

# Cálculo 2 - 2022.1

Aula 11: somas de retângulos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2022.1-C2.html>

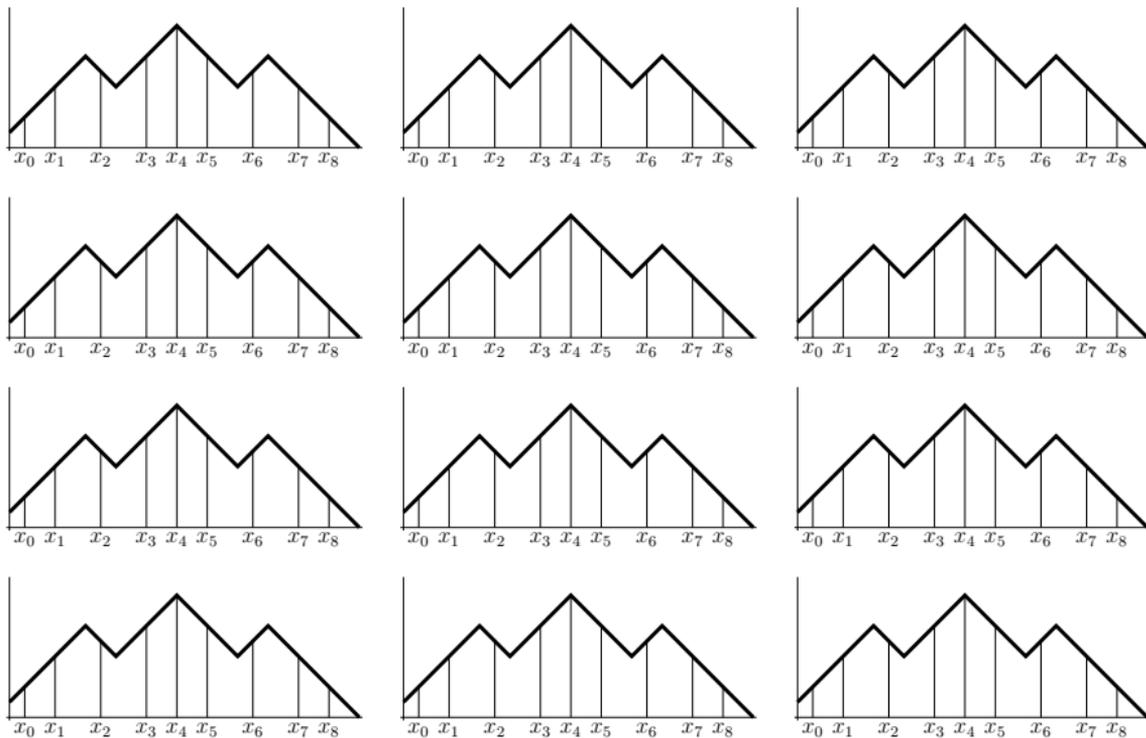
## Links

Este PDF complementa estes três PDFs  
do semestre passado:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT1.pdf>



**Exercício 1.**

Seja  $f(x)$  a função da página anterior —  
a página anterior tem 12 cópias do gráfico dela.

Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.  
Cada item abaixo vai virar 8 retângulos sobre  
uma das cópias do gráfico da  $f(x)$ .

a)  $\sum_{i=1}^8 f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

b)  $\sum_{i=1}^8 f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$

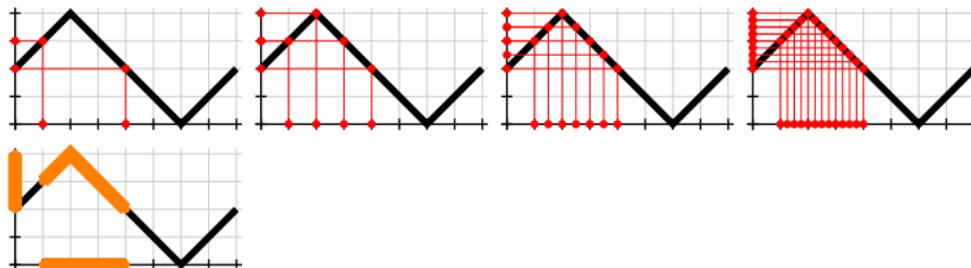
c)  $\sum_{i=1}^8 \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$

d)  $\sum_{i=1}^8 \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$

e)  $\sum_{i=1}^8 f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$

f)  $\sum_{i=1}^8 \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$

## Imagens de intervalos: figuras



## Imagens de intervalos: figuras $\rightarrow$ contas

Algumas pessoas acham que isto é sempre verdade:

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

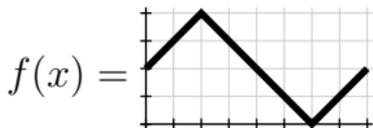
Não seja como elas!!!

Nas três figuras à esquerda da página anterior temos:

$$\begin{aligned} f(\{1, 4\}) &= \{f(1), f(4)\} \\ &= \{3, 2\} \\ &= \{2, 3\} \\ f(\{1, 2, 3, 4\}) &= \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\ &= \{2, 3, 4, 3\} \\ &= \{2, 3, 4\} \\ f([1, 3]) &= [2, 4] \\ [f(1), f(3)] &= [3, 2] \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 2\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

**Exercício 2.**

Seja  $f(x)$  esta função:



Calcule estas imagens de intervalos:

- |                |                |
|----------------|----------------|
| a) $f([0, 1])$ | g) $f([0, 4])$ |
| b) $f([1, 2])$ | h) $f([4, 8])$ |
| c) $f([0, 2])$ | i) $f([0, 8])$ |
| d) $f([2, 3])$ | j) $f([1, 7])$ |
| e) $f([1, 3])$ |                |
| f) $f([0, 3])$ |                |

## Sup informal e inf informal

O sup informal, ‘supi’, é como uma função bugada.

O sup “de verdade” recebe um conjunto de números e sempre retorna um número.

O supi recebe um conjunto de números e às vezes retorna um número, mas às vezes ele dá erro.

Quando o supi recebe um intervalo fechado  $[a, b]$  ele retorna a extremidade superior do intervalo:  $\text{supi}([a, b]) = b$ .

Quando o supi recebe um conjunto que não é um intervalo fechado ele dá erro.

O inf informal, ‘infi’, é como o supi, mas ele retorna a extremidade inferior do intervalo:  $\text{infi}([a, b]) = a$ .

O sup e o inf de verdade são BEM difíceis de definir.

Nós vamos começar usando o supi e o infi e vamos deixar pra definir o sup e o inf de verdade só quando já tivermos bastante prática com o supi e o infi.

**Exercício 3.**

Cada um dos itens do exercício 2 pede pra você calcular uma expressão da forma  $f([a, b])$ .

Para cada um dos itens do exercício 2

faça uma cópia do gráfico da função  $f(x)$

e desenhe sobre esta cópia estes dois retângulos:

$$\begin{aligned} & \text{supi}(f([a, b]))(b - a), \\ & \text{infi}(f([a, b]))(b - a) \end{aligned}$$

**Exercício 4.**

Acrescente estes dois itens extras no exercício 1 e faça eles:

$$\text{g) } \sum_{i=1}^8 \supi(f([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1})$$

$$\text{h) } \sum_{i=1}^8 \inf i(f([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1})$$

## Exercício 5.

Vou me referir a este PDF aqui, do semestre passado, como “Sommas 1”, ou “S1”:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf>

Vou usar nomes como “S1E4” pra me referir aos exercícios dele — S1E4 é o Exercício 4 do “Sommas 1”.

- a) Leia as páginas 9 e 10 do S1 e faça o S1E4.
- b) Leia a página 11 e 12 do S1 e faça o S1E5.

Para os próximos itens leia a página 23 do S1 e considere que  $f(x) =$  .

- c) Seja  $P = \{0, 1, 4, 5\}$ . Represente num gráfico só  $f(x)$  e  $[L]$ .
- d) Seja  $P = \{0, 1, 4, 5\}$ . Represente num gráfico só  $f(x)$  e  $[R]$ .
- e) Seja  $P = \{0, 1, 4, 5\}$ . Represente num gráfico só  $f(x)$  e  $[\min]$ .

## Exercício 6.

Vou me referir a este outro PDF do semestre passado como “Soma 2”, ou S2:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf>

Vou usar nomes como “S2E5” pra me referir aos exercícios dele — S2E5 é o Exercício 5 do “Sommas 2”.

a) Leia as páginas 32 até 35 do S2 e faça o S2E13.

Obs: **não faça** o S2E12 da página 34 do S2 — nos próximos exercícios você vai fazer algo parecido com ele, mas com outra notação.

## Métodos de integração: nomes

O S1 e o S2 usam estes nomes pros métodos de integração:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=23>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=32>

Ainda não definimos o **sup** e o **inf** “de verdade”,  
então vamos usar estes nomes aqui...

$$\begin{aligned}
 [\text{L}] &= \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
 [\text{R}] &= \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
 [\text{Trap}] &= \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
 [\text{M}] &= \sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i - a_i) \\
 [\text{min}] &= \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\text{max}] &= \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\text{infi}] &= \sum_{i=1}^N \text{infi}(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
 [\text{supi}] &= \sum_{i=1}^N \text{supi}(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
 \end{aligned}$$

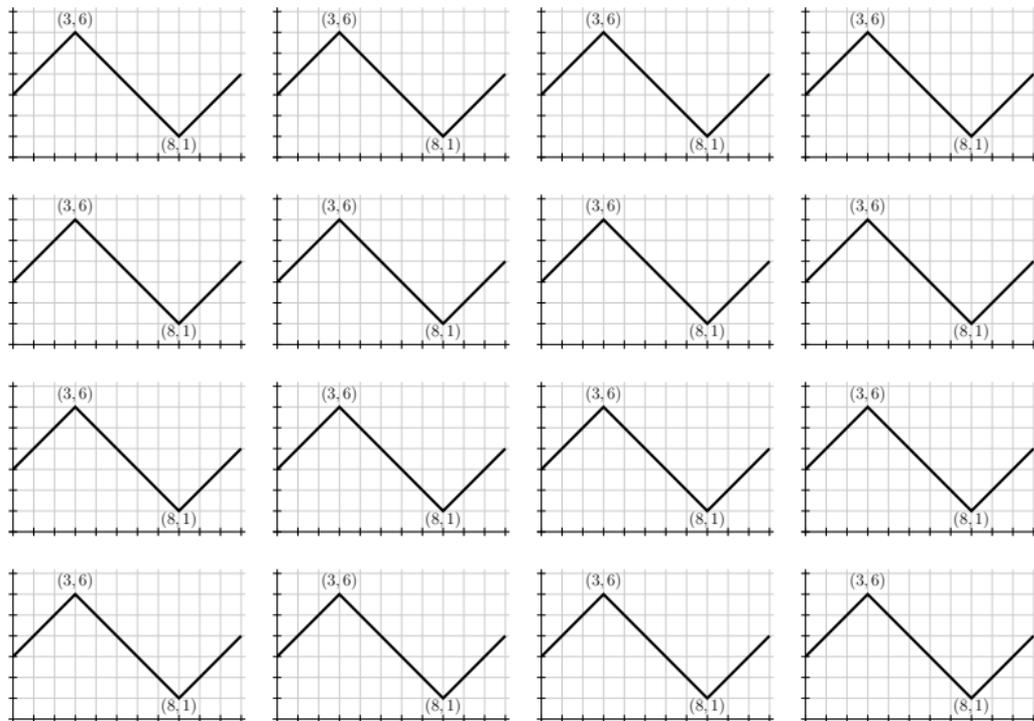
**Exercício 7.**

Faça o S2E12 (página 34 do S2), mas substituindo os ‘sup’s por ‘supi’s e os ‘inf’s por ‘infi’s.

Use a função do enunciado do S2E12.  
(Tem cópias dela na próxima página).

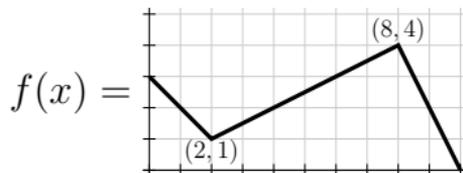
Link:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=34>



**Exercício 8.**

Seja:



Em cada um dos casos abaixo represente num gráfico só a função  $f$  e os dois somatórios pedidos.

- a)  $[\text{supi}]_{[1,9]_{21}}, [\text{infi}]_{[1,9]_{21}}$
- b)  $[\text{supi}]_{[1,9]_{22}}, [\text{infi}]_{[1,9]_{22}}$
- c)  $[\text{supi}]_{[1,9]_{23}}, [\text{infi}]_{[1,9]_{23}}$
- d)  $[\text{max}]_{[1,9]_{21}}, [\text{min}]_{[1,9]_{21}}$
- e)  $[\text{max}]_{[1,9]_{22}}, [\text{min}]_{[1,9]_{22}}$

