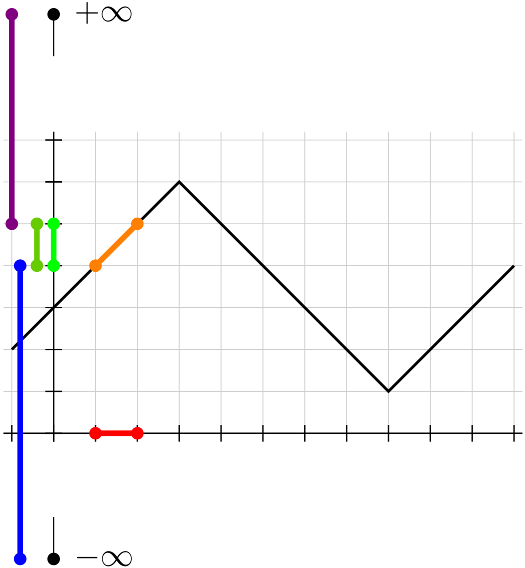
Cálculo 2 - 2022.1

Aula 15: infs e sups

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html



$+\infty$
$-\infty$

Algumas definições

Digamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $B\subset\mathbb{R}$.
Vamos definir $\inf(f(B))$ e $\sup(f(B))$
desta forma:

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \\
C & = & \{\,(x,f(x))\mid x\in B\,\} \\
D & = & \{\,f(x)\mid x\in B\,\} \\
D' & = & \{\,y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in B.\ f(x)=y\,\} \\
L & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ y\le d\,\} \\
U & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ d\le y\,\} \\
(\alpha=\inf(D)) & = & \alpha\in L\wedge(\forall\ell\in L.\ \ell\le\alpha) \\
(\beta=\sup(D)) & = & \beta\in U\wedge(\forall u\in U.\ \beta\le u)
\end{array}
$$

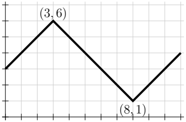
Como visualizar proposições

O que nós vamos ver agora é uma versão reorganizada das páginas 11 até 20 do "Somas 2" e de algumas idéias do "Somas 2 4", que na verdade se chama "Comentários sobre o exercício 4 do "Integrais como somas de retângulos (2)" "...

Links:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=11
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2-4.pdf

Exercício 1.

Sejam: $f(x) =$ 

,

$$B = \{\underbrace{7, 8, 9}_{\text{em } x}\},\ P(\alpha) = \underbrace{\forall x \in B.\ \alpha \leq \underbrace{f(\underbrace{\ x\ }_{\text{em } (x,0)})}_{\text{em } (x,f(x))}}_{\text{em } (0,\alpha)}.$$

Representa graficamente

a) $P(0)$, c) $P(4)$,
b) $P(2)$, d) $P(1.5)$.

Use uma cópia do gráfico da f pra cada uma.

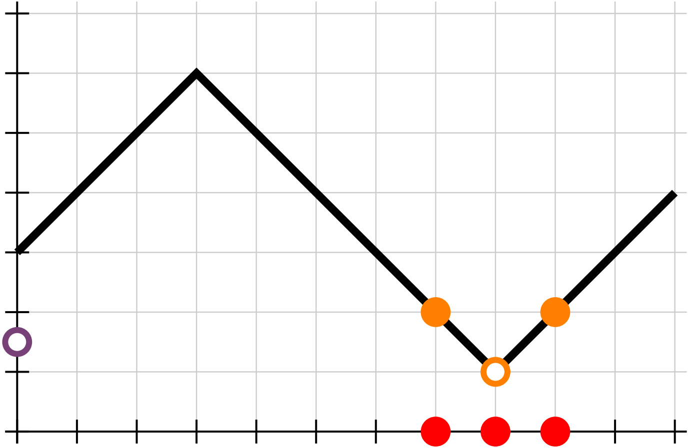
Dicas pro Exercício 1

$$
\begin{array}{rcl}
B & = & \{7,8,9\} \\
P(\alpha) & = & \forall x \in B.\ \alpha \le f(x) \\
& = & \forall x \in \{7,8,9\}.\ \alpha \le f(x) \\
& = & (\alpha \le f(x))[x := 7] \\
& \land & (\alpha \le f(x))[x := 8] \\
& \land & (\alpha \le f(x))[x := 9] \\
& = & (\alpha \le f(7)) \land (\alpha \le f(8)) \land (\alpha \le f(9)) \\
& = & (\alpha \le 2) \land (\alpha \le 1) \land (\alpha \le 2)
\end{array}
$$

Dicas pro Exercício 1 (2)

$$
\begin{array}{rcl}
P(\alpha) & = & \underbrace{\forall x \in B.\ \underbrace{\alpha \leq f(\underbrace{x}_{\text{em } (x,0)})}_{\text{em } (x,f(x))}}_{\text{em } (0,\alpha)} \\
 & = & \underbrace{\underbrace{(\alpha \leq f(\underbrace{x}_{\text{em } (x,0)}))}_{\text{em } (x,f(x))}[x:=7] \land \underbrace{(\alpha \leq f(\underbrace{x}_{\text{em } (x,0)}))}_{\text{em } (x,f(x))}[x:=8] \land \underbrace{(\alpha \leq f(\underbrace{x}_{\text{em } (x,0)}))}_{\text{em } (x,f(x))}[x:=9]}_{\text{em } (0,\alpha)} \\
 & = & \underbrace{\underbrace{(\alpha \leq f(\underbrace{7}_{\text{em } (7,0)}))}_{\text{em } (7,f(7))} \land \underbrace{(\alpha \leq f(\underbrace{8}_{\text{em } (8,0)}))}_{\text{em } (8,f(8))} \land \underbrace{(\alpha \leq f(\underbrace{9}_{\text{em } (9,0)}))}_{\text{em } (9,f(9))}}_{\text{em } (0,\alpha)}
\end{array}
$$

Dicas pro Exercício 1 (3)



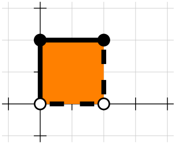
Exercício 2.

Represente graficamente os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,2),\ y \in [1,2)\,\} \\ B & = & \{\,(x,2x) \mid x \in [1,2)\,\} \\ C & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \ \wedge\ x+y < 2\,\} \end{array}$$

Dica: todos eles vão dar subconjuntos do plano feitos de infinitos pontos, e você vai ter que adaptar as convenções que usamos pra desenhar intervalos pra desenhar *regiões*.

Use bolinhas cheias pra indicar "este ponto pertence ao conjunto", bolinhas ocas pra indicar "este ponto não pertence ao conjunto", linhas grossas contínuas pra indicar "esse trecho da fronteira pertence ao conjunto" e linhas tracejadas pra indicar "esse trecho da fronteira não pertence ao conjunto". Por exemplo:



Dica pro exercício 2

...ou: como debugar representações gráficas.
Pense num jogo. Os jogadores se chamam P ("proponente"), e O ("oponente"). O P quer encontrar uma representação gráfica pro conjunto A, e o O quer mostrar que o P está errado.

Digamos que

$$A = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2),\ y \in [1, 2) \,\}.$$

O P desenha uma representação gráfica com um nome diferente de A e "propõe" ela — por exemplo, o P diz isso aqui:

$A' =$ 

O oponente O diz: "verifica o ponto $(1, 1)$". Os dois verificam o ponto $(1, 1)$ do A' e vêem que o desenho do A' é ambíguo no ponto $(1, 1)$, já que esse é um ponto de fronteira e o P não desenhou ele nem como linha grossa sólida nem com linha tracejada... então a resposta pra pergunta "$(1, 1) \in A'$?" não é nem **V** nem **F**, é "erro", e portanto $A \neq A'$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha essa rodada, e o P tem que propôr outra representação gráfica.

Aí o P propõe uma outra representação gráfica, com um outro nome, diferente de A e de A'. Por exemplo, P propõe isso aqui:

$A'' =$ 

O oponente O diz: "verifica o ponto $(0, 0)$". Os dois verificam, e vêem que:

$$(0, 0) \notin A, \quad (0, 0) \in A''$$

E portanto $A \neq A''$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha mais essa rodada.

Quando o P propõe um desenho que o O não consegue mostrar que está errado o P ganha a rodada.

Até vocês terem prática vocês vão jogar como o P, vão me mostrar as representações gráficas de vocês, e eu vou jogar como o O. Quando vocês tiverem mais prática vocês vão conseguir chutar representações gráficas (como o jogador P) e testá-las (fazendo o papel do jogador O vocês mesmos).

Exercício 3.
Aqui as definições são as mesmas do exercício 1, mas você só vai representar o resultado de cada $P(\alpha)$ em $(0, \alpha)$... não desenhe as coisas que ficavam sobre o eixo x ou sobre o gráfico da f.

a) Represente graficamente $P(y)$ (obs: em $(0, y)$!) para $y = 0, 0.5, 1, \ldots, 4$.

b) Represente graficamente $P(y)$ para $y \in [0, 4]$.

c) Represente graficamente $\{\, y \in [0, 4] \mid P(y) \,\}$.

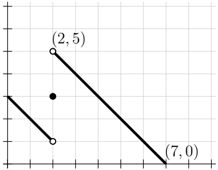
Exercício 4.
Faça o exercício 4 das páginas 18 a 20 do "Somas 2".
Link:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=18

Obs: esse exercício 4 do semestre passado é meio bagunçado... todos os meus colegas de graduação conheciam esse método de visualização, mas ele era algo informal, que eu nunca vi descrito por escrito em lugar nenhum...

Acho que os exercícios 1, 2 e 3 deste semestre estão bem mais claros do que o 4 do semestre passado. =/

Exercício 5.

Sejam $f(x) =$ 

e $B = [1,3]$.

Represente graficamente estes conjuntos —
as definições deles são as mesmas do slide 3:

$$\begin{array}{rcl} C &=& \{\,(x, f(x)) \mid x \in B\,\} \\ D &=& \{\,f(x) \mid x \in B\,\} \\ D' &=& \{\,y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y\,\} \\ L &=& \{\,y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d\,\} \\ U &=& \{\,y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y\,\} \end{array}$$

Exercício 6

Obs: se você tiver muita dificuldade com o Exercício 5 faça este exercício antes do 5... e se você conseguir fazer o Exercício 5 direto não faça este aqui.

Sejam $f(x) = x + 2$ e $B = [1, 2]$.

Represente graficamente estes conjuntos — as definições deles são as mesmas do slide 3:

$$\begin{array}{rcl}
C & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\
D & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\
D' & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\
L & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d \,\} \\
U & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y \,\}
\end{array}$$

Infs e sups como números

Dá pra provar que

$$\forall D \in \overline{\mathbb{R}}.\ \exists! \alpha \in \overline{\mathbb{R}}.\ (\alpha = \inf(D))$$
$$\forall D \in \overline{\mathbb{R}}.\ \exists! \beta \in \overline{\mathbb{R}}.\ (\beta = \sup(D))$$

Vamos chamar esses valores de α e β de $\inf(D)$ e $\sup(D)$.

Exercício 6.5.

Calcule:

a) $\inf([3,4])$	b) $\sup([3,4])$
c) $\inf((3,4))$	d) $\sup((3,4))$
e) $\inf(\mathbb{R})$	f) $\sup(\mathbb{R})$
g) $\inf(\overline{\mathbb{R}})$	h) $\sup(\overline{\mathbb{R}})$
i) $\inf(\emptyset)$	j) $\sup(\emptyset)$

Aproximações por cima

Mais duas definições:
A "melhor aproximação por cima" para a integral de f na partição P é:

$$\overline{\int_P} f(x)\,dx = [\sup]_P,$$

O "limite das aproximações por cima" pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\overline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\sup]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por cima de f no intervalo $[a,b]$".

A notação $[a,b]_{2^k}$ está explicada aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=35

Aproximações por baixo

Mais duas definições:
A “melhor aproximação por baixo” para a integral de f na partição P é:

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx = [\inf]_P,$$

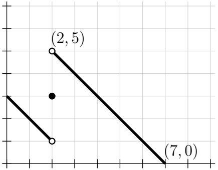
O “limite das aproximações por baixo” pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\inf]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a “integral por baixo de f no intervalo $[a,b]$”.

Exercício 7.

Seja:

$f(x) =$ 

Represente graficamente:

a) $\overline{\int}_{[1,5]_{2^0}} f(x)\,dx$ b) $\underline{\int}_{[1,5]_{2^0}} f(x)\,dx$

c) $\overline{\int}_{[1,5]_{2^1}} f(x)\,dx$ d) $\underline{\int}_{[1,5]_{2^1}} f(x)\,dx$

e) $\overline{\int}_{[1,5]_{2^2}} f(x)\,dx$ f) $\underline{\int}_{[1,5]_{2^2}} f(x)\,dx$

A definição de integral

A nossa definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ vai ser:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;\overset{\Downarrow}{=}\; \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

se a igualdade marcada com '$\overset{\Downarrow}{=}$' for verdade.

Se a igualdade '$\overset{\Downarrow}{=}$' for falsa vamos dizer que:
"$f(x)$ não é integrável no intervalo $[a,b]$",
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não está definida", ou
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ dá erro".

(Compare com $\frac{42}{0}$, que também "não está definido", ou "dá erro"...)

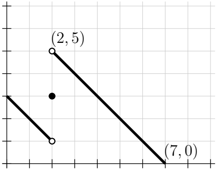
Como esses limites funcionam?
Em Cálculo 1 você viu que algumas funções não são deriváveis.
Agora nós vamos ver que algumas funções não são integráveis.
O melhor modo de visualizar isso é usando estas definições:

$$
\begin{aligned}
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &= \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

As notações com ‘$\overline{\underline{\int}}$’ representam a diferença entre uma aproximação por cima e uma aproximação por baixo, e a gente vai desenhar os ‘$\overline{\underline{\int}}_P$’s como retângulos flutuando no ar. O ‘$\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b}$’ é o limite de figuras tipo ‘$\overline{\underline{\int}}_P$’, e ele pode dar algo mais complicado do que retângulos.

Exercício 8.

Seja:

$f(x) =$ 

Representante graficamente:

a) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_{2^0}} f(x)\,dx$

b) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_{2^1}} f(x)\,dx$

c) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_{2^2}} f(x)\,dx$