Cálculo 2 - 2022.1

Aula 28: a derivada
da função inversa

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Introdução

No curso de Cálculo 1 você deve ter visto uma fórmula para a derivada da função inversa, e você deve ter visto que ela é sempre apresentada com certas "hipóteses"... tipo: "se as condições tais e tais são obedecidas então a derivada da função inversa é dada por esta formula aqui: [bla]" — e fica implícito que quando essas condições não são obedecidas a fórmula pode dar resultados errados. Dê uma olhada em:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=90
https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_function_rule

Nós vimos — por alto — que existe uma versão do TFC1 pra funções contínuas e uma outra, bem mais complicada, pra funções com descontinuidades... e vimos que o TFC2 também tem várias versões, e vimos que em muitas situações nós podemos fazer todas as contas que nos interessam sem dizer explicitamente quais são os domínios das nossas funções; se for necessário dizer os domínios nós podemos descobrir os domínios certos no final, depois de fazer todas as contas.

Em Cálculo 2 e Cálculo 3 é comum a gente fazer as contas primeiro e só colocar os domínios e as "condições necessárias" no final. Neste PDF eu vou fazer uma versão extrema disso: eu vou considerar que vocês só vão ser capazes de entender bem as condições necessárias quando tiverem bastante prática com as contas, então a gente vai sempre começar "chutando" que as contas funcionam e "testando" elas depois.

Nós vamos usar esta versão aqui da demonstração da fórmula da derivada da função inversa ("DFI"):

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\
\text{Então:} & \frac{d}{dx}f(g(x)) & = & \frac{d}{dx}x \\
 & & = & 1 \\
 & \frac{d}{dx}f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\
 & f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\
 & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array}$$

O modo natural de numerar cada uma das igualdades dela é este:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Se:} & f(g(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\text{Então:} & \frac{d}{dx}f(g(x)) & \overset{(2)}{=} & \frac{d}{dx}x \\
 & & \overset{(3)}{=} & 1 \\
 & \frac{d}{dx}f(g(x)) & \overset{(4)}{=} & f'(g(x))g'(x) \\
 & f'(g(x))g'(x) & \overset{(5)}{=} & 1 \\
 & g'(x) & \overset{(6)}{=} & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array}$$

Por enquanto estamos fingindo que os domínios não importam e que as nossas funções são deriváveis "onde precisar".

Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ então "f e g são inversas" quer dizer:

$$\begin{array}{rl}
 & \forall a \in A.\ g(f(a)) = a \\
\text{e} & \forall b \in B.\ f(g(b)) = b
\end{array}$$

A linha "Se: $f(g(x)) = x$" diz que a nossa única hipótese explícita é que $\forall x \in \mathrm{dom}(g). f(g(x)) = x$...

Exercício 1.

Sejam:

$$[\mathrm{DFI}] \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & \frac{d}{dx} x \\ & & = & 1 \\ & \frac{d}{dx} f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\ & f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\ & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{DFI}^-] \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Repare que [DFI] é a demonstração da fórmula da derivada da função inversa e [DFI$^-$] é só a fórmula da derivada da função inversa, sem a demonstração toda... e, de novo, lembre que eu vou usar uma versão muito reduzida das condições necessárias pra essa fórmula valer.
Diga os resultados das substituições abaixo.

a) $[\mathrm{DFI}] \begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \end{bmatrix} = ?$

b) $[\mathrm{DFI}^-] \begin{bmatrix} f(y) := y^2 \\ f'(y) := 2y \\ g(x) := \mathrm{sqrt}(x) \\ g'(x) := \mathrm{sqrt}'(x) \end{bmatrix} = ?$

c) $[\mathrm{DFI}^-] \begin{bmatrix} f(y) := \mathrm{sen}\, y \\ f'(y) := \cos y \\ g(x) := \mathrm{arcsen}(x) \\ g'(x) := \mathrm{arcsen}'(x) \end{bmatrix} = ?$

d) $[\mathrm{DFI}^-] \begin{bmatrix} x := s \\ f(\theta) := \mathrm{sen}\, \theta \\ f'(\theta) := \cos \theta \\ g(s) := \mathrm{arcsen}(s) \\ g'(s) := \mathrm{arcsen}'(s) \end{bmatrix} = ?$

e) $[\mathrm{DFI}^-] \begin{bmatrix} x := c \\ f(\theta) := \cos \theta \\ f'(\theta) := -\mathrm{sen}\, \theta \\ g(c) := \cos^{-1}(c) \\ g'(c) := (\cos^{-1})'(c) \end{bmatrix} = ?$

Repare que no item (b) eu usei ‘sqrt(x)’ ao invés de ‘$\sqrt{x}$’... isso é porque não há uma notação boa pra derivada da raiz quadrada.

Exercício 1: respostas

...ainda não digitei! Mas veja este PDF:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-dicas-pra-P1.pdf

Uma demonstração complicada

$$
\begin{array}{rcl}
\exp(\ln(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\ln' x & \overset{(2)}{=} & 1/\exp'(\ln(x)) \\
 & \overset{(3)}{=} & 1/\exp(\ln(x)) \\
 & \overset{(4)}{=} & 1/x \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(5)}{=} & f'(g(x))g'(x) \\
\frac{d}{dx} \ln(-x) & \overset{(6)}{=} & \ln'(-x) \cdot -1 \\
 & \overset{(7)}{=} & 1/(-x) \cdot -1 \\
 & \overset{(8)}{=} & 1/x \\
\ln|x| & \overset{(9)}{=} & \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
\frac{d}{dx} \ln|x| & \overset{(10)}{=} & \frac{d}{dx} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(11)}{=} & \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \frac{d}{dx} \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(12)}{=} & \begin{cases} 1/x & \text{quando } 0 < x, \\ 1/x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(13)}{=} & 1/x \\
1/x & \overset{(14)}{=} & \frac{d}{dx} \ln|x| \\
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\,dx & \overset{(15)}{=} & \big(\ln|x|\big)\big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}
$$

Outro jogo

No final de maio nós usamos um jogo pra debugar representações gráficas... esse aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=10

Agora nós vamos fazer algo parecido pra debugar *demonstrações*. Nesse jogo novo os objetivos do jogador O vão ser 1) garantir que o jogador P sabe justificar cada passo da demonstração que ele propôs, e 2) ajudar o jogador P a decobrir erros, 3) ajudar o jogador P a descobrir passos da demonstração que são saltos "grandes demais", e que ficariam mais claros se fosses reescritos como vários sub-passos.

Falta digitar isso aqui!

Os exemplos de jogadas que eu pus no quadro em 30/jun/2022 foram estes:

O: Porque $\stackrel{(2)}{=}$?
P: Pela [DFI].
O: Qual caso particular da [DFI]?
P: (Aqui o jogador P responde mostrando uma substituição em detalhes: o resultado do exercício 1a)
O: Porque $\stackrel{(4)}{=}$?
P: Por $\exp(\ln(x)) = x$ — portanto $1/\exp(\ln(x)) = 1/x$.

Exercício 2.

a) Justifique a igualdade $\stackrel{(5)}{=}$.
Obs: aqui você pode responder com o nome de uma fórmula bem conhecida. Alguém que não lembre essa fórmula bem pode pesquisar ela pelo nome e encontrar várias explicações grandes sobre ela, *usando várias notações diferentes*, em livros e na internet.

b) Justifique $\stackrel{(6)}{=}$.
c) Justifique $\stackrel{(7)}{=}$.
d) Justifique $\stackrel{(12)}{=}$.
e) Justifique $\stackrel{(15)}{=}$.
Dicas: 1) a igualdade $\stackrel{(15)}{=}$ é consequência da igualdade $\stackrel{(14)}{=}$; 2) aqui você vai ter que usar o TFC2! Encontre um enunciado do TFC2 em algum lugar e mostre qual é a substituição que você tem que usar pra obter $\stackrel{(15)}{=}$ a partir de $\stackrel{(14)}{=}$.

O item (f) abaixo é bem mais difícil —
mas os livros fazem passos desse tipo a beça... =(

f) A igualdade $\stackrel{(11)}{=}$ é consequência de uma "regra misteriosa", [RM], que é "óbvia". Digamos que:

$$[\mathrm{RM}] \;=\; \left(\frac{d}{dx} \begin{cases} f(x) & \text{quando } P(x) \\ g(x) & \text{quando } Q(x) \end{cases} = \,? \right)$$

Descubra qual é o '?' certo e descubra qual é a substituição [RM] [??] =??? que justifica $\stackrel{(11)}{=}$.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Se:} & f(g(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\text{Então:} & \frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(2)}{=} & \frac{d}{dx} x \\
 & & \overset{(3)}{=} & 1 \\
 & \frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(4)}{=} & f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
 & f'(g(x)) \cdot g'(x) & \overset{(5)}{=} & 1 \\
 & g'(x) & \overset{(6)}{=} & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Se:} & e^{g(x)} & \overset{(1)}{=} & x \\
\text{Então:} & \frac{d}{dx}e^{g(x)} & \overset{(2)}{=} & \frac{d}{dx}x \\
& & \overset{(3)}{=} & 1 \\
& \frac{d}{dx}e^{g(x)} & \overset{(4)}{=} & f'(\ln(x)) \cdot g'(x) \\
& f'(\ln(x)) \cdot g'(x) & \overset{(5)}{=} & 1 \\
& g'(x) & \overset{(6)}{=} & \dfrac{1}{f'(\ln(x))}
\end{array}
$$