Cálculo 2 - 2022.1

Aulas 4 e 5: mais exercícios de substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Obs: este PDF complementa o
primeiro PDF de 2021.2... link pra ele:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf

Exercício 1.

O livro do Daniel Miranda tem vários exercícios de "Calcule as seguintes antiderivadas" na p.185. Link:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=185

Dá pra resolver eles traduzindo-os pra EDOs e resolvendo as EDOs por chutar e testar, mas você vai ter que inventar os chutes você mesmo.
As traduções dos primeiros itens para EDOs são:

1) $f'(x) = x$
2) $f'(x) = 3x + 1$
3) $f'(x) = x^n$

Encontre soluções destas EDOs por chutar e testar.
Depois resolva os itens 4 a 10 das páginas 185 e 186 traduzindo-os pra EDOs e encontrando soluções dessas EDOs por chutar e testar.

Exercício 2.
Seja:

$$[\mathsf{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Calcule o resultado destas substuições:

a) $[\mathsf{RC}] \begin{bmatrix} f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \\ g(x) := x^2 + x \\ g'(x) := 2x + 1 \end{bmatrix}$

b) $[\mathsf{RC}] \begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{x} \\ f'(x) := \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ g(x) := 4 - x^2 \\ g'(x) := -2x \end{bmatrix}$

Exercício 3.

O livro do Daniel Miranda tem vários exercícios de "derive usando a regra da cadeia" na p.89. Link:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=89

Os seis primeiros itens são estes aqui:

1) $f(x) = (2x+10)^{12}$
2) $f(t) = (3t-2)^5$
3) $g(\theta) = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^3$
4) $h(t) = e^{3t^2+t-1}$
5) $f(x) = (x+\frac{1}{x})^4$
6) $f(x) = \cos 3x$

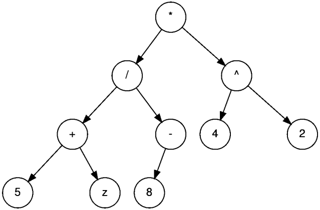
Resolva-os fazendo casos particulares da [RC].
Obs: você vai ter que encontrar a substituição certa.
Exemplo:

$$[\mathsf{RC}]\left[\begin{array}{c} f(x):=x^3 \\ f'(x):=3xr \\ g(x):=\operatorname{sen}x+\cos x \\ g'(x):=\cos x-\operatorname{sen}x \\ x:=\theta \end{array}\right]$$

$$= \left(\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^3 = 3(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2\cdot(\cos x-\operatorname{sen}x)\right)$$

Exercício 4.

A figura abaixo é desta página da Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_expression_tree



Ela é a "expression tree" correspondente à expressão $((5 + z)/ - 8) \cdot 4^2$.

a) Descubra qual subárvore dessa figura corresponde à subexpressão 4^2.

a) Cada bolinha dessa figura corresponde a uma subexpressão da expressão $((5 + z)/ - 8) \cdot 4^2$. Descubra como e diga qual é a expressão correspondente a cada bolinha.

$$\left(\frac{a \cdot b + a}{b+2}\right) \begin{bmatrix} a := b+3 \\ b := a+4 \end{bmatrix} = \left(\frac{(b+3)\cdot(a+4)+(b+3)}{(a+4)+2}\right)$$

$$[\mathsf{S1}] = \begin{bmatrix} a := b+3 \\ b := a+4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\mathsf{R1}: & (\langle\mathsf{expr}_1\rangle + \langle\mathsf{expr}_2\rangle)[\mathsf{S1}] & = & \langle\mathsf{expr}_1\rangle[\mathsf{S1}] + \langle\mathsf{expr}_2\rangle[\mathsf{S1}] \\
\mathsf{R2}: & (\langle\mathsf{expr}_1\rangle \cdot \langle\mathsf{expr}_2\rangle)[\mathsf{S1}] & = & \langle\mathsf{expr}_1\rangle[\mathsf{S1}] \cdot \langle\mathsf{expr}_2\rangle[\mathsf{S1}] \\
\mathsf{R3}: & \left(\dfrac{\langle\mathsf{expr}_1\rangle}{\langle\mathsf{expr}_2\rangle}\right)[\mathsf{S1}] & = & \left(\dfrac{\langle\mathsf{expr}_1\rangle[\mathsf{S1}]}{\langle\mathsf{expr}_2\rangle[\mathsf{S1}]}\right) \\
\mathsf{R4}: & 2[\mathsf{S1}] & = & 2 \\
\mathsf{R5}: & a[\mathsf{S1}] & = & b+3 \\
\mathsf{R6}: & b[\mathsf{S1}] & = & a+4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
(a \cdot b + a)[\mathsf{S1}] & = & (a \cdot b)[\mathsf{S1}] + a[\mathsf{S1}] & (\text{por } \mathsf{R1}) \\
& = & (a[\mathsf{S1}] \cdot b[\mathsf{S1}]) + a[\mathsf{S1}] & (\text{por } \mathsf{R2}) \\
& = & ((b+3) \cdot b[\mathsf{S1}]) + (b+3) & (\text{por } \mathsf{R5}) \\
& = & ((b+3) \cdot (a+4)) + (b+3) & (\text{por } \mathsf{R6})
\end{array}$$

Exercício 5.
Calcule

$$\left(\frac{a \cdot b + a}{b + 2}\right) [\mathsf{S1}]$$

bem passo a passo, usando as regras R1 a R6 da página anterior. Arrume o seu cálculo exatamente no formato descrito aqui,

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=7

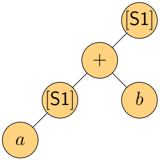
em que todos os '='s estão alinhados e a gente usa uma coluna extra à direita pra dizer a justificativa de cada '='.

Exercício 6.

No exercício 5 vocês devem ter obtido algo desta forma aqui:

$$\begin{array}{rcll}
\langle\mathsf{expr}\rangle & = & \langle\mathsf{expr}\rangle & \langle\mathsf{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\mathsf{expr}\rangle & \langle\mathsf{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\mathsf{expr}\rangle & \langle\mathsf{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\mathsf{expr}\rangle & \langle\mathsf{justificativa}\rangle
\end{array}$$

Represente cada uma dessas expressões em forma de árvore. A operação $[\mathsf{S1}]$ deve virar uma operação unária, como o '$-$' do '-8' na árvore do Exercício 4. Por exemplo, a representação em árvore de $(a[\mathsf{S1}]+b)[\mathsf{S1}]$ vai ser:



O objetivo deste exercício é fazer vocês entenderem este slogan:

> As regras $\mathsf{R1}\ldots\mathsf{R6}$ empurram os '$[\mathsf{S1}]$'s na direção das folhas da árvore.

Exercício 7.

No Exercício 5 você conseguiu se livrar de todos os '[S1]'s... primeiro você empurrou eles pras folhas, depois você aplicou umas regras que fizeram os '[S1]'s das folhas sumirem.
Usando só as regras R1 ... R6 a gente não consegue fazer algo parecido com a árvore do exercício 4... se a gente tentar "calcular" isso aqui

$$(((5+z)/-8)\cdot 4^2)[\mathsf{S1}]$$

a gente empaca em vários lugares.
Repare que o termo "calcular" aqui é um abuso de linguagem. "Calcular" o resultado de $(((5+z)/-8)\cdot 4^2)[\mathsf{S1}]$ quer dizer aplicar as regras R1 ... R6 quantas vezes a gente puder, até a gente a gente se livrar de todos os '[S1]'s. Se a gente aplicar as regras R1 ... R6 todas as vezes que dá e mesmo assim sobre alguns '[S1]'s é *como se* faltassem regras pra gente ir até o final...

Pra definir a operação [S2] nós vamos começar tratando as regras R1 ... R4 da operação [S1] como se elas fossem óbvias — porque elas só "empurram os '[S1]'s na direção das folhas" — e portanto elas *podem ser deixadas implícitas*.
A operação [S2] vai ter só estas duas regras "explícitas" aqui,

$$\begin{array}{lrcl} \mathsf{R7}: & 8[\mathrm{S2}] & = & 42 \\ \mathsf{R8}: & (-\langle\mathsf{expr}_1\rangle)[\mathrm{S2}] & = & 200\cdot((\langle\mathsf{expr}_1\rangle[\mathrm{S2}]) \end{array}$$

e além disso ela vai ter infinitas regras "implícitas" que só "empurram os '[S2]'s na direção das folhas".

Tente enteder esta definição informal, e mostre como calcular isto

$$(((5+z)/-8)\cdot 4^2)[\mathrm{S2}]$$

bem passo a passo usando as regras do [S2] — tanto as duas regras explícitas quanto as regras implícitas. Mostre a série de passos usando tanto a notação "algébrica" acima quanto a notação em árvore da figura do exercício 6.

Exercício 8: introdução

Lembre que nós estamos lidando com dois tipos de operações de substuição: o '[:=]' e as operações definidas por regras explícitas e implícitas. No exercício 8 nós vamos tentar descobrir qual é o modo *certo* de traduzir este '[:=]' aqui

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)\begin{bmatrix} f(x):=\operatorname{sen} x \\ f'(x):=\cos x \\ g(x):=42x \\ g'(x):=42 \\ x:=t \end{bmatrix}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(42t) = \cos(42t)\cdot 42\right)$$

pra uma operação de substituição do segundo tipo... só que antes de encontrar a tradução certa nós vamos testar várias traduções erradas.

Lembre que se alguém te perguntar qual é o resultado deste programa aqui

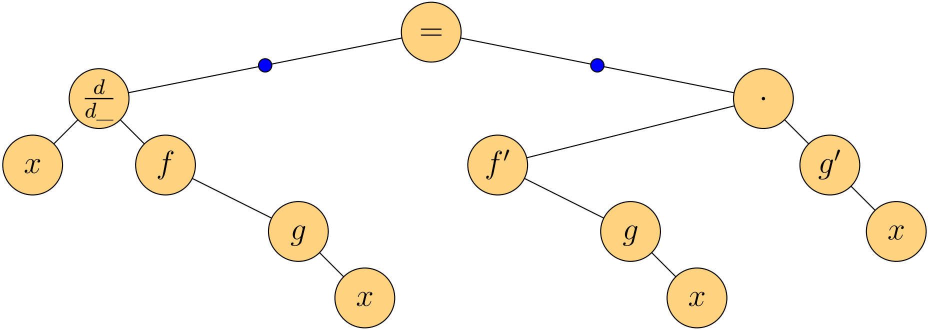
```
print("2+2=5")
```

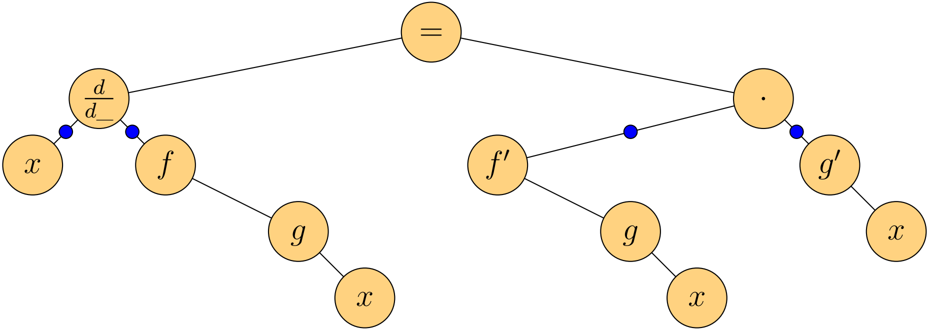
a resposta certa é

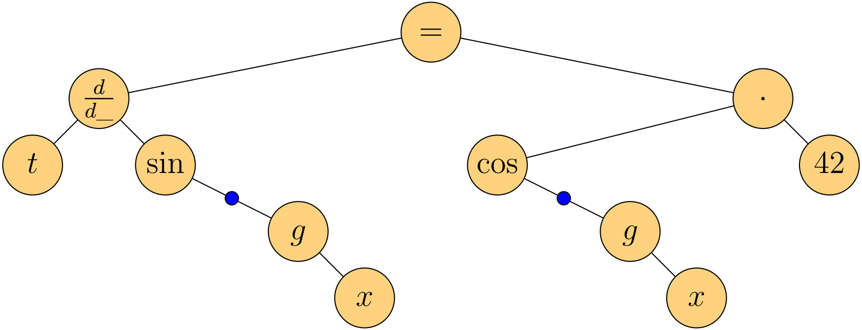
```
2+2=5
```

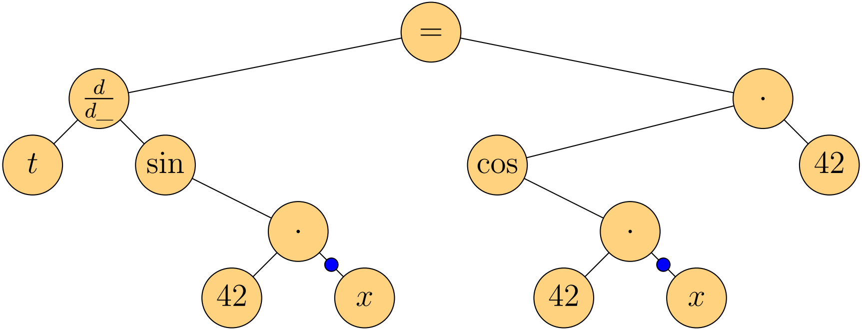
e não "esse programa tá errado"...

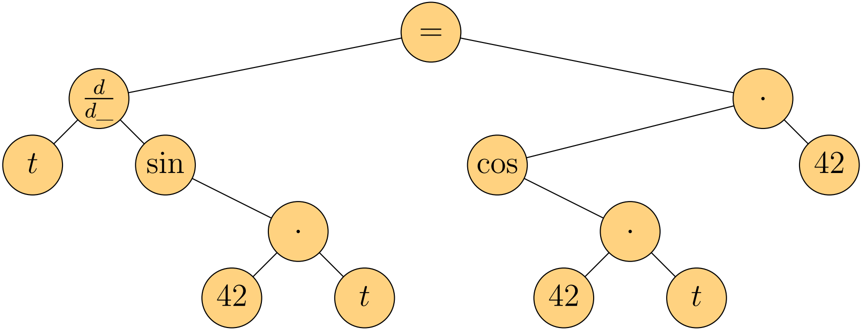
As figuras das próximas páginas mostram como a tradução certa deve funcionar.


=
$\frac{d}{d\_}$
x
f
g
x
$\cdot$
f'
g
x
g'
x


=
$\frac{d}{d\_}$
$\cdot$
x
f
f'
g'
g
x
g
x
x


=
$\frac{d}{d\_}$
$\cdot$
t
sin
cos
42
g
g
x
x


=
$\frac{d}{d\_}$
$\cdot$
t
sin
cos
42
$\cdot$
$\cdot$
42
x
42
x


=
d
d_
t
sin
·
42
t
·
cos
42
·
42
t

Exercício 8.

Lembre que:

$$[\mathsf{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

a) Digamos que $[\mathsf{S1}]$ só tem esta regra explícita:

$$\mathsf{R1}: \quad f(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathsf{S1}] \quad = \quad \mathrm{sen}(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)$$

calcule $[\mathsf{RC}][\mathsf{S1}]$.

b) Digamos que $[\mathsf{S2}]$ só tem estas regras explícitas:

$$\begin{array}{rrcl} \mathsf{R2}: & x[\mathsf{S2}] & = & t \\ \mathsf{R3}: & g'(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathsf{S2}] & = & \langle \mathsf{expr}_1 \rangle \end{array}$$

calcule $[\mathsf{RC}][\mathsf{S2}]$.

c) Digamos que $[\mathsf{S3}]$ só tem estas regras explícitas:

$$\begin{array}{rrcl} \mathsf{R4}: & x[\mathsf{S3}] & = & t \\ \mathsf{R5}: & f(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathsf{S3}] & = & \mathrm{sen}(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle[\mathsf{S3}]) \\ \mathsf{R6}: & f'(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathsf{S3}] & = & \cos(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle) \end{array}$$

calcule $[\mathsf{RC}][\mathsf{S2}]$.

Exercício 9

Na página da introdução ao exercício 8 a gente tinha essa figura aqui:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \\ g(x) := 42x \\ g'(x) := 42 \\ x := t \end{bmatrix}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(42t) = \cos(42t) \cdot 42\right)$$

Neste exercício você vai ter que encontrar uma substituição "do segundo tipo" que obedeça isto:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)[\mathsf{S99}]$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(42t) = \cos(42t) \cdot 42\right)$$

Encontre esta [S99] por chutar e testar, no seguinte sentido: pra cada um dos seus chutes dê a definição dele — por exemplo, "Seja [S20] a operação que só tem estas regras explícitas: ..." — e depois teste este seu chute, ou seja, calcule o resultado de [RC][S20].

Se o seu teste não der o resultado que você queria, que é este aqui,

$$\left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(42t) = \cos(42t) \cdot 42\right)$$

não apague e não jogue fora o que você fez. A "resposta" do exercício 9 deve ser uma série de chutes e testes que terminam com uma substituição que dá o resultado "certo".