Cálculo 2 - 2022.1

Aula 29: algumas técnicas de integração

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Aviso: estou reorganizando este PDF e
reescrevendo muita coisa do semestre passado!
Ele ainda está uma bagunça!

Primitivas
Domínio de continuidade
Integral indefinida
(o = não é transitivo)
No mini-teste 3 - link:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT3.pdf#page=4
vocês viram que quando a função G "é uma integral da f"
nós podemos fazer contas como esta aqui:

$$\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx \quad = \quad G(5) - G(2)$$

Isto é um caso particular do TFC2,
que tem várias versões diferentes...
a fórmula dele é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$$

Historinha (pros meus amigos lógicos)

Nas últimas aulas nós vimos um pouquinho sobre: 1) como fazer só as "contas" de uma demonstração, deixando pra completar as "hipóteses" depois, e 2) como fazer demonstrações em que cada passo seja "fácil de justificar"...
Isso tem a ver com um dos meus assuntos de pesquisa e com uma tentativa de lidar com uma coisa que toda vez que acontece me deixa com muito ódio durante anos. Vou tentar explicar.

Hoje em dia existe uma noção *que todo mundo aceita* (!!!) do que é uma demonstração "completa": é uma demonstração *formalizada num proof assistant*. Esse artigo aqui explica isso bem:
`https://arxiv.org/pdf/2112.11598.pdf`

Eu aprendi um pouquinho de dois proof assistants importantes: o Lean, que o artigo acima descreve, e o Agda. "Um pouquinho" quer dizer que eu segui metade de cada um desses tutoriais daqui:
`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural_number_game/`
`https://plfa.github.io/`

Eu conheco a base teórica por trás dos proof assistants — "Dependent Type Theory" — razoavelmente bem, mas os proof assistants em si eu conheço mal.

Praticamente todas as operações, regras e táticas que aparecem nos dois tutoriais acima são consequência do '[:=]*'.*

Os módulos do mathlib do Lean pra demonstrações de contas com derivadas são bem difíceis de entender:
`https://leanprover-community.github.io/mathlib_docs/analysis/calculus/deriv.html`
e os módulos pra contas com integrais são mais difíceis ainda. Eu acho que isso é porque eles exigem que o usuário faça as "contas" com todas as "hipóteses" especificadas corretamente...

O meu assunto principal de pesquisa é como formalizar demonstrações — por enquanto só numa área chamada Teoria de Categorias, que não tem quase nada a ver com Cálculo — em duas etapas, como se a gente fizesse as "contas" primeiro e só acrescentasse as "hipóteses" depois. Tem dois artigos meus que explicam isso de jeitos bastante legíveis:
`http://angg.twu.net/math-b.html#2022-md`
`http://angg.twu.net/math-b.html#idarct`

Acho — sendo otimista, óbvio — que daqui a uns anos eu vou conseguir adaptar essas idéias pra formalizar a matéria de Cálculo 2 em Lean. E quando eu conseguir fazer isso eu vou conseguir lidar bem melhor com uma das coisas que me dá mais ódio no meu trabalho como professor, que são aqueles alunos que escrevem os maiores absurdos numa prova e depois ficam insistindo AOS BERROS que tá tudo certo na prova deles e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles... aí eu vou poder responder "*se a sua resposta tá certa traz ela formalizada em Lean*".

A operação "diferença"

Defs:

$$\begin{array}{rcl} f(x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & f(b) - f(a) \\ \mathsf{expr}\big|_{x=a}^{x=b} & = & (\mathsf{expr})[x := b] - (\mathsf{expr})[x := a] \\ [\text{DefDif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right) \end{array}$$

Os livros costumam usar a primeira definição acima.

Exercício 1.

Expanda e simplifique o máximo possível:

a) $x^2\big|_{x=4}^{x=5}$

b) $x^2\big|_{x=5}^{x=4}$

c) $2\big|_{x=4}^{x=5}$

d) $t^2\big|_{t=4}^{t=5}$

e) $x^2\big|_{t=4}^{t=5}$

f) $(x^3 - x^2)\big|_{x=2}^{x=10}$

g) $x^3\big|_{x=2}^{x=10} - x^2\big|_{x=2}^{x=10}$

h) $x^3 - (x^2\big|_{x=2}^{x=10})$

Exercício 2.
Lembre que:

$$[\text{TFC2}] \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

a) Calcule o resultado desta substituição:

$$[\text{TFC2}] \begin{bmatrix} F(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ F'(x) := 4x - x^2 \\ a := 0 \\ b := 4 \end{bmatrix} = {\color{red}?}$$

b) Use o resultado do item (a) pra calcular $\int_{x=0}^{x=4} 4 - (x-2)^2\,dx$. Dica: o resultado final vai ser $32/3$.

Vamos chamar o método do slide anterior de "integração por TFC2 e chutar-e-testar"...
Obs: no exercício eu chutei a $F(x)$ certa.

Exercício 3.
Integre por TFC2 e chutar-e-testar:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos x \, dx = ?$

b) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$

c) $\displaystyle\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$

d) $\displaystyle\int_{x=5}^{x=6} \operatorname{sen}(2x+3) \, dx = ?$

Fórmulas pra mudança de variáveis (2022.1)

$$[\mathrm{MV}_1] \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(g(b)) - f(g(a)) \\ &=& f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MV}_2] \;=\; \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\mathrm{MV}_3] \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} &=& \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel && \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} &=& \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right) \qquad [\mathrm{MV}_4] \;=\; \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MVI}_3] \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \\ \multicolumn{3}{l}{\text{Obs: } u = g(x)} \end{array} \right) \qquad [\mathrm{MVI}_4] \;=\; \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array} \right)$$

Uma demonstração do [MV$_1$]

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{DefDif}] & = & \left(F(x)|_{x=a}^{x=b} \;=\; F(b)-F(a) \right) \\
[\text{TFC2}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)|_{x=a}^{x=b} \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{DefDif}] \left[\, {\scriptstyle F(x):=f(g(x))} \,\right] & = & \left(f(g(x))|_{x=a}^{x=b} \;=\; f(g(b))-f(g(a)) \right) \\
[\text{DefDif}] \left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ F(u):=f(u) \\ a:=g(a) \\ b:=g(b) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \;=\; f(g(b))-f(g(a)) \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{TFC2}] \left[\begin{smallmatrix} F(x):=f(g(x)) \\ F'(x):=f'(g(x))g'(x) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x))|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{TFC2}] \left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ b:=g(b) \\ a:=g(a) \\ F(u):=f(u) \\ F'(u):=f'(u) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(\displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \;=\; f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))|_{x=a}^{x=b} \\
& = & f(g(b))-f(g(a)) \\
& = & f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
& = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{array}
$$

Um exemplo de mudança de variável

$$[\text{EMV1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{EMV2}] \quad = \quad [\text{EMV1}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(2x)\cdot 2\,dx & = & f(2x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(2b) - f(2a) \\ & = & f(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{EMV3}] \quad = \quad [\text{EMV2}] \begin{bmatrix} f(x) := -\cos x \\ f'(x) := \operatorname{sen} x \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\,dx & = & (-\cos(2x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (-\cos(2b)) - (-\cos(2a)) \\ & = & (-\cos(u))\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen}(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{EMV4}] \quad = \quad \left(\int_{u=2a}^{u=2b} \operatorname{sen}(u)\,du \quad = \quad \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(2x)\cdot 2\ dx \right)$$

$$[\text{EMV5}] \quad = \quad \left(\int_{u=a}^{u=b} \operatorname{sen}(u)\,du \quad = \quad \int_{x=a/2}^{x=b/2} 2\operatorname{sen}(2x)\,dx \right)$$

Outro exemplo de mudança de variável

Aqui a gente não substitui a f, só a f'...
Digamos que $f(x) = \int_{t=c}^{t=x} \tan t \, dt$,
e portanto $f'(x) = \tan x$.

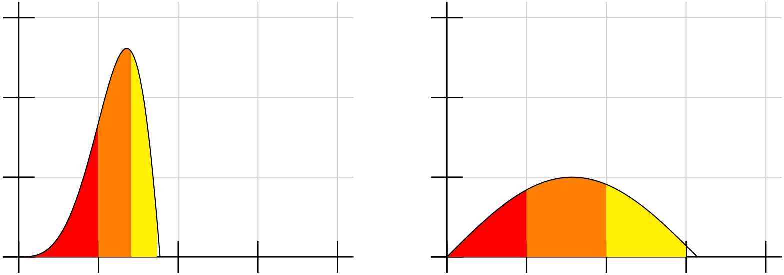
$$[\mathrm{OEMV3}] \quad = \quad [\mathrm{EMV2}]\left[f'(x) := \tan x\right] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x) \cdot 2\, dx & = & (f(2x))|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (f(2b)) - (f(2a)) \\ & = & (f(u))|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\, du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{OEMV4}] \quad = \quad \left(\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\, du \quad = \quad \int_{x=a}^{x=b} \tan(2x) \cdot 2 \ dx \right)$$

$$[\mathrm{OEMV5}] \quad = \quad \left(\int_{u=a}^{u=b} \tan(u)\, du \quad = \quad \int_{x=a/2}^{x=b/2} 2\tan(2x)\, dx \right)$$

Uma figura pra mudança de variável

$$
\begin{aligned}
x^2 &= u \\
\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\,dx &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du
\end{aligned}
$$



Links

Aqui tem links pra como alguns livros apresentam
o método da mudança de variáveis...

http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf
http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf
http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_5.5_e_5.6.pdf
http://angg.twu.net/2022.1-C2/ross__elementary_analysis_secs_10_32_33_34.pdf#page=42

De todos esses o único que eu acho realmente honesto é o Ross.

Em todos os outros a variável nova é tratada à vezes como
uma variável independente, às vezes como uma variável
dependente, e às vezes como uma abreviação...
Eu levei mais de 10 anos pra entender como essa gambiarra
funcionava. Vocês vão ver um pouco sobre o meu modo
atual de entender ela em Cálculo 3, nesta parte do curso:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf#page=9

Um exemplo com contas

Isto aqui é um exemplo de como contas com integração por substituição costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
&= \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&= \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
&= \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x + 4$.

Dê uma olhada nos exemplos do livro do Miranda:
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=190`

Um exemplo com contas (cont.)

Compare:

$$\left(\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx \\ = & \displaystyle\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\ = & \displaystyle\frac{2}{3}\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u\,du \\ = & \displaystyle\frac{2}{3}\left((\operatorname{sen} u)\big|_{u=3a+4}^{u=3b+4} \right) \\ = & \displaystyle\frac{2}{3}\left((\operatorname{sen}(3x+4))\big|_{x=a}^{x=b} \right) \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{rl} & \displaystyle\int 2\cos(3x+4)\,dx \\ = & \displaystyle\int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\ = & \displaystyle\frac{2}{3}\int \cos u\,du \\ = & \displaystyle\frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\ = & \displaystyle\frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4) \end{array} \right)$$

Nós vamos tratar a versão da direita como uma abreviação da versão da esquerda — pra ir da esquerda pra direita a gente apaga os limites de integração, o que é bem fácil... pra ir da direita pra esquerda a gente precisa reconstruir os limites de integração, o que é mais difícil.

Outro exemplo com contas

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
= &\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
= &\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
= &\int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
= &\int s^5 - s^7 \, ds \\
= &\frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
= &\frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{array} \right]$$

Substituição na integral definida

Eu vou chamar a demonstração abaixo de [S2].
Ela é uma série de três igualdades: o '=' de cima, o '=' de baixo, e o '=' da esquerda (que é um '$\parallel$').
Eu vou chamar o "$F'(u) = f(u)$" de a hipótese do [S2].
Obs: nós ainda não acreditamos nessa demonstração...
vamos verificar as igualdades dela daqui a alguns slides.

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

Lembre que dá pra substituir só alguns símbolos...
Por exemplo:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][g(x) := 2x] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Também podemos substituir o f por F'...
E aí a hipótese passa a ser "trivialmente verdadeira":

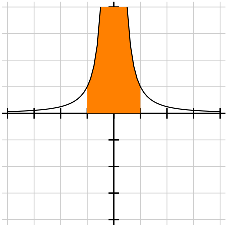
$$[\mathsf{S2}] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][f(u) := F'(u)] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = F'(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} F'(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

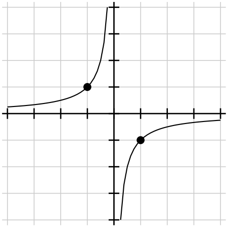
Um caso em que o TFC2 dá um resultado errado

Se $F(x) = -x^{-1}$
então $F'(x) = x^{-2}$, e:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=-1}^{x=1} F'(x)\,dx & = & F(x)\big|_{x=-1}^{x=1} \\
\int_{x=-1}^{x=1} x^{-2}\,dx & = & (-x^{-1})\big|_{x=-1}^{x=1} \\
& = & (-1^{-1}) - (-(-1)^{-1}) \\
& = & -2
\end{array}$$



$=$



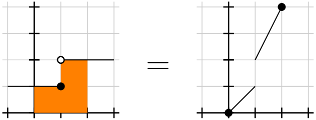
$=($

Outro caso em que o TFC2 dá um resultado errado

Isso aqui foi uma questão de prova que metade da turma errou... =(Links:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=3
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=8
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=50

$$\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\Big|_{x=0}^{x=2}$$



$$3 \quad = \quad 4 - 0$$

Neste semestre eu vou tentar
explicar o TFC2 e as consequências dele —
tipo: TODAS as técnicas de integração são
consequência do TFC2 — com uma abordagem
diferente da do semestre passado.

Dê uma olhada nestes slides do semestre passado:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-os-dois-TFCs.pdf
Leia as páginas 2 até 4 dele,
a definição no fim da página 7,
e as páginas 10 até 12.

Exercício 1.
Faça os exercícios 1, 2 e 3 do PDF acima —
mas ao invés de fazer o 2 como eu pedi no semestre
passado faça esta versão modificada dele:

$$[\text{TFC2}]\begin{pmatrix} F(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ F'(x) := 4x - x^2 \\ b := 4 \\ a := 0 \end{pmatrix} \quad = \quad ?$$

Exercício 2.
Assista este vídeo,
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-C2-int-subst.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=YbVfNi-xGNw
e depois tente entender cada uma
das igualdades do slide 7.

Dica: os '='s do slide 7 têm montes
de significados diferentes dependendo
do contexto. Tente fazer uma lista de
significados e pronúncias.

Obs: os próximos 3 slides não são
autocontidos – você vai precisar
assistir o vídeo pra entendê-los.

A fórmula da derivada da função inversa

$$[\text{DFI1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) &=& x \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) &=& \frac{d}{dx} x \quad = \quad 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) &=& f'(g(x)) g'(x) \\ f'(g(x)) g'(x) &=& 1 \\ g'(x) &=& \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

$$[\text{DFI2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) &=& x \\ g'(x) &=& \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Exercício 3.

a) $[\text{DFI1}] \begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \end{bmatrix} =' $

Exercício 3 (cont.)

b) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := y^2 \\ f'(y) := 2y \\ g(x) := \text{sqrt}(x) \\ g'(x) := \text{sqrt}'(x) \end{bmatrix} =' $

c) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := \operatorname{sen} y \\ f'(y) := \cos y \\ g(x) := \operatorname{arcsen}(x) \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}'(x) \end{bmatrix} =' $

d) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} x := s \\ f(\theta) := \operatorname{sen} \theta \\ f'(\theta) := \cos \theta \\ g(s) := \operatorname{arcsen}(s) \\ g'(s) := \operatorname{arcsen}'(s) \end{bmatrix} =' $

e) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} x := c \\ f(\theta) := \cos \theta \\ f'(\theta) := -\operatorname{sen} \theta \\ g(c) := \cos^{-1}(c) \\ g'(c) := (\cos^{-1})'(c) \end{bmatrix} =' $

Mais algumas fórmulas que não valem sempre

$$
\begin{array}{rcl}
(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 & = & 1 \\[1em]
(\operatorname{sen} x)^2 & = & 1 - (\cos x)^2 \\
\sqrt{(\operatorname{sen} x)^2} & = & \sqrt{1 - (\cos x)^2} \\
\operatorname{sen} x & = & \sqrt{1 - (\cos x)^2} \\
(\cos x)^2 & = & 1 - (\operatorname{sen} x)^2 \\[1em]
\sqrt{(\cos x)^2} & = & \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2} \\
\cos x & = & \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}
\end{array}
$$

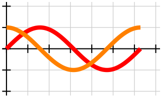
Exercício 4.

a) Escolha um número entre 42 e 99.
(Se você não conseguir converse com seus colegas!!!)

b) Escolha um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} \alpha < 0$
e verifique se $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2}$.
Dica: escolha um α para o qual você sabe $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$.

c) Escolha um $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos \beta < 0$
e verifique se $\cos \beta = \sqrt{1 - (\cos \beta)^2}$.

d) Faça uma cópia do gráfico abaixo num papel



e desenhe sobre ela os conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{\, \theta \in [0, 2\pi] \mid \operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - (\cos \theta)^2} \,\}, \\ B &= \{\, \theta \in [0, 2\pi] \mid \cos \theta = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} \theta)^2} \,\}. \end{aligned}$$

Juntando fórmulas estranhas

$$\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \\
e^{\ln x} & = & x \\
\ln' x & = & \frac{1}{e^{\ln x}} \\
 & = & \frac{1}{x} \\
\int_{x=a}^{x=b} \ln' x \, dx & = & \ln x \big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x} \, dx & = & \ln x \big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}$$

Juntando fórmulas estranhas

$$
\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \\
\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) & = & x \\
\operatorname{arcsen}' x & = & \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} \\
 & = & \frac{1}{\sqrt{(\cos(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
 & = & \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
 & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{arcsen}' x \, dx & = & \operatorname{arcsen} x \big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & = & \operatorname{arcsen} x \big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}
$$

Exercício 1.
Lembre que:

$$[\mathsf{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx} F(x)\, dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Calcule os resultados destas expansões:
a) $[\mathsf{TFC2}]\left[F(x) := F(g(x))\right]$
b) $[\mathsf{TFC2}]\left[x := u\right]\begin{bmatrix} a := g(a) \\ b := g(b) \end{bmatrix}$

...e verifique que se $f(u) = F'(u)$ então:
c) o que você obteve no (a) prova o '$=$' de cima da $[\mathsf{S2}]$,
d) o que você obteve no (b) prova o '$=$' de baixo da $[\mathsf{S2}]$,

O '$\|$' à esquerda na [$\mathsf{S2}$]
é bem fácil de verificar... ó:

$$\begin{array}{rcl} F(g(x))|_{x=a}^{x=b} & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \end{array}$$

Se você conseguiu fazer todos os itens
do exercício 1 e conseguiu entender isso aí
então agora você entende o [$\mathsf{S2}$] como uma
demonstração — você entende todas as
igualdades dele.

Pra que serve a hipótese do [S2]?
Ela serve pra gente lidar com 'f's que a gente não sabe integrar! Por exemplo:

$$[\mathsf{S2}] = \left(\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x))|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}] \begin{bmatrix} f(x) := \tan x \\ g(u) := 2u \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = \tan u \text{ então:}} \\ F(2x)|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x)\cdot 2\,dx \\ \| & & \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\,du \end{array} \right)$$

Uma versão do [S2] para integrais indefinidas

Compare... e repare no "Obs: $u = g(x)$".

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

Versões sem a parte da esquerda

Compare:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

Versões sem a parte da esquerda (2)

...e compare:

$$[\mathsf{S2I}] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3I}] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

As pessoas costumam usar variações da [S3I], geralmente sem darem um nome pra função $g(u)$... Lembre que em vários exercícios que nós já fizemos ficava implícito que vocês tinhan que descobrir qual era a substituição certa... por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
x^2\big|_{x=4}^{x=5} & = & ? \\
\left(f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ a := ? \\ b := ? \end{bmatrix} & = & ? \\
\left(f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2 \\ a := 4 \\ b := 5 \end{bmatrix} & = & \left(x^2\big|_{x=4}^{x=5} = 5^2 - 4^2 \right) \\
x^2\big|_{x=4}^{x=5} & = & 5^2 - 4^2
\end{array}$$

Exercício 2.
Nos livros e nas notas de aula que você vai encontrar por aí o "Obs: $u = g(x)$" da nossa [S3I] quase sempre aparece escrito de (ZILHÕES DE!!!) outros jeitos, então o melhor que a gente pode fazer é tentar encontrar as substituições que transformam a nossa [S3I] em algo "mais ou menos equivalente" às igualdades complicadas que eu mostrei no vídeo e que eu disse que a gente iria tentar decifrar...

Nos itens a e b deste exercício você vai tentar encontrar as substituições — que eu vou escrever como '[?]' — que transformam a [S3I] em algo "mais ou menos equivalente" às igualdades da direita.

Exercício 2 (cont.)
Encontre as substituições '[?]'s que façam com que:

a) $\left(\begin{array}{c}\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x).\end{array}\right)$ [?] vire algo como $\left(\begin{array}{c}\displaystyle\int 2\cos(3x+4)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du\end{array}\right)$

b) [S3I] [?] vire algo como $\left(\begin{array}{c}\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5(1-\operatorname{sen} x^2)(\cos x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int s^5(1-s^2)\,ds\end{array}\right)$

Gambiarras

Em geral é mais prático a gente usar umas gambiarras como "$\frac{du}{dx}dx = du$" ao invés do método "mais honesto" que a gente usou no exercício 2...

Às vezes essas gambiarras vão usar uma versão disfarçada do teorema da derivada da função inversa: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$, e umas outras manipulações esquisitas de 'dx's e 'du's que só aparecem explicadas direito nos capítulos sobre "diferenciais" dos livros de Cálculo.

Nós vamos começar usando elas como gambiarras mesmo, e acho que nesse semestre não vai dar pra ver como traduzir cada uma delas pra algo formal...

Gambiarras (2)
Quando a gente está começando e ainda não tem prática este modo de por anotações embaixo de chaves ajuda muito:

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5 (1 - s^2) \, ds$$

Quando a gente já tem mais prática acaba sendo melhor pôr todas as anotações dentro de caixinhas — por exemplo:

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x \, dx = ds \end{array} \right]$$

Gambiarras (3)
Essas caixinhas, como

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x\, dx = ds \end{array}\right]$$

vão ser os únicos lugares em que nós vamos permitir esses 'dx's e 'ds' "soltos", que não estão nem em derivadas e nem associados a um sinal '$\int$'...

E esses 'dx's e 'ds' "soltos" só vão aparecer em linhas que dizem como traduzir uma expressão que termina em 'dx' numa integral em x pra uma expressão que termina em 'ds' numa integral na variável s.

Nós vamos evitar usar s como uma abreviação para $\operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações

Tudo numa caixinha de anotações é consequência da primeira linha dela, que é a que define a variável nova. Por exemplo, se definimos a variável nova como $c = \cos x$ então $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$, e podemos reescrever isso na "versão gambiarra" como: $dc = -\operatorname{sen} x \, dx$, e também como $\operatorname{sen} x \, dx = (-1) dc$.

A caixinha vai ser:

$$\left[\begin{array}{c} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \\ dc = -\operatorname{sen} x \, dx \\ \operatorname{sen} x \, dx = (-1) \, dc \end{array}\right]$$

Mais sobre as caixinhas de anotações (2)
Muito importante: cada linha das caixinhas é uma série de igualdades — por exemplo $\mathsf{expr}_1 = \mathsf{expr}_2 = \mathsf{expr}_3$ — e cada uma dessas expressões $\mathsf{expr}_1, \ldots, \mathsf{expr}_n$ só pode mencionar ou a variável antiga ou a variável nova...

Então:

Bom: $dc = -\operatorname{sen} x \, dx$
Mau: $\frac{1}{-\operatorname{sen} x} dc = dx$
Bom: $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x$

Truque: em $\frac{dc}{dx}$ o c faz o papel de uma abreviação para $\cos x$, não de uma variável.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)

Quando a gente faz algo como

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\, dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5 (1 - s^2)\, ds$$

Cada chave é como uma igualdade da caixa de anotações "escrita na vertical"... por exemplo, "$\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s}$" é $s = \operatorname{sen} x$.

As outras chaves correspondem a outras igualdades da caixa de anotações — que têm que ser consequências desse $s = \operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)

Isto aqui está errado:

$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\, dx}_{ds} \quad = \quad \int ({\color{red}\operatorname{sen} x})^5 (1 - s^2)\, ds$$

À esquerda do '=' a gente tem uma integral na qual só aparece a "variável antiga", que é x, e à direita do '=' a gente tem uma integral na qual aparecem tanto a variável antiga, x, quanto a nova, que é s... =(

Lembre que tanto o truque das caixinhas quanto o truque das chaves servem pra gente conseguir aplicar a [S3I] de um jeito mais fácil, e no [S3I] uma integral usa só a variável antiga e a outra usa só a nova.

Exercício 3.
Leia o início da seção 6.1 do APEX Calculus
e faça os exercíos 25 até 32 da página 280 dele. Link:
http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf

Exercício 4.
Leia o início da seção 6.1 do Martins/Martins
e refaça os exercícios resolvidos 1 a 6 dele
usando ou as nossas anotações sob chaves ou
as nossas anotações em caixinhas. Link:
http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf

Exercício 5.

A questão 2 da P1 do semestre passado dizia que:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável (ou: "por uma sequência de integrações por substituição") pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

E ela pedia pra vocês verificarem isso num caso específico.
Tente fazer essa questão olhando poucas vezes pro gabarito dela.
Link:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][f(u) := F'(u)] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(w) = \cos(2+w) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(\sqrt{v}) & = & \displaystyle\int \cos(2+\sqrt{v}) \cdot (2\sqrt{v})^{-1}\,dv \\ \parallel & & \\ F(w) & = & \displaystyle\int \cos(2+w)\,dw \end{array} \\ \text{Obs: } w = \sqrt{v}. \end{array} \right)$$

Introdução

No último PDF e na P1 a gente viu como fazer "integração por substituição" de um jeito mais ou menos fácil de formalizar... agora a gente vai ver o método que os livros usam, que nos permite fazer as contas bem rápido, mas que usa várias gambiarras, algumas delas bem difíceis de formalizar.

Os nomes "integração por substituição" e "integração por mudança de variável" costumam ser equivalentes. Vou me referir ao método que a gente vai ver agora como "mudança de variável", "mudança de variável por gambiarras", "MV", ou "MVG", pra gente poder usar o termo "substituição" pro '[:=]'.

Introdução (2)

Cada livro usa convenções um pouco diferentes pra como escrever as contas por MVG. Eu vou usar a convenção do exemplo do próximo slide, em que a resolução da integral fica à esquerda e as caixinhas indicando os truques que usamos em cada MV ficam à direita, separadas da contas da integral.

A primeira caixinha tem os truques pra mudar
da variável x pra variável u e pra voltar de u pra x.

A segunda caixinha tem os truques pra mudar
da variável u pra variável v e pra voltar de v pra u.

A terceira caixinha tem os truques pra mudar
da variável v pra variável w e pra voltar de w pra v.

A quarta caixinha tem os truques pra mudar
da variável w pra variável y e pra voltar de y pra w.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{u+4}\right)}{2\sqrt{u+4}}\,du \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}\,dv \\
&= \int \cos\left(2+w\right)dw \\
&= \int \cos y\,dy \\
&= \operatorname{sen} y \\
&= \operatorname{sen}\left(2+w\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{v}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{u+4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} u=3x \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3\,dx \\ dx=\frac{1}{3}\,du \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} v=u+4 \\ du=dv \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} w=\sqrt{v} \\ \frac{dw}{dv}=\frac{1}{2}v^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} y=2+w \\ dy=dw \end{bmatrix}
$$

Limites de integração

A coluna da esquerda tem uma série de integrais sem limites de integração — a gente está trabalhando numa notação abreviada em que os limites de integração foram apagados. Eles podem ser recolocados de novo no final, quando a gente for transformar essas contas abreviadas numa versão “desabreviada” delas.

Os limites de integração em x são diferentes
dos limites de integração em u, que são diferentes
dos limites de integração em v, que são diferentes
dos limites de integração em w, que são diferentes
dos limites de integração em y.

Detalhes em breve!

A coluna da esquerda tem uma série de igualdades. Ela é da forma $\langle \mathsf{expr}_1 \rangle = \langle \mathsf{expr}_2 \rangle = \ldots = \langle \mathsf{expr}_n \rangle$, mas a gente escreve essa série de igualdades na vertical.

Repare que na coluna da esquerda
"as variáveis não se misturam":
$\langle \mathsf{expr}_1 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_{10} \rangle$ são "expressões em x",
$\langle \mathsf{expr}_2 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_9 \rangle$ são "expressões em u",
$\langle \mathsf{expr}_3 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_8 \rangle$ são "expressões em v",
$\langle \mathsf{expr}_4 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_7 \rangle$ são "expressões em w",
$\langle \mathsf{expr}_5 \rangle$ e $\langle \mathsf{expr}_6 \rangle$ são "expressões em y".

A regra mais importante de todas

Na coluna da esquerda cada expressão é
uma expressão “em uma variável só”.
Se você escrever algo como

$$\int \cos(2+w)\,dy$$

Isso é um ERRO CONCEITUAL GRAVÍSSIMO
e a sua questão é ZERADA.

A gente não vai ter tempo de ver o porquê disso...
O motivo é que com essa proibição o método pra
“desabreviar” as contas fica simples —
sem essa proibição ele fica BEM mais complicado,
e a gente precisaria de uns truques de “notação
de físicos”, que é um assunto bem difícil de
Cálculo 3, pra definir o método de desabreviação.

As caixinhas de truques

As caixinhas de truques da MVG têm uma sintaxe
BEM diferente das caixinhas do '[:=]'.
Pra enfatizar isso a gente usa '='s dentro delas,
não ':='s, e a gente escreve elas separadas
do resto, à direita.

Dê uma olhada nas 9 primeiras páginas daqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf`

Dentro cada caixinha de truques da MVG a gente
vai usar algumas expressões que só podem ser
formalizadas direito usando a "notação de físicos",
que a gente vai ver com detalhes em C3...
Vou mostrar como "ler em voz alta" uma caixinha
e a gente vai tentar usar elas meio de improviso.

Lendo uma caixinha de truques em voz alta

$$\begin{bmatrix} u = 3x \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

Digamos que u e x são variáveis dependentes, que obedecem a equação $u = 3x$. Então podemos tratar u como uma função de x, e temos $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(u(x)) = \frac{d}{dx}(3x) = \frac{d}{dx}(u(x)) = 3$. Multiplicando os dois lados de $\frac{du}{dx} = 3$ por dx obtemos $du = 3\,dx$; e multiplicando os dois lados de $du = 3\,dx$ por $\frac{1}{3}$ obtemos $dx = \frac{1}{3}$.

Na caixinha

$$\left[\begin{array}{c} u = 3x \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{array}\right]$$

as duas últimas linhas são igualdades entre expressões incompletas. Você viu na P1 como substituir expressões incompletas, como parênteses, bananas e lentes...

Em expressões das formas '$\int \ldots\, dx$' e '$\int \ldots\, du$' o 'dx' e o 'du' fazem papel de "fecha parênteses", e as igualdades $du = 3\,dx$ e $dx = \frac{1}{3}du$ indicam substituições que você vai poder fazer nas integrais do lado esquerda que vão ser parecidas com as da questão 2 da P1.

Exercício 1.
Reescreva os exemplos 1 a 4 da seção 6.2 do livro do Daniel Miranda na notação que eu disse que nós vamos usar, em que todas caixinhas de truques são escritas explicitamente.

Link:
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=189`