Cálculo 2 - 2022.1

Aula 31: dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Introdução

Nos livros é bem comum encontrarmos trechos como este aqui... Lembre que está é a fórmula da regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Substituindo $f(x)$ e $g(x)$ nela por $\operatorname{sen} x$ e $2x$ respectivamente, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x)\cdot 2$$

Nós precisávamos de uma notação curta e precisa pra esse tipo de substituição, e eu introduzi essa notação aqui:

$$\begin{array}{rcl} [\text{RC}] & = & \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x)\right) \\ [\text{RC}]\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \\ g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x)\cdot 2\right) \end{array}$$

Quando nós tentamos traduzir essa duas notações — a original em português e a formalizada — pra uma operação "que um computador conseguisse executar" nós vimos que a tradução não era nada óbvia. Nós fizemos uns exercícios representando as expressões em árvores e fazendo tudo passo a passo, testamos algumas traduções, e vimos que se:

$$[\text{SA}_1] = \begin{bmatrix} f(\alpha) := \operatorname{sen}(\alpha) \\ g(\alpha) := 2\cdot\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f(\alpha))[\text{SA}_1] = \operatorname{sen}(\alpha) \\ (g(\alpha))[\text{SA}_1] = 2\cdot\alpha \end{bmatrix}$$

$$[\text{SA}_2] = \begin{bmatrix} f(\alpha) := \operatorname{sen}((\alpha)[\text{SA}_2]) \\ g(\alpha) := 2\cdot(\alpha)[\text{SA}_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f(\alpha))[\text{SA}_2] = \operatorname{sen}((\alpha)[\text{SA}_2]) \\ (g(\alpha))[\text{SA}_2] = 2\cdot(\alpha)[\text{SA}_2] \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{array}{rcl} (f(g(100)))[\text{SA}_1] & = & (\operatorname{sen}(g(100))) \\ (f(g(100)))[\text{SA}_2] & = & (\operatorname{sen}(2\cdot 100))\ , \end{array}$$

e a tradução $[\text{SA}_2]$ é a que corresponde ao que os livros fazem quando eles dizem "subtitua"... a $[\text{SA}_1]$ é uma substituição que "pára pelo meio do caminho" e não substitui tudo que deveria.

Em termos beeem técnicos, acho que a substituição que nós queremos usar é o "call-by-name",

https://en.wikipedia.org/wiki/Evaluation_strategy#Call_by_name

mas numa versão simplificada que não tem o truque pra evitar captura de variáveis ligadas.

$$\text{Seja } [S1] = \begin{bmatrix} f(\alpha) := \sin((\alpha)[S1]) \\ f'(\alpha) := \cos((\alpha)[S1]) \\ g(\alpha) := (42)[S1] \cdot (\alpha)[S1] \\ g'(\alpha) := 42 \end{bmatrix}.$$

Também dá pra calcular [RC][S1] desta forma:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{d}{d\underbrace{x}_{\Rightarrow x}} f(\underbrace{g(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42\cdot x})}_{\Rightarrow \sin(42\cdot x)}}_{\Rightarrow \frac{d}{dx}\sin(42\cdot x)} = \underbrace{\underbrace{f'(\underbrace{g(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42\cdot x})}_{\Rightarrow \cos(42\cdot x)} \cdot \underbrace{g'(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42}}_{\Rightarrow \cos(42\cdot x)42}$$

$$\Rightarrow \tfrac{d}{dx}\sin(42\cdot x) = \cos(42\cdot x)42$$

$$[\mathrm{MV}_1] \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(g(b)) - f(g(a)) \\ &=& f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MV}_2] \;=\; \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\mathrm{MV}_3] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} &=& \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} &=& \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right) \quad [\mathrm{MV}_4] \;=\; \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MVI}_3] \;=\; \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccl} F(g(x)) &=& \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| && \\ F(u) &=& \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array} \right) \quad [\mathrm{MVI}_4] \;=\; \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array} \right)$$

No mini-teste 2 - link:

`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-MT2.pdf`

eu pedi pra vocês justificarem um passo de um exemplo do livro do Miranda como nesse jogo aqui,

`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-der-fun-inv.pdf#page=6`

como se o jogador O tivesse dito "justifica essa igualdade *com um caso particular do* $[MV_1]$ *ou do* $[MV_3]$", onde $[\mathrm{MV}_1]$ e $[\mathrm{MV}_3]$ são as demonstrações da mudança de variável da página anterior... a $[\mathrm{MV}_1]$ e a $[\mathrm{MV}_3]$ são pra integral definida, então você vai obter um caso particular que é só "parecido" com a igualdade que você quer justificar.

$$[\mathrm{MV}_2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\mathrm{S4}] = \begin{bmatrix} g(\alpha) := \mathrm{sen}(4x) \\ g'(\alpha) := 4\cos(4x) \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{MV}_2][\mathrm{S4}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(\mathrm{sen}(4x)) \cdot 4\cos(4x)\,dx = \int_{u=\mathrm{sen}(4x)}^{u=\mathrm{sen}(4x)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\mathrm{S5}] = \begin{bmatrix} g(\alpha) := \frac{1}{4}\mathrm{sen}(4x) \\ g'(\alpha) := \cos(4x) \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{MV}_2][\mathrm{S5}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4x)) \cdot \cos(4x)\,dx = \int_{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4x)}^{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4x)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\mathrm{S6}] = \begin{bmatrix} g(\alpha) := \frac{1}{4}\mathrm{sen}(4\alpha) \\ g'(\alpha) := \cos(4(\alpha)[\mathrm{S6}]) \\ f'(\alpha) := ((\alpha)[\mathrm{S6}])^5 \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{MV}_2][\mathrm{S6}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} (\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4x))^5 \cdot \cos(4x)\,dx = \int_{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4a)}^{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4b)} (u)^5\,du \right)$$

$$[\mathrm{S7}] = \begin{bmatrix} g(\alpha) := \frac{1}{4}\mathrm{sen}(4\alpha) \\ g'(\alpha) := \cos(4(\alpha)[\mathrm{S7}]) \\ f'(\alpha) := 4 \cdot ((\alpha)[\mathrm{S7}])^5 \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{MV}_2][\mathrm{S7}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} 4 \cdot (\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4x))^5 \cdot \cos(4x)\,dx = \int_{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4a)}^{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4b)} 4 \cdot (u)^5\,du \right)$$