ & = & \int (\frac{2}{3}u)^2 \cdot 2\sqrt{1 - u^2} \cdot \frac{2}{3}\,du \\ & = & \int (\frac{2}{3})^3 \cdot 2 \cdot u^2\sqrt{1 - u^2}\,du \\ & = & \frac{16}{27}\int u^2\sqrt{1 - u^2}\,du \\ & = & \frac{16}{27}\int (\operatorname{sen}\theta)^2\sqrt{1 - (\operatorname{sen}\theta)^2} \cdot \cos\theta\,d\theta \\ & = & \frac{16}{27}\int (\operatorname{sen}\theta)^2\sqrt{(\cos\theta)^2} \cdot \cos\theta\,d\theta \\ & = & \frac{16}{27}\int (\operatorname{sen}\theta)^2\cos\theta \cdot \cos\theta\,d\theta \\ & = & \frac{16}{27}\int (\operatorname{sen}\theta)^2(\cos\theta)^2\,d\theta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} u = \frac{3}{2}x \\ x = \frac{2}{3}u \\ du = \frac{3}{2}dx \\ dx = \frac{2}{3}du \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u = \operatorname{sen}\theta \\ \frac{du}{d\theta} = \cos\theta \\ du = \cos\theta\,d\theta \end{bmatrix}$$

Questão 2: gabarito (cont.)

c)

$$
\begin{aligned}
\int x^\gamma \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}^{\,\delta}\,dx &= \int x^\gamma \sqrt{\alpha^2(1-\tfrac{\beta^2}{\alpha^2}x^2)}^{\,\delta}\,dx \\
&= \int x^\gamma \left(\sqrt{\alpha^2(1-(\tfrac{\beta}{\alpha}x)^2)}\right)^\delta dx \\
&= \int x^\gamma \left(\alpha\sqrt{(1-(\tfrac{\beta}{\alpha}x)^2)}\right)^\delta dx \\
&= \alpha^\gamma \int x^\gamma \left(\sqrt{(1-(\tfrac{\beta}{\alpha}x)^2)}\right)^\delta dx \\
&= \alpha^\gamma \int (\tfrac{\alpha}{\beta}u)^\gamma \left(\sqrt{(1-u^2)}\right)^\delta \cdot \tfrac{\alpha}{\beta}\,du \\
&= \alpha^\gamma (\tfrac{\alpha}{\beta})^{\gamma+1} \int u^\gamma \sqrt{(1-u^2)}^{\,\delta}\,du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
u = \frac{\beta}{\alpha}x \\
x = \frac{\alpha}{\beta}u \\
du = \frac{\beta}{\alpha}dx \\
dx = \frac{\alpha}{\beta}du
\end{bmatrix}
$$

EM TODAS AS QUESTÕES DESTA PROVA UMA LACUNA COMO __ QUER DIZER "AQUI VAI TER UM NÚMERO MAS EU NÃO POSSO DIZER QUAL É - VOCÊ VAI TER QUE DESCOBRIR ELE"!

$\boxed{0.2 \text{ PTS}}$ QUESTÃO 1a:

CALCULE O RESULTADO DA SUBSTITUIÇÃO

$$[EDOLG]\begin{bmatrix} a := -2+10i \\ \beta := -2-10i \end{bmatrix}$$

E CHAME-O DE $[E_1]$.

$\boxed{2.8 \text{ PTS}}$ QUESTÃO 1B: AS IDÉIAS DA [ECS] DEVEM INDICAR QUE EXISTE UMA FUNÇÃO $g_1(x)$ DA FORMA $g_1(x) = e^{-x}\cos(-x)$ QUE É SOLUÇÃO DA EDO DA PRIMEIRA LINHA DA RESPOSTA DO SEU ITEM a.

CHAME ESTA EDO DE (☆), E VERIFIQUE SE A SUA FUNÇÃO $g(x)$ É SOLUÇÃO DA EDO (☆).

SE NÃO FOR CHUTE OUTRA FUNÇÃO - CHAME-A DE $g_2(x)$ - E VEJA SE ELA É SOLUÇÃO DA EDO (☆). SE AINDA NÃO FOR FAÇA OUTRO CHUTE E TESTE, E REPITA. LEMBRE DE <u>NUNCA</u> APAGAR UM CHUTE-E-TESTE QUE NÃO RESOLVEU O SEU PROBLEMA ORIGINAL.

QUESTÃO 2

(TOTAL: 7.0 PONTOS)

ALGUNS LIVROS ENSINAM SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA COMEÇANDO DIRETO POR CASOS COMPLICADOS EM QUE O "TERMO MALVADO" DA INTEGRAL É ESTE:

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}.$$

SEJA:

$$[T] = \left[\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2} &= \sqrt{\alpha^2 - \tfrac{\alpha^2}{\alpha^2}\beta^2x^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2\left(1-\tfrac{\beta^2}{\alpha^2}x^2\right)} \\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{1-\tfrac{\beta^2}{\alpha^2}x^2} \\ &= \alpha\sqrt{1-\left(\tfrac{\beta}{\alpha}x\right)^2} \end{aligned}\right]$$

2a) (0.2 PTS) CALCULE $[T]\begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 3 \end{bmatrix}$.

2b) (2.8 PTS) DIGAMOS QUE A GENTE QUER TRANSFORMAR ESTA INTEGRAL

$$\int x^2\sqrt{4-9x^2}\,dx \qquad (☆☆)$$

NUMA MAIS SIMPLES USANDO SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA. USE O TRUQUE DO ITEM 2a, O [MV2] E AS IDÉIAS DO GABARITO DA QUESTÃO 1 DA P2 PRA TRANSFORMAR A (☆☆) EM "ALGO EM θ".

2c) (4.0 PTS) DIGAMOS QUE (☆☆☆) É ESTA INTEGRAL:

$$\int x^{\gamma}\sqrt{\alpha-\beta^2x^2}^{\,\delta}\,dx \qquad (☆☆☆).$$

MOSTRE COMO UMA MUDANÇA DE VARIÁVEL COM $u = \frac{\beta}{\alpha}x$ TRANSFORMA ESTA INTEGRAL NUMA DA FORMA

$$\_\_ \int u^{\_\_}\sqrt{1-u^2}^{\,\_\_}\,du.$$

DICA: COMECE COM O CASO PARTICULAR EM QUE $\gamma = 1$ E $\delta = 1$ E DEPOIS TENTE CASOS MAIS COMPLICADOS.

<u>PEÇAM DICAS!</u>

DICAS:

(↑ Vou digitar isso aqui depois!)

Gabarito da questão 1 da P2

(Com vários chutes e testes – pra questão 2)

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{TRIG}_1] & = & \left(\displaystyle\int s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\,ds = \int \mathrm{sen}(\theta)^4\sqrt{1-(\mathrm{sen}(\theta))^2}^{10}\cos(\theta)\,d\theta\right) \\
[\mathrm{MV}_2] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(\mathrm{sen}(x))\cdot\cos(x)\,dx = \int_{u=\mathrm{sen}(a)}^{u=\mathrm{sen}(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} f'(\mathrm{sen}(\theta))\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} f'(s)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(x):=\sqrt{x}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} \sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} \sqrt{s}^{10}\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(x):=1-\sqrt{x}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} 1-\sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} 1-\sqrt{s}^{10}\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(s):=s^4\sqrt{1-s^2}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} \mathrm{sen}(\theta)^4\sqrt{1-\mathrm{sen}(\theta)^2}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\,ds\right)
\end{array}
$$