Cálculo 2 - 2022.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Cálculo 2 - 2022.1

Aulas 4 e 5: mais exercícios de substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Obs: este PDF complementa o
primeiro PDF de 2021.2... link pra ele:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf

Exercício 1.

O livro do Daniel Miranda tem vários exercícios de "Calcule as seguintes antiderivadas" na p.185. Link:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=185

Dá pra resolver eles traduzindo-os pra EDOs e resolvendo as EDOs por chutar e testar, mas você vai ter que inventar os chutes você mesmo. As traduções dos primeiros itens para EDOs são:

1) $f'(x) = x$
2) $f'(x) = 3x + 1$
3) $f'(x) = x^n$

Encontre soluções destas EDOs por chutar e testar. Depois resolva os itens 4 a 10 das páginas 185 e 186 traduzindo-os pra EDOs e encontrando soluções dessas EDOs por chutar e testar.

Exercício 2.
Seja:

$$[\mathsf{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Calcule o resultado destas substuições:

a) $[\mathsf{RC}] \begin{bmatrix} f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \\ g(x) := x^2 + x \\ g'(x) := 2x + 1 \end{bmatrix}$

b) $[\mathsf{RC}] \begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{x} \\ f'(x) := \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ g(x) := 4 - x^2 \\ g'(x) := -2x \end{bmatrix}$

Exercício 3.

O livro do Daniel Miranda tem vários exercícios de "derive usando a regra da cadeia" na p.89. Link:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=89

Os seis primeiros itens são estes aqui:

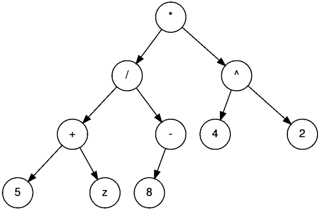
1) $f(x) = (2x+10)^{12}$
2) $f(t) = (3t-2)^5$
3) $g(\theta) = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^3$
4) $h(t) = e^{3t^2+t-1}$
5) $f(x) = (x + \frac{1}{x})^4$
6) $f(x) = \cos 3x$

Resolva-os fazendo casos particulares da [RC].
Obs: você vai ter que encontrar a substituição certa.
Exemplo:

$$[\mathsf{RC}]\left[\begin{smallmatrix} f(x):=x^3 \\ f'(x):=3xr \\ g(x):=\operatorname{sen}x+\cos x \\ g'(x):=\cos x-\operatorname{sen}x \\ x:=\theta \end{smallmatrix}\right]$$
$$= \left(\tfrac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^3 = 3(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2\cdot(\cos x - \operatorname{sen}x)\right)$$

Exercício 4.

A figura abaixo é desta página da Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_expression_tree



Ela é a "expression tree" correspondente à expressão $((5 + z)/-8) \cdot 4^2$.

a) Descubra qual subárvore dessa figura corresponde à subexpressão 4^2.

a) Cada bolinha dessa figura corresponde a uma subexpressão da expressão $((5 + z)/-8) \cdot 4^2$. Descubra como e diga qual é a expressão correspondente a cada bolinha.

$$\left(\frac{a \cdot b + a}{b+2}\right) \begin{bmatrix} a := b+3 \\ b := a+4 \end{bmatrix} = \left(\frac{(b+3)\cdot(a+4)+(b+3)}{(a+4)+2}\right)$$

$$[\mathsf{S1}] = \begin{bmatrix} a := b+3 \\ b := a+4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\mathsf{R1:} & (\langle\mathsf{expr}_1\rangle + \langle\mathsf{expr}_2\rangle)[\mathsf{S1}] & = & \langle\mathsf{expr}_1\rangle[\mathsf{S1}] + \langle\mathsf{expr}_2\rangle[\mathsf{S1}] \\
\mathsf{R2:} & (\langle\mathsf{expr}_1\rangle \cdot \langle\mathsf{expr}_2\rangle)[\mathsf{S1}] & = & \langle\mathsf{expr}_1\rangle[\mathsf{S1}] \cdot \langle\mathsf{expr}_2\rangle[\mathsf{S1}] \\
\mathsf{R3:} & \left(\dfrac{\langle\mathsf{expr}_1\rangle}{\langle\mathsf{expr}_2\rangle}\right)[\mathsf{S1}] & = & \left(\dfrac{\langle\mathsf{expr}_1\rangle[\mathsf{S1}]}{\langle\mathsf{expr}_2\rangle[\mathsf{S1}]}\right) \\
\mathsf{R4:} & 2[\mathsf{S1}] & = & 2 \\
\mathsf{R5:} & a[\mathsf{S1}] & = & b+3 \\
\mathsf{R6:} & b[\mathsf{S1}] & = & a+4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
(a \cdot b + a)[\mathsf{S1}] & = & (a \cdot b)[\mathsf{S1}] + a[\mathsf{S1}] & (\text{por } \mathsf{R1}) \\
 & = & (a[\mathsf{S1}] \cdot b[\mathsf{S1}]) + a[\mathsf{S1}] & (\text{por } \mathsf{R2}) \\
 & = & ((b+3) \cdot b[\mathsf{S1}]) + (b+3) & (\text{por } \mathsf{R5}) \\
 & = & ((b+3) \cdot (a+4)) + (b+3) & (\text{por } \mathsf{R6})
\end{array}$$

Exercício 5.
Calcule

$$\left(\frac{a \cdot b + a}{b + 2}\right) [\mathsf{S1}]$$

bem passo a passo, usando as regras R1 a R6 da página anterior. Arrume o seu cálculo exatamente no formato descrito aqui,

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=7

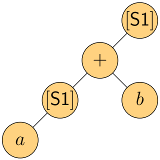
em que todos os '$=$'s estão alinhados e a gente usa uma coluna extra à direita pra dizer a justificativa de cada '$=$'.

Exercício 6.

No exercício 5 vocês devem ter obtido algo desta forma aqui:

$$\begin{array}{rcll} \langle\mathsf{expr}\rangle & = & \langle\mathsf{expr}\rangle & \langle\mathsf{justificativa}\rangle \\ & = & \langle\mathsf{expr}\rangle & \langle\mathsf{justificativa}\rangle \\ & = & \langle\mathsf{expr}\rangle & \langle\mathsf{justificativa}\rangle \\ & = & \langle\mathsf{expr}\rangle & \langle\mathsf{justificativa}\rangle \end{array}$$

Represente cada uma dessas expressões em forma de árvore. A operação $[\mathsf{S1}]$ deve virar uma operação unária, como o '$-$' do '-8' na árvore do Exercício 4. Por exemplo, a representação em árvore de $(a[\mathsf{S1}]+b)[\mathsf{S1}]$ vai ser:



O objetivo deste exercício é fazer vocês entenderem este slogan:

> As regras $\mathsf{R1}\ldots\mathsf{R6}$ empurram os '$[\mathsf{S1}]$'s na direção das folhas da árvore.

Exercício 7.

No Exercício 5 você conseguiu se livrar de todos os '[S1]'s... primeiro você empurrou eles pras folhas, depois você aplicou umas regras que fizeram os '[S1]'s das folhas sumirem.
Usando só as regras R1 ... R6 a gente não consegue fazer algo parecido com a árvore do exercício 4... se a gente tentar "calcular" isso aqui

$$(((5+z)/-8)\cdot 4^2)[\mathsf{S1}]$$

a gente empaca em vários lugares.
Repare que o termo "calcular" aqui é um abuso de linguagem. "Calcular" o resultado de $(((5+z)/-8)\cdot 4^2)[\mathsf{S1}]$ quer dizer aplicar as regras R1 ... R6 quantas vezes a gente puder, até a gente a gente se livrar de todos os '[S1]'s. Se a gente aplicar as regras R1 ... R6 todas as vezes que dá e mesmo assim sobre alguns '[S1]'s é *como se* faltassem regras pra gente ir até o final...

Pra definir a operação [S2] nós vamos começar tratando as regras R1 ... R4 da operação [S1] como se elas fossem óbvias — porque elas só "empurram os '[S1]'s na direção das folhas" — e portanto elas *podem ser deixadas implícitas*.
A operação [S2] vai ter só estas duas regras "explícitas" aqui,

$$\begin{array}{rrcl} \mathsf{R7}: & 8[\mathrm{S2}] & = & 42 \\ \mathsf{R8}: & (-\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathrm{S2}] & = & 200\cdot((\langle \mathsf{expr}_1 \rangle[\mathrm{S2}]) \end{array}$$

e além disso ela vai ter infinitas regras "implícitas" que só "empurram os '[S2]'s na direção das folhas".

Tente enteder esta definição informal, e mostre como calcular isto

$$(((5+z)/-8)\cdot 4^2)[\mathrm{S2}]$$

bem passo a passo usando as regras do [S2] — tanto as duas regras explícitas quanto as regras implícitas. Mostre a série de passos usando tanto a notação "algébrica" acima quanto a notação em árvore da figura do exercício 6.

Exercício 8: introdução

Lembre que nós estamos lidando com dois tipos de operações de substuição: o ‘[:=]’ e as operações definidas por regras explícitas e implícitas. No exercício 8 nós vamos tentar descobrir qual é o modo *certo* de traduzir este ‘[:=]’ aqui

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)\begin{bmatrix} f(x):=\operatorname{sen}x \\ f'(x):=\cos x \\ g(x):=42x \\ g'(x):=42 \\ x:=t \end{bmatrix}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(42t) = \cos(42t)\cdot 42\right)$$

pra uma operação de substituição do segundo tipo... só que antes de encontrar a tradução certa nós vamos testar várias traduções erradas.

Lembre que se alguém te perguntar qual é o resultado deste programa aqui

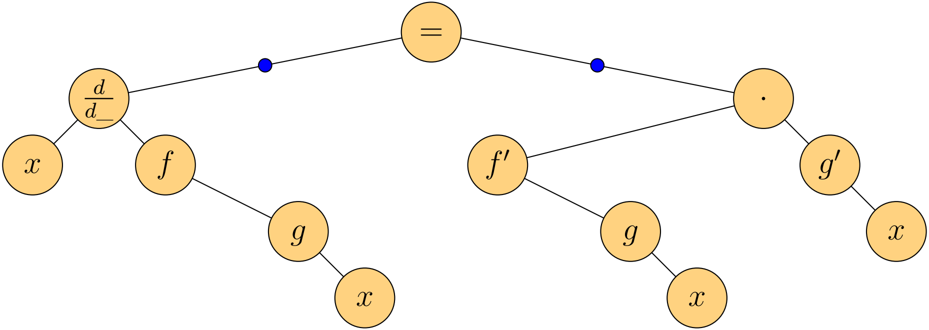
```
print("2+2=5")
```

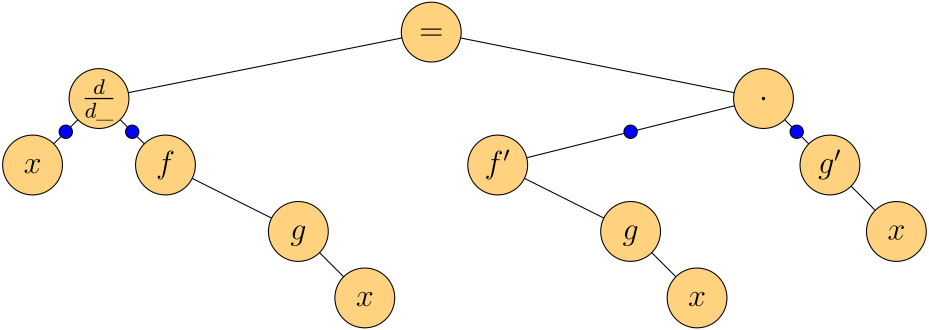
a resposta certa é

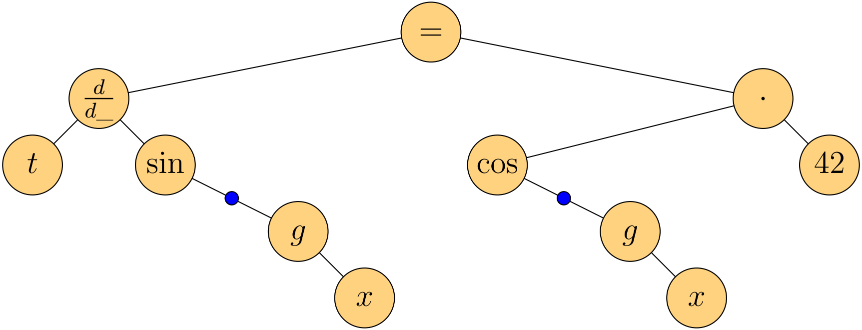
```
2+2=5
```

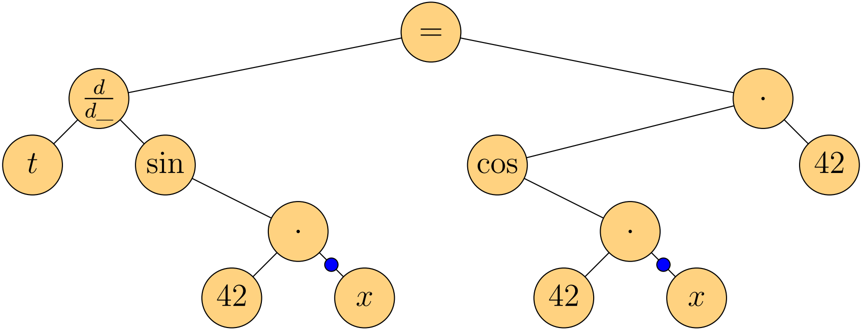
e não “esse programa tá errado”...

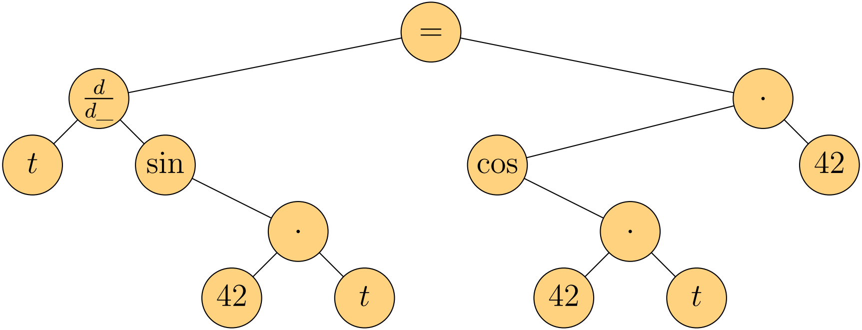
As figuras das próximas páginas mostram como a tradução certa deve funcionar.


=
$\frac{d}{d\_}$
·
x
f
f'
g'
g
g
x
x
x


=
$\frac{d}{d\_}$
x
f
g
x
$\cdot$
f'
g
x
g'
x


=
$\frac{d}{d\_}$
·
t
sin
cos
42
g
g
x
x


=
$\frac{d}{d\_}$
$\cdot$
t
sin
cos
42
$\cdot$
$\cdot$
42
x
42
x


=
d
d_
·
t
sin
cos
42
·
·
42
t
42
t

Exercício 8.

Lembre que:

$$[\mathsf{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

a) Digamos que $[\mathsf{S1}]$ só tem esta regra explícita:

$$\mathsf{R1}: \quad f(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathsf{S1}] \quad = \quad \mathrm{sen}(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)$$

calcule $[\mathsf{RC}][\mathsf{S1}]$.

b) Digamos que $[\mathsf{S2}]$ só tem estas regras explícitas:

$$\begin{array}{rrcl} \mathsf{R2}: & x[\mathsf{S2}] & = & t \\ \mathsf{R3}: & g'(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathsf{S2}] & = & \langle \mathsf{expr}_1 \rangle \end{array}$$

calcule $[\mathsf{RC}][\mathsf{S2}]$.

c) Digamos que $[\mathsf{S3}]$ só tem estas regras explícitas:

$$\begin{array}{rrcl} \mathsf{R4}: & x[\mathsf{S3}] & = & t \\ \mathsf{R5}: & f(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathsf{S3}] & = & \mathrm{sen}(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle[\mathsf{S3}]) \\ \mathsf{R6}: & f'(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle)[\mathsf{S3}] & = & \cos(\langle \mathsf{expr}_1 \rangle) \end{array}$$

calcule $[\mathsf{RC}][\mathsf{S3}]$.

Exercício 9

Na página da introdução ao exercício 8 a gente tinha essa figura aqui:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)\begin{bmatrix} f(x):=\operatorname{sen}x \\ f'(x):=\cos x \\ g(x):=42x \\ g'(x):=42 \\ x:=t \end{bmatrix}$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(42t) = \cos(42t)\cdot 42\right)$$

Neste exercício você vai ter que encontrar uma substituição "do segundo tipo" que obedeça isto:

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)[\mathsf{S99}]$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(42t) = \cos(42t)\cdot 42\right)$$

Encontre esta [S99] por chutar e testar, no seguinte sentido: pra cada um dos seus chutes dê a definição dele — por exemplo, "Seja [S20] a operação que só tem estas regras explícitas: ..." — e depois teste este seu chute, ou seja, calcule o resultado de [RC][S20].

Se o seu teste não der o resultado que você queria, que é este aqui,

$$\left(\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(42t) = \cos(42t)\cdot 42\right)$$

não apague e não jogue fora o que você fez. A "resposta" do exercício 9 deve ser uma série de chutes e testes que terminam com uma substituição que dá o resultado "certo".

Figuras novas (julho)

$$\left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)\begin{bmatrix} f(x):=\operatorname{sen}x \\ f'(x):=\cos x \\ g(x):=42x \\ g'(x):=42 \end{bmatrix} = \color{red}{?}$$

$$\underbrace{\underbrace{\frac{d}{d\underbrace{x}_{\Rightarrow x}}\underbrace{f(\underbrace{g(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42\cdot x})}_{\Rightarrow \sin(42\cdot x)}}_{\Rightarrow \frac{d}{dx}\sin(42\cdot x)} = \underbrace{\underbrace{f'(\underbrace{g(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42\cdot x})}_{\Rightarrow \cos(42\cdot x)}\cdot\underbrace{g'(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42}}_{\Rightarrow \cos(42\cdot x)\cdot 42}}_{\Rightarrow \frac{d}{dx}\sin(42\cdot x)=\cos(42\cdot x)\cdot 42}$$

$$\begin{array}{rcl}
D\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
& = & f(g(b)) - f(g(a)) \\
& = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
& = & D\int_{x=g(a)}^{x=g(b)} f'(u)\,dx
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
D\int_{x=2}^{x=3} \cos(42\cdot x)42\,dx & = & \operatorname{sen}(42\cdot x)\big|_{x=2}^{x=3} \\
& = & \operatorname{sen}(42\cdot 3) - \operatorname{sen}(42\cdot 2) \\
& = & \operatorname{sen}(u)\big|_{u=42\cdot 2}^{u=42\cdot 3} \\
& = & D\int_{x=42\cdot 2}^{x=42\cdot 3} \cos(u)\,dx
\end{array}$$

Cálculo 2 - 2022.1

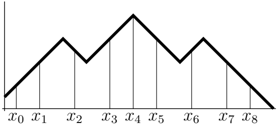
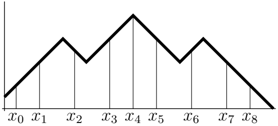
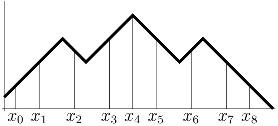
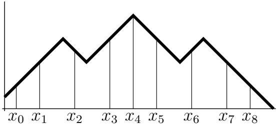
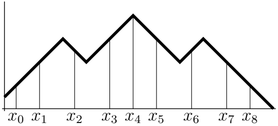
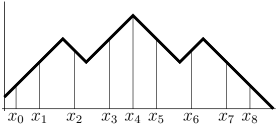
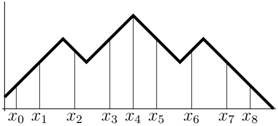
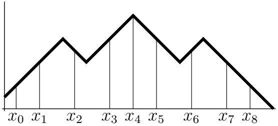
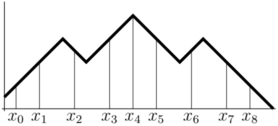
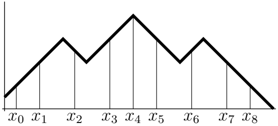
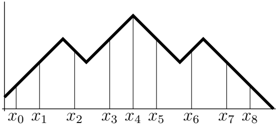
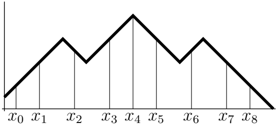
Aula 11: somas de retângulos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Links

Este PDF complementa estes três PDFs
do semestre passado:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT1.pdf


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

Exercício 1.

Seja $f(x)$ a função da página anterior —
a página anterior tem 12 cópias do gráfico dela.
Representa graficamente cada um dos somatórios abaixo.
Cada item abaixo vai virar 8 retângulos sobre
uma das cópias do gráfico da $f(x)$.

a) $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

b) $\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$

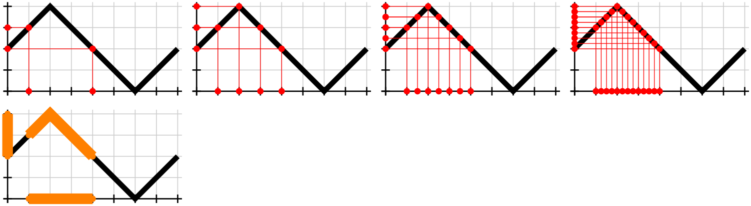
c) $\sum_{i=1}^{8} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$

d) $\sum_{i=1}^{8} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$

e) $\sum_{i=1}^{8} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$

f) $\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$

Imagens de intervalos: figuras



Imagens de intervalos: figuras → contas

Algumas pessoas acham que isto é sempre verdade:

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)].$$

Não seja como elas!!!

Nas três figuras à esquerda da página anterior temos:

$$\begin{array}{rcl}
f(\{1,4\}) & = & \{f(1), f(4)\} \\
& = & \{3,2\} \\
& = & \{2,3\} \\
f(\{1,2,3,4\}) & = & \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\
& = & \{2,3,4,3\} \\
& = & \{2,3,4\} \\
f([1,3]) & = & [2,4] \\
[f(1), f(3)] & = & [3,2] \\
& = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq y \leq 2 \,\} \\
& = & \emptyset
\end{array}$$

Exercício 2.

Seja $f(x)$ esta função:

$f(x) =$ 

Calcule estas imagens de intervalos:

a) $f([0,1])$
b) $f([1,2])$
c) $f([0,2])$
d) $f([2,3])$
e) $f([1,3])$
f) $f([0,3])$
g) $f([0,4])$
h) $f([4,8])$
i) $f([0,8])$
j) $f([1,7])$

Sup informal e inf informal

O sup informal, ‘supi’, é como uma função bugada.
O sup “de verdade” recebe um conjuntos
de números e sempre retorna um número.
O supi recebe um conjuntos de números e às vezes
retorna um número, mas às vezes ele dá erro.
Quando o supi recebe um intervalo fechado $[a, b]$ ele
retorna a extremidade superior do intervalo: $\mathsf{supi}([a, b]) = b$.
Quando o supi recebe um conjunto que
não é um intervalo fechado ele dá erro.

O inf informal, ‘infi’, é como o supi, mas ele retorna
a extremidade inferior do intervalo: $\mathsf{infi}([a, b]) = a$.

O sup e o inf de verdade são BEM difíceis de definir.
Nós vamos começar usando o supi e o infi e vamos deixar
pra definir o sup e o inf de verdade só quando
já tivermos bastante prática com o supi e o infi.

Exercício 3.
Cada um dos itens do exercício 2 pede pra você calcular uma expressão da forma $f([a,b])$. Para cada um dos itens do exercício 2 faça uma cópia do gráfico da função $f(x)$ e desenhe sobre esta cópia estes dois retângulos:

$$\begin{gathered}\mathsf{supi}(f([a,b]))(b-a),\\ \mathsf{infi}(f([a,b]))(b-a)\end{gathered}$$

Exercício 4.
Acrescente estes dois itens extras no exercício 1 e faça eles:

g) $\sum_{i=1}^{8} \mathsf{supi}(f([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1})$

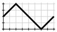
h) $\sum_{i=1}^{8} \mathsf{infi}(f([x_{i-1}, x_i]))(x_i - x_{i-1})$

Exercício 5.

Vou me referir a este PDF aqui, do semestre passado, como “Somas 1”, ou “S1”:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf

Vou usar nomes como “S1E4” pra me referir aos exercícios dele — S1E4 é o Exercício 4 do “Somas 1”.

a) Leia as páginas 9 e 10 do S1 e faça o S1E4.
b) Leia a página 11 e 12 do S1 e faça o S1E5.

Para os próximos itens leia a página 23 do S1 e considere que $f(x) =$ .

c) Seja $P = \{0, 1, 4, 5\}$. Represente num gráfico só $f(x)$ e [L].
d) Seja $P = \{0, 1, 4, 5\}$. Represente num gráfico só $f(x)$ e [R].
e) Seja $P = \{0, 1, 4, 5\}$. Represente num gráfico só $f(x)$ e [min].

Exercício 6.
Vou me referir a este outro PDF do semestre passado como “Soma 2”, ou S2:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf

Vou usar nomes como “S2E5” pra me referir aos exercícios dele — S2E5 é o Exercício 5 do “Somas 2”.

a) Leia as páginas 32 até 35 do S2 e faça o S2E13.

Obs: não faça o S2E12 da página 34 do S2 — nos próximos exercícios você vai fazer algo parecido com ele, mas com outra notação.

Métodos de integração: nomes

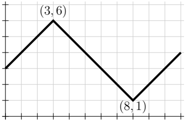
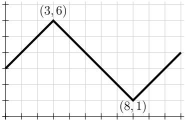
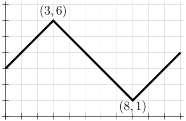
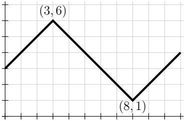
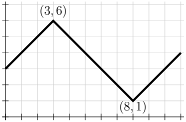
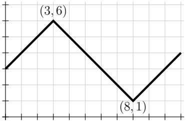
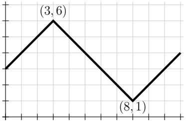
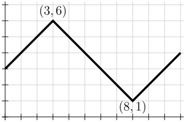
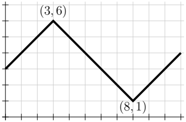
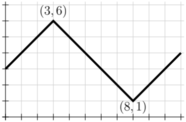
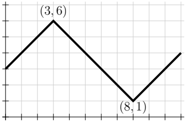
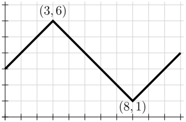
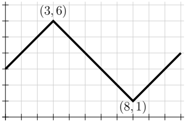
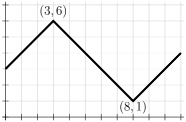
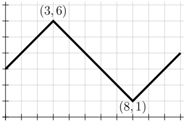
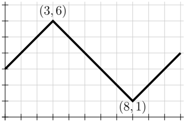
O S1 e o S2 usam estes nomes pros métodos de integração:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=23
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=32

Ainda não definimos o sup e o inf "de verdade",
então vamos usar estes nomes aqui...

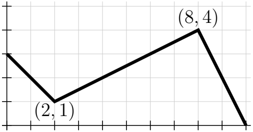
$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{infi}] & = & \sum_{i=1}^{N} \mathsf{infi}(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{supi}] & = & \sum_{i=1}^{N} \mathsf{supi}(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}
$$

Exercício 7.
Faça o S2E12 (página 34 do S2), mas substituindo os ‘sup’s por ‘supi’s e os ‘inf’s por ‘infi’s.
Use a função do enunciado do S2E12.
(Tem cópias dela na próxima página).

Link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=34`

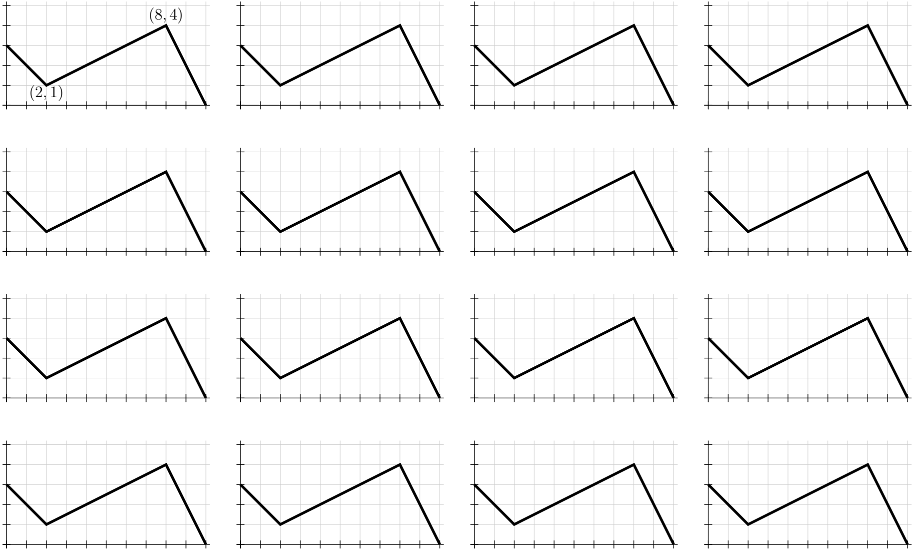

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

(3, 6)
(8, 1)

Exercício 8.
Seja:

$f(x) =$ 

Em cada um dos casos abaixo represente num gráfico só a função f e os dois somatórios pedidos.

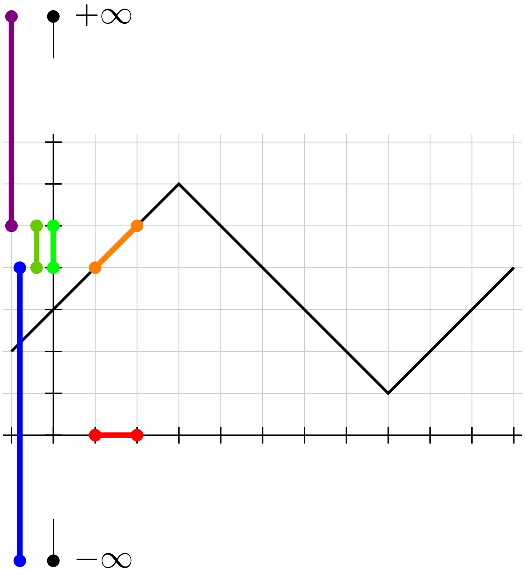
a) $[\mathrm{supi}]_{[1,9]_{2^1}}$, $[\mathrm{infi}]_{[1,9]_{2^1}}$
b) $[\mathrm{supi}]_{[1,9]_{2^2}}$, $[\mathrm{infi}]_{[1,9]_{2^2}}$
c) $[\mathrm{supi}]_{[1,9]_{2^3}}$, $[\mathrm{infi}]_{[1,9]_{2^3}}$
d) $[\max]_{[1,9]_{2^1}}$, $[\min]_{[1,9]_{2^1}}$
e) $[\max]_{[1,9]_{2^2}}$, $[\min]_{[1,9]_{2^2}}$


(8, 4)
(2, 1)

Cálculo 2 - 2022.1

Aula 15: infs e sups

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html


$+\infty$
$-\infty$

Algumas definições

Digamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $B\subset\mathbb{R}$.
Vamos definir $\inf(f(B))$ e $\sup(f(B))$
desta forma:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \\
C & = & \{\,(x,f(x))\mid x\in B\,\} \\
D & = & \{\,f(x)\mid x\in B\,\} \\
D' & = & \{\,y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in B.\ f(x)=y\,\} \\
L & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ y\le d\,\} \\
U & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ d\le y\,\} \\
(\alpha=\inf(D)) & = & \alpha\in L\wedge(\forall\ell\in L.\ \ell\le\alpha) \\
(\beta=\sup(D)) & = & \beta\in U\wedge(\forall u\in U.\ \beta\le u)
\end{array}$$

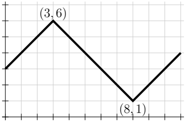
Como visualizar proposições

O que nós vamos ver agora é uma versão reorganizada das páginas 11 até 20 do "Somas 2" e de algumas idéias do "Somas 2 4", que na verdade se chama "Comentários sobre o exercício 4 do "Integrais como somas de retângulos (2)" "...

Links:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=11
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2-4.pdf

Exercício 1.

Sejam: $f(x) =$  ,

$$B = \{\underbrace{7, 8, 9}_{\text{em } x}\},\ P(\alpha) = \underbrace{\forall x \in B.\ \underbrace{\alpha \le f(\underbrace{\ x\ }_{\text{em } (x,0)})}_{\text{em } (x,f(x))}}_{\text{em } (0,\alpha)}.$$

Represente graficamente

a) $P(0)$, c) $P(4)$,

b) $P(2)$, d) $P(1.5)$.

Use uma cópia do gráfico da f pra cada uma.

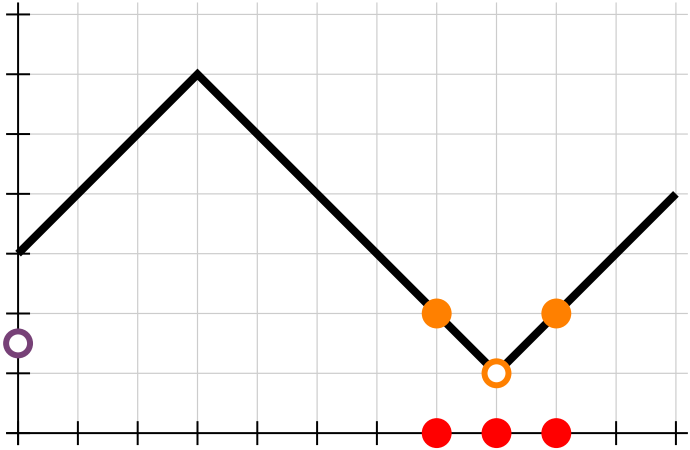
Dicas pro Exercício 1

$$\begin{array}{rcl}
B & = & \{7,8,9\} \\
P(\alpha) & = & \forall x \in B.\ \alpha \leq f(x) \\
& = & \forall x \in \{7,8,9\}.\ \alpha \leq f(x) \\
& = & (\alpha \leq f(x))[x := 7] \\
& \land & (\alpha \leq f(x))[x := 8] \\
& \land & (\alpha \leq f(x))[x := 9] \\
& = & (\alpha \leq f(7)) \land (\alpha \leq f(8)) \land (\alpha \leq f(9)) \\
& = & (\alpha \leq 2) \land (\alpha \leq 1) \land (\alpha \leq 2)
\end{array}$$

Dicas pro Exercício 1 (2)

$$
\begin{aligned}
P(\alpha) &= \underbrace{\forall x \in B.\ \underbrace{\alpha \le f(\underbrace{x}_{\text{em }(x,0)})}_{\text{em }(x,f(x))}}_{\text{em }(0,\alpha)} \\
&= \underbrace{\underbrace{(\alpha \le f(\underbrace{x}_{\text{em }(x,0)}))}_{\text{em }(x,f(x))}[x:=7] \land \underbrace{(\alpha \le f(\underbrace{x}_{\text{em }(x,0)}))}_{\text{em }(x,f(x))}[x:=8] \land \underbrace{(\alpha \le f(\underbrace{x}_{\text{em }(x,0)}))}_{\text{em }(x,f(x))}[x:=9]}_{\text{em }(0,\alpha)} \\
&= \underbrace{\underbrace{(\alpha \le f(\underbrace{7}_{\text{em }(7,0)}))}_{\text{em }(7,f(7))} \land \underbrace{(\alpha \le f(\underbrace{8}_{\text{em }(8,0)}))}_{\text{em }(8,f(8))} \land \underbrace{(\alpha \le f(\underbrace{9}_{\text{em }(9,0)}))}_{\text{em }(9,f(9))}}_{\text{em }(0,\alpha)}
\end{aligned}
$$

Dicas pro Exercício 1 (3)



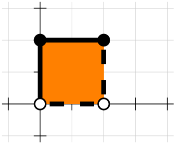
Exercício 2.

Represente graficamente os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[1,2),\ y\in[1,2)\,\} \\ B & = & \{\,(x,2x) \mid x\in[1,2)\,\} \\ C & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x \ \land\ x+y<2\,\} \end{array}$$

Dica: todos eles vão dar subconjuntos do plano feitos de infinitos pontos, e você vai ter que adaptar as convenções que usamos pra desenhar intervalos pra desenhar *regiões*.

Use bolinhas cheias pra indicar “este ponto pertence ao conjunto”, bolinhas ocas pra indicar “este ponto não pertence ao conjunto”, linhas grossas contínuas pra indicar “esse trecho da fronteira pertence ao conjunto” e linhas tracejadas pra indicar “esse trecho da fronteira não pertence ao conjunto”. Por exemplo:



Dica pro exercício 2

...ou: como debugar representações gráficas.
Pense num jogo. Os jogadores se chamam P (“proponente”), e O (“oponente”). O P quer encontrar uma representação gráfica pro conjunto A, e o O quer mostrar que o P está errado.

Digamos que

$$A = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,2),\ y \in [1,2)\,\}.$$

O P desenha uma representação gráfica com um nome diferente de A e “propõe” ela — por exemplo, o P diz isso aqui:

$A' =$ 

O oponente O diz: “verifica o ponto $(1,1)$”. Os dois verificam o ponto $(1,1)$ do A' e vêem que o desenho do A' é ambíguo no ponto $(1,1)$, já que esse é um ponto de fronteira e o P não desenhou ele nem como linha grossa sólida nem com linha tracejada... então a resposta pra pergunta “$(1,1) \in A'$?” não é nem **V** nem **F**, é “erro”, e portanto $A \neq A'$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha essa rodada, e o P tem que propôr outra representação gráfica.

Aí o P propõe uma outra representação gráfica, com um outro nome, diferente de A e de A'. Por exemplo, P propõe isso aqui:

$A'' =$ 

O oponente O diz: “verifica o ponto $(0,0)$”. Os dois verificam, e vêem que:

$$(0,0) \notin A, \qquad (0,0) \in A''$$

E portanto $A \neq A''$, e o P ainda não conseguiu a representação gráfica certa. O oponente O ganha mais essa rodada.

Quando o P propõe um desenho que o O não consegue mostrar que está errado o P ganha a rodada.

Até vocês terem prática vocês vão jogar como o P, vão me mostrar as representações gráficas de vocês, e eu vou jogar como o O. Quando vocês tiverem mais prática vocês vão conseguir chutar representações gráficas (como o jogador P) e testá-las (fazendo o papel do jogador O vocês mesmos).

Exercício 3.
Aqui as definições são as mesmas do exercício 1, mas você só vai representar o resultado de cada $P(\alpha)$ em $(0,\alpha)$... não desenhe as coisas que ficavam sobre o eixo x ou sobre o gráfico da f.

a) Represente graficamente $P(y)$ (obs: em $(0,y)$!) para $y=0,0.5,1,\ldots,4$.

b) Represente graficamente $P(y)$ para $y \in [0,4]$.

c) Represente graficamente $\{\, y \in [0,4] \mid P(y) \,\}$.

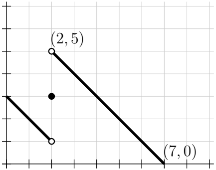
Exercício 4.
Faça o exercício 4 das páginas 18 a 20 do “Somas 2”.
Link:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=18`

Obs: esse exercício 4 do semestre passado é meio bagunçado... todos os meus colegas de graduação conheciam esse método de visualização, mas ele era algo informal, que eu nunca vi descrito por escrito em lugar nenhum...

Acho que os exercícios 1, 2 e 3 deste semestre estão bem mais claros do que o 4 do semestre passado. =/

Exercício 5.

Sejam $f(x) =$ 

e $B = [1, 3]$.

Representegraficamente estes conjuntos —
as definições deles são as mesmas do slide 3:

$$\begin{array}{rcl}
C & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\
D & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\
D' & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\
L & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d \,\} \\
U & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y \,\}
\end{array}$$

Exercício 6

Obs: se você tiver muita dificuldade com o Exercício 5 faça este exercício antes do 5... e se você conseguir fazer o Exercício 5 direto não faça este aqui.

Sejam $f(x) = x + 2$ e $B = [1, 2]$.

Represente graficamente estes conjuntos — as definições deles são as mesmas do slide 3:

$$
\begin{array}{rcl}
C & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\
D & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\
D' & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\
L & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \le d \,\} \\
U & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \le y \,\}
\end{array}
$$

Infs e sups como números

Dá pra provar que

$$\forall D \in \overline{\mathbb{R}}.\ \exists! \alpha \in \overline{\mathbb{R}}.\ (\alpha = \inf(D))$$
$$\forall D \in \overline{\mathbb{R}}.\ \exists! \beta \in \overline{\mathbb{R}}.\ (\beta = \sup(D))$$

Vamos chamar esses valores de α e β
de $\inf(D)$ e $\sup(D)$.

Exercício 6.5.
Calcule:

a) $\inf([3,4])$ b) $\sup([3,4])$
c) $\inf((3,4))$ d) $\sup((3,4))$
e) $\inf(\mathbb{R})$ f) $\sup(\mathbb{R})$
g) $\inf(\overline{\mathbb{R}})$ h) $\sup(\overline{\mathbb{R}})$
i) $\inf(\emptyset)$ j) $\sup(\emptyset)$

Aproximações por cima

Mais duas definições:
A "melhor aproximação por cima" para a integral de f na partição P é:

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = [\sup]_P,$$

O "limite das aproximações por cima" pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\sup]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por cima de f no intervalo $[a,b]$".

A notação $[a,b]_{2^k}$ está explicada aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=35

Aproximações por baixo

Mais duas definições:
A "melhor aproximação por baixo" para a integral de f na partição P é:

$$\underline{\int_P} f(x)\,dx = [\mathrm{inf}]_P,$$

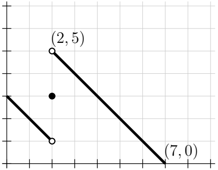
O "limite das aproximações por baixo" pra integral de f no intervalo $[a,b]$ é:

$$\underline{\int_{x=a}^{x=b}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} [\mathrm{inf}]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a "integral por baixo de f no intervalo $[a,b]$".

Exercício 7.

Seja:

$f(x) =$ 

Representante graficamente:

a) $\overline{\int}_{[1,5]_{2^0}} f(x)\,dx$ b) $\underline{\int}_{[1,5]_{2^0}} f(x)\,dx$

c) $\overline{\int}_{[1,5]_{2^1}} f(x)\,dx$ d) $\underline{\int}_{[1,5]_{2^1}} f(x)\,dx$

e) $\overline{\int}_{[1,5]_{2^2}} f(x)\,dx$ f) $\underline{\int}_{[1,5]_{2^2}} f(x)\,dx$

A definição de integral

A nossa definição de $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ vai ser:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;\overset{\Downarrow}{=}\; \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

se a igualdade marcada com '$\overset{\Downarrow}{=}$' for verdade.

Se a igualdade '$\overset{\Downarrow}{=}$' for falsa vamos dizer que:
"$f(x)$ não é integrável no intervalo $[a,b]$",
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ não está definida", ou
"$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ dá erro".

(Compare com $\frac{42}{0}$, que também "não está definido", ou "dá erro"...)

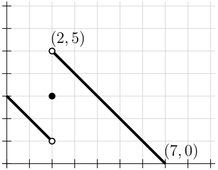
Como esses limites funcionam?
Em Cálculo 1 você viu que algumas funções não são deriváveis. Agora nós vamos ver que algumas funções não são integráveis. O melhor modo de visualizar isso é usando estas definições:

$$
\begin{aligned}
\overline{\underline{\int}}_{P} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{P} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P} f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

As notações com '$\overline{\underline{\int}}$' representam a diferença entre uma aproximação por cima e uma aproximação por baixo, e a gente vai desenhar os '$\overline{\underline{\int}}_P$'s como retângulos flutuando no ar. O '$\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b}$' é o limite de figuras tipo '$\overline{\underline{\int}}_P$', e ele pode dar algo mais complicado do que retângulos.

Exercício 8.

Seja:

$f(x) =$ 

Represente graficamente:

a) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_{2^0}} f(x)\,dx$

b) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_{2^1}} f(x)\,dx$

c) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_{2^2}} f(x)\,dx$

Cálculo 2 - 2022.1

Aula 23: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Introdução (2022.1)

Este PDF é uma versão reescrita deste aqui, de 2021.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-TFC1.pdf

Neste semestre o nosso primeiro mini-teste vai ser na última aula da semana de 22 a 24 de junho/2022, e ele vai ser parecido com o mini-teste 3 do semestre passado:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT3.pdf

Os primeiros slides deste PDF são novos e são uma preparação pra vocês conseguirem fazer o mini-teste. Depois que vocês estiverem preparados pro mini-teste a gente provavelmente vai ver o resto do material daqui mais ou menos na mesma ordem do semestre passado.

Dica: assista este vídeo do semestre passado:
http://www.youtube.com/watch?v=XvzrNtle-c0
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-C2-TFC1.mp4

Algumas propriedades da integral

Dê uma olhada na seção 7.4 do Daniel Miranda:

`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=220`

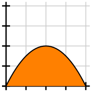
Nós queremos que estas três propriedades aqui valham sempre:

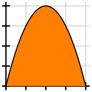
$$\begin{array}{rcll}
k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx & (*) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx & = & \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx & (**) \\
\int_{x=a}^{x=b} k\,dx & = & k(b-a) & (***)
\end{array}$$

ou seja, queremos que elas valham tanto em casos “normais” como em casos “estranhos”...

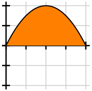
$$(*): \qquad k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx$$

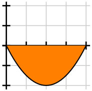
$$(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k:=2 \end{bmatrix}: \qquad 2\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2\cdot f(x)\,dx}$$





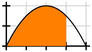
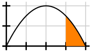
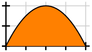
$$(*)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ k:=-1 \end{bmatrix}: \quad (-1)\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1)\cdot f(x)\,dx}$$



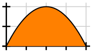
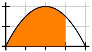


$$(**): \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx \;=\; \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$

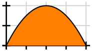
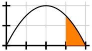
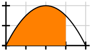
$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix}: \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{}$$

$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix}: \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x)\,dx}_{???} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{}$$

A terceira regra que queremos que valha sempre, inclusive em casos estranhos, é essa aqui:

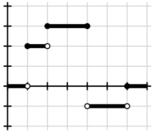
$$\int_{x=a}^{x=b} k\,dx \quad = \quad k(b-a) \quad (***)$$

Ela vai valer também quando $k < 0$, quando $b < a$, e também vamos ter

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \quad = \quad k(b-a)$$

a) quando $a \leq b$ e $f(x) = k$ em todo ponto de $[a, b]$,
b) quando $a \leq b$ e $f(x) = k$ em todo ponto de (a, b),
c) quando $a \leq b$ e $f(x) = k$ em todo ponto de $[a, b]$ *exceto num conjunto finito de pontos.*

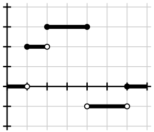
Exercício 1.

Seja $f(x) =$  .

Note que:
$\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = 2 \cdot (2-1)$,
$\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx = 3 \cdot (4-3)$,
$\int_{x=4}^{x=6} f(x)\,dx = -1 \cdot (6-4)$,

Calcule:
a) $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx$
b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$
c) $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x)\,dx$
d) $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x)\,dx$

Exercício 2.

Sejam $f(x) =$ 

e $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx$.

a) Calcule $F(2), F(2.5), F(3), \ldots, F(6)$.

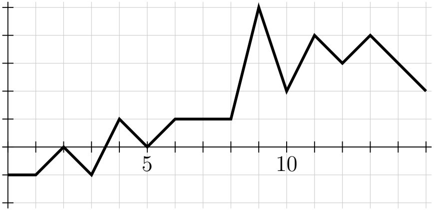
b) Calcule $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0)$.

Exercício 3.
No exercício 2 você obteve alguns valores da função $F(\beta)$, mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou $F(2.1)$.

a) Desenhe num gráfico só todos os pontos $(x, F(x))$ que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 2.
Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:
$\{(0, F(0)),\ (0.5, F(0.5)), \ldots, (6, F(6))\}$.

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assitindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

Exercício 4.
A função $G(x)$ do mini-teste 3 do semestre passado é esta aqui:

$G(x) =$ 

Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função $G'(x)$.

Dica 1: $G'(3.5) = 2$.

Dica 2: $G'(4)$ não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

Dicas pro exercício 4

Se o gráfico da $G(x)$ é um segmento de reta no intervalo $[a,b]$
então a derivada $G'(x)$ é constante no intervalo aberto (a,b),
e podemos calculá-la pelo coeficiente angular de uma reta secante...

Escolha dois pontos $x_0, x_1 \in [a,b]$ com $x_0 \neq x_1$, e aí faça isto aqui:

$$\begin{array}{rcl}
(x_0, y_0) & = & (x_0, G(x_0)) \\
(x_1, y_1) & = & (x_1, G(x_1)) \\
\Delta x & = & x_1 - x_0 \\
\Delta y & = & y_1 - y_0 \\
G'(c) & = & \frac{\Delta y}{\Delta x}
\end{array}$$

A última linha, $G'(c) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, vai ser verdade para qualquer $c \in (a,b)$.
Dê uma olhada no capítulo 2 do Daniel Miranda se precisar:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=65

E se você precisar relembrar limites laterais e derivadas
laterais, dê uma olhada das seções 1.4 e 3.2.3 do livro:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=22
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=74

Introdução (2021.2)

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;\; = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O TFC1 tem duas versões.
A versão mais simples diz o seguinte:
se a função f é contínua então para todo $t \in (a, b)$ vale:

$$F'(t) \;\; = f(t). \qquad\qquad (*)$$

A versão mais complicada do TFC1, que vamos ver depois, não supõe que a função f é contínua.

Nós vamos ver um argumento visual que mostra que a igualdade $(*)$ é verdade. Esse argumento visual é quase uma demonstração formal, num sentido que eu vou explicar depois.

Introdução (2)

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;=\; \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

Então:

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \\
&\overset{???}{=} f(t)
\end{aligned}$$

Introdução (3)
Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c\in[a,b]$.
Digamos que a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \;=\; \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O nosso argumento visual vai mostrar que:

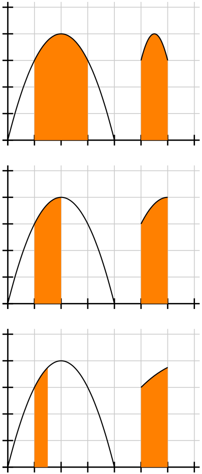
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \;=\; f(t).$$

Primeiro exemplo:
$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

Primeira figura: $\varepsilon = 2$.
Segunda figura: $\varepsilon = 1$.
Terceira figura: $\varepsilon = 1/2$.

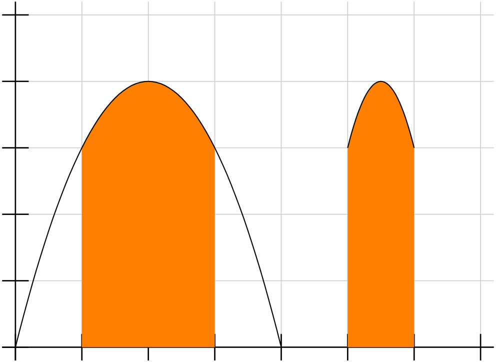
À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.

Repare que a área em laranja à esquerda sempre tem base ε e a área em laranja à direita sempre tem base $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$.



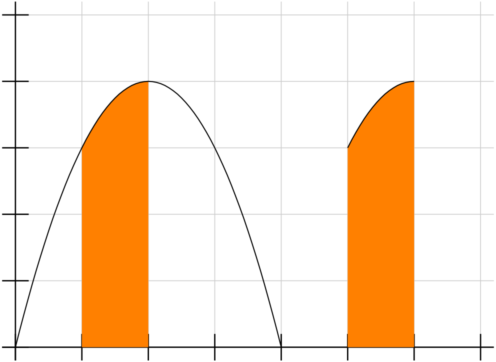
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 2\text{:}$$



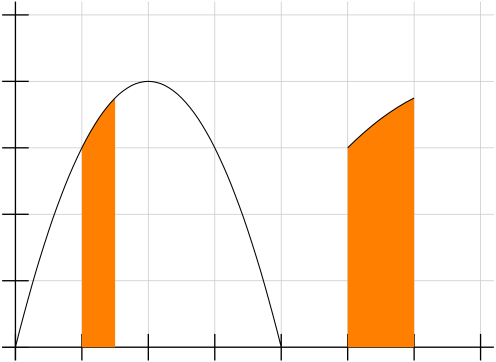
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1\text{:}$$



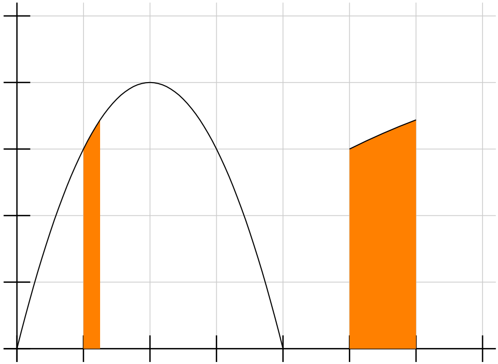
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/2\text{:}$$



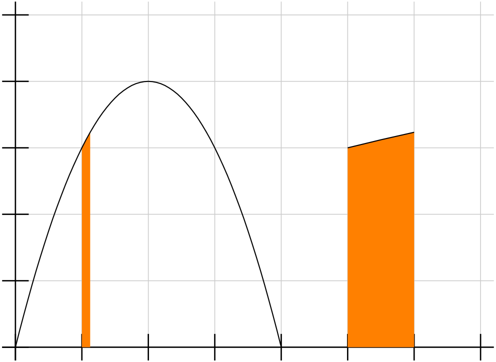
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/4\text{:}$$



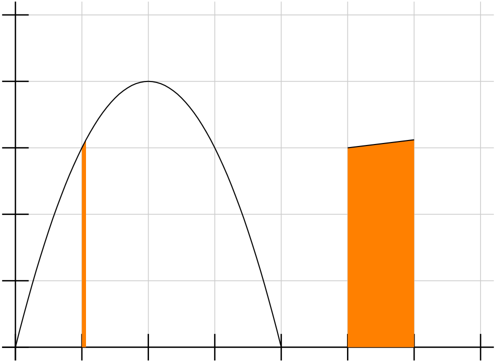
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/8\text{:}$$



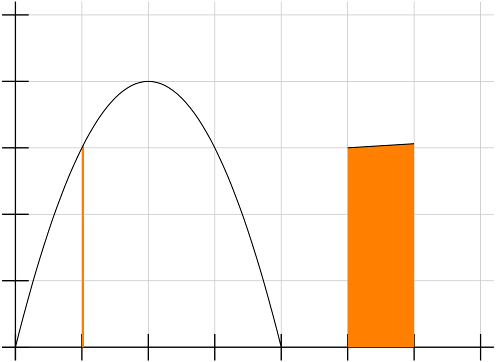
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/16\text{:}$$



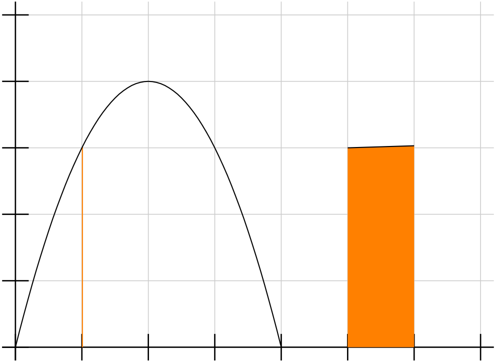
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/64\text{:}$$

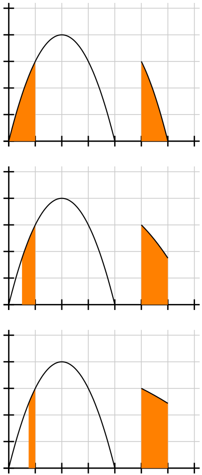


Agora com ε negativo!...

$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

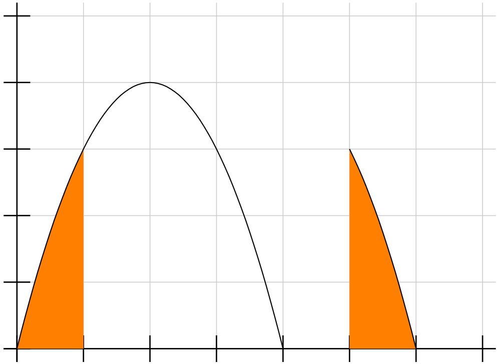
Primeira figura: $\varepsilon = -1$.
Segunda figura: $\varepsilon = -1/2$.
Terceira figura: $\varepsilon = -1/4$.

À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.



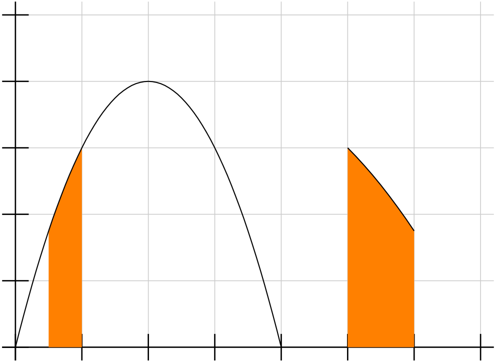
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/2\text{:}$$

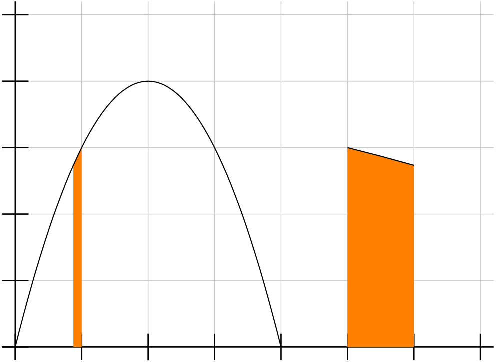


$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/4:$$

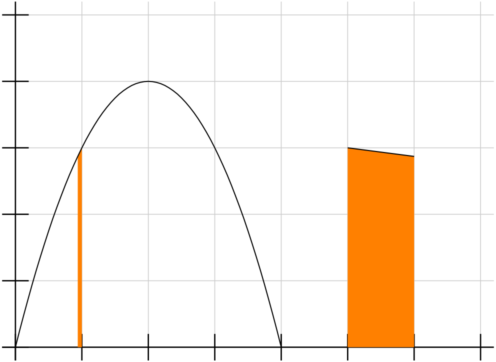
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/8:$$



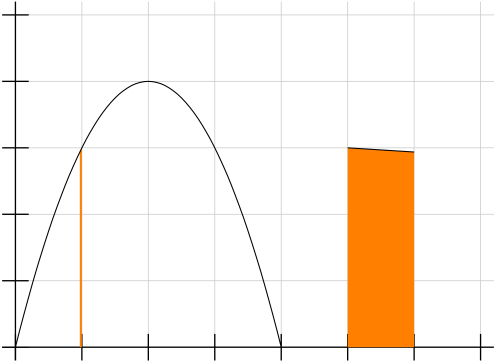
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/16:$$



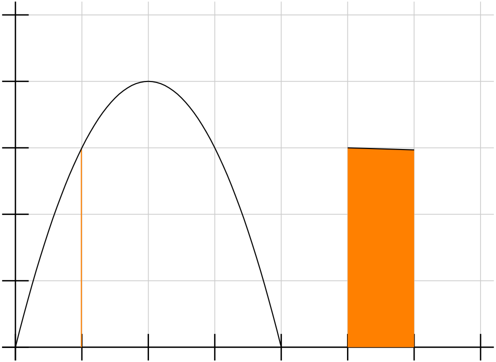
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/64\text{:}$$



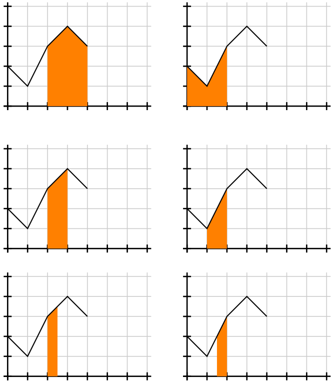
Exercício 5.

Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!



c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

Exercício 6.

Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t=2$.

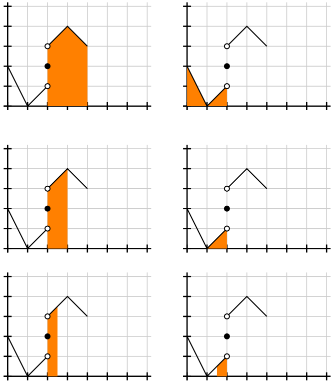
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon=2$, $\varepsilon=1$, $\varepsilon=1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon=-2$, $\varepsilon=-1$, $\varepsilon=-1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Descontinuidades

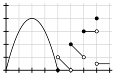
Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer.
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da f,
ou, pra abreviar, o "conjunto das descontinuidades da f", assim:

$$\mathsf{desc}(f) \quad = \quad \{\, x \in [a,b] \mid f \text{ é descontinua em } x \,\}$$

A expressão "f tem um número finito de pontos de descontinuidade",
que eu vou abreviar pra "f tem finitas descontinuidades" apesar
disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$$\mathsf{desc}(f) \ \text{ é um conjunto finito}$$

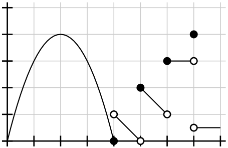
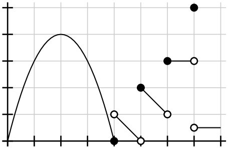
O conjunto vazio é finito, então toda f contínua "tem finitas
descontinuidades". Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui,
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=46
tem infinitas descontinuidades.

Descontinuidades (2)

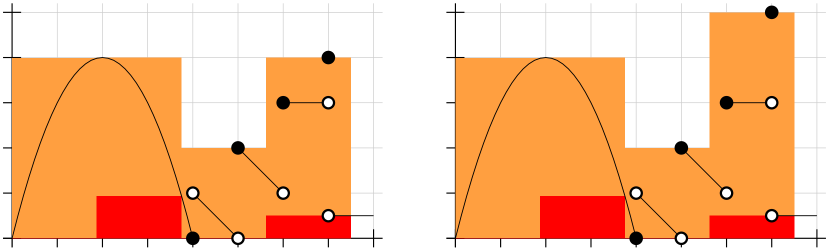
Sejam

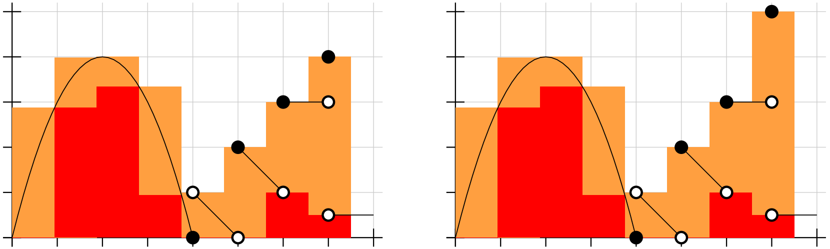
$f(x) =$  e $g(x) =$  .

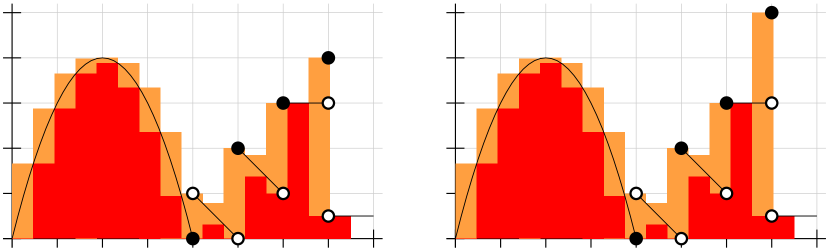
As figuras dos próximos slides mostram

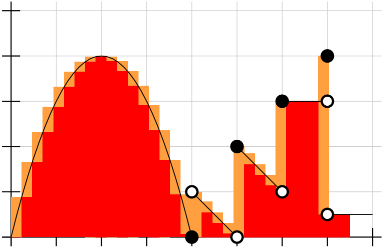
$$\overline{\underline{\int}}_{[0,7.5]_{2^k}} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \overline{\underline{\int}}_{[0,7.5]_{2^k}} g(x)\,dx$$

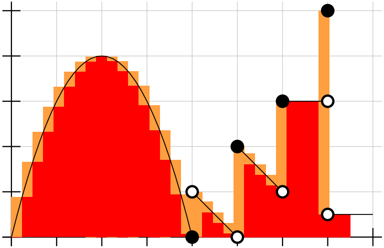
para vários valores de k. Use-as pra entender porque "na integral as descontinuidades não importam" — se só tivermos um número finito de descontinuidades.

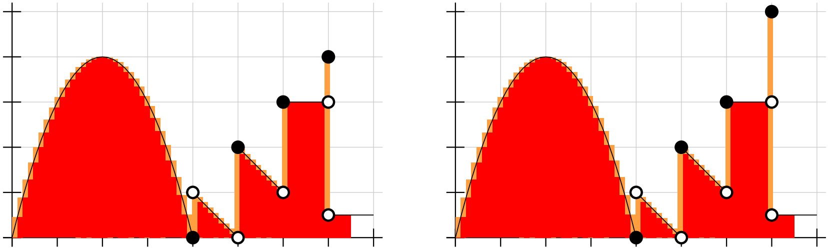


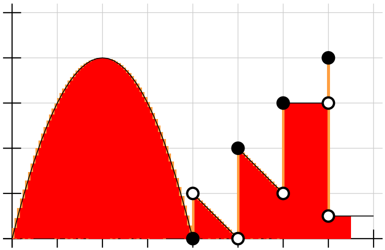


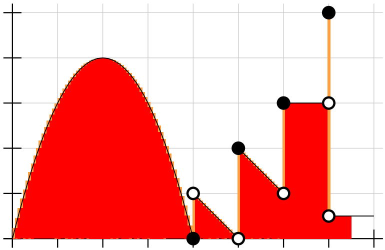












A versão complicada do TFC1

Vou dizer que uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é "boa" quando ela é integrável e tem finitas descontinuidades.

(O termo "função boa" é péssimo de propósito — é pra deixar óbvio que essa é uma definição temporária, que vai valer só durante poucos slides...)

Vou dizer que uma função $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ obedece

$$G'(x)=f(x)$$

quando G for contínua em $[a,b]$ e G obedecer isto aqui:

$$\forall x\in((a,b)\setminus\mathsf{desc}(f)).\ G'(x)=f(x)$$

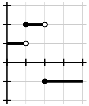
ou seja, neste caso "$G'(x)=f(x)$" é uma abreviação pra algo complicado.

A versão complicada do TFC1 (2)

Antes de prosseguir vamos fazer um exercício.

Exercício 7.

Seja:

$f(x) \quad =$ 

a) Qual é o domínio da f? (Ele está "implícito no gráfico"...)
b) Encontre uma função G que obedece $G'(x) = f(x)$ e $G(0) = 0$.
c) Encontre uma função H que obedece $H'(x) = f(x)$ e $H(0) = 1$.
d) Faça o gráfico da função $M(x) = H(x) - G(x)$.
e) Encontre uma função K que obedece $K'(x) = f(x)$ e $K(4) = -1$.

A versão complicada do TFC1 (3)

Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é "boa".
Digamos que $c\in[a,b]$ e que $G'(x)=f(x)$.
Digamos que

$$F(x) \quad = \quad \int_{t=c}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Então F e G "diferem por uma constante", como as funções G, H e K do exercício 3.
Isso é o "TFC1 na versão complicada".
Eu não vou demonstrá-lo. =(

Seja k essa constante. Temos:

$$\forall x\in[a,b].\ G(x)=F(x)+k.$$

Isso tem um monte de consequências bacanas.
Por exemplo: $F(c)=0$, $G(c)=k$, e,
se $\alpha,\beta\in[a,b]$,

$$\begin{array}{rcl}
\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt &=& \int_{t=c}^{t=\beta} f(t)\,dt - \int_{t=c}^{t=\alpha} f(t)\,dt \\
&=& F(\beta)-F(\alpha) \\
&=& (G(\beta)-k)-(G(\alpha)-k) \\
&=& G(\beta)-G(\alpha).
\end{array}$$

Isso nos dá um método pra calcular integrais da função f. Se $\alpha,\beta\in[a,b]$,

1) encontramos uma solução $G(x)$ da EDO $G'(x)=f(x)$,

2) usamos a fórmula

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta)-G(\alpha).$$

Você viu no exercício anterior que a EDO $G'(x)=f(x)$ tem infinitas soluções...
Qualquer solução serve, e não precisamos calcular a constante k.

Esse método é o TFC2.

O TFC2

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é "boa".
Digamos que $\alpha, \beta \in [a, b]$ e que $G'(x) = f(x)$.

Então:

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha).$$

TFC2: um exemplo

A nossa parábola preferida é $f(x) = 4 - (x-2)^2$,
ou seja, $f(x) = 4x - x^2$.
Digamos que $G(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.
Então $G'(x) = f(x)$, e o resultado desta
substituição aqui vai dar uma igualdade verdadeira...

$$\left(\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha) \right) \begin{bmatrix} f(x) := 4x - x^2 \\ G(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ \beta := 4 \\ \alpha := 0 \end{bmatrix}$$

TFC2: um exemplo (2)

Temos:

$$\left(\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \;=\; G(\beta)-G(\alpha)\right)\begin{bmatrix} f(x) := 4-(x-2)^2 \\ G(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ \beta := 4 \\ \alpha := 0 \end{bmatrix}$$

$$= \;\left(\int_{t=0}^{t=4} 4-(t-2)^2\,dt \;=\; \left(2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \frac{0^3}{3}\right)\right)$$

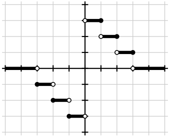
e:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{t=0}^{t=4} 4-(t-2)^2\,dt & = & \left(2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \frac{0^3}{3}\right) \\ & = & \left(32 - \frac{64}{3}\right) - 0 \\ & = & \frac{96}{3} - \frac{64}{3} \\ & = & \frac{32}{3}. \end{array}$$

Exercício 8.

Este exercício vai servir pra explicar porque é que eu não uso o "$+C$" na fórmula do TFC2 — mas isso só daqui a várias páginas.

Sejam

$f(x) \;=$  e

$$F(x) \;=\; \begin{cases} \alpha + \displaystyle\int_{t=\beta}^{t=x} f(t)\,dt & \text{quando } x < 0, \\ \gamma + \displaystyle\int_{t=\delta}^{t=x} f(t)\,dt & \text{quando } 0 < x. \end{cases}$$

Sejam $\alpha = 4$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$, $\delta = 1$.
Faça os gráficos de $F(x)$ de $F'(x)$.

Exercício 9.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ as mesmas do exercício 8, mas agora considere que $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 6$, $\delta = 2$.

Faça os gráficos de $F(x)$ e de $F'(x)$.

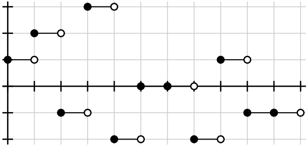
Cálculo 2 - 2022.1

Mini-teste 1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Versão para a turma E1

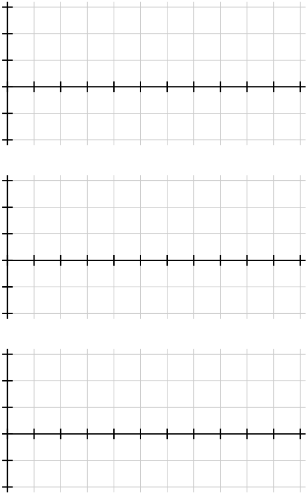
Sejam

$f(x) =$ 

e $F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt.$

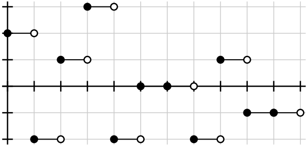
a) (0.4 pts) Faça o gráfico da função $F(x)$ num dos grids à direita.

b) (0.1 pts) Quanto valem $F'(2.5)$, $F'(3)$, $F'(3.5)$ e $F'(6)$?



Versão para a turma C1

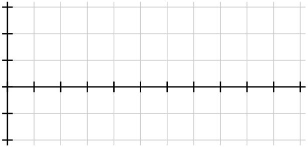
Sejam

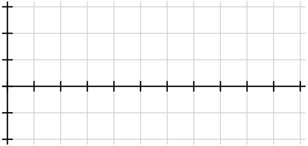
$g(x) =$ 

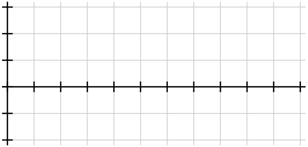
e $G(x) = \displaystyle\int_{t=3}^{t=x} g(t)\,dt.$

a) (0.4 pts) Faça o gráfico da função $G(x)$ num dos grids à direita.

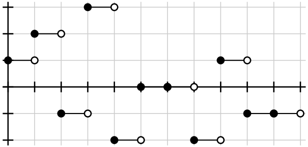
b) (0.1 pts) Quanto valem $G'(2.5)$, $G'(3)$, $G'(3.5)$ e $G'(6)$?

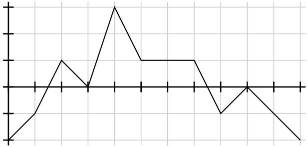


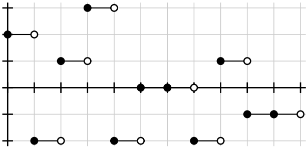


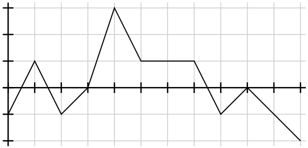


Gabarito parcial

$f(x) =$ 

$F(x) =$ 

$g(x) =$ 

$G(x) =$ 

Cálculo 2 - 2022.1

Aula 28: a derivada
da função inversa

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Introdução

No curso de Cálculo 1 você deve ter visto uma fórmula para a derivada da função inversa, e você deve ter visto que ela é sempre apresentada com certas "hipóteses"... tipo: "se as condições tais e tais são obedecidas então a derivada da função inversa é dada por esta formula aqui: [bla]" — e fica implícito que quando essas condições não são obedecidas a fórmula pode dar resultados errados. Dê uma olhada em:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=90
https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_function_rule

Nós vimos — por alto — que existe uma versão do TFC1 pra funções contínuas e uma outra, bem mais complicada, pra funções com descontinuidades... e vimos que o TFC2 também tem várias versões, e vimos que em muitas situações nós podemos fazer todas as contas que nos interessam sem dizer explicitamente quais são os domínios das nossas funções; se for necessário dizer os domínios nós podemos descobrir os domínios certos no final, depois de fazer todas as contas.

Em Cálculo 2 e Cálculo 3 é comum a gente fazer as contas primeiro e só colocar os domínios e as "condições necessárias" no final. Neste PDF eu vou fazer uma versão extrema disso: eu vou considerar que vocês só vão ser capazes de entender bem as condições necessárias quando tiverem bastante prática com as contas, então a gente vai sempre começar "chutando" que as contas funcionam e "testando" elas depois.

Nós vamos usar esta versão aqui da demonstração da fórmula da derivada da função inversa ("DFI"):

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\
\text{Então:} & \frac{d}{dx}f(g(x)) & = & \frac{d}{dx}x \\
 & & = & 1 \\
 & \frac{d}{dx}f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\
 & f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\
 & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array}$$

O modo natural de numerar cada uma das igualdades dela é este:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Se:} & f(g(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\text{Então:} & \frac{d}{dx}f(g(x)) & \overset{(2)}{=} & \frac{d}{dx}x \\
 & & \overset{(3)}{=} & 1 \\
 & \frac{d}{dx}f(g(x)) & \overset{(4)}{=} & f'(g(x))g'(x) \\
 & f'(g(x))g'(x) & \overset{(5)}{=} & 1 \\
 & g'(x) & \overset{(6)}{=} & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array}$$

Por enquanto estamos fingindo que os domínios não importam e que as nossas funções são deriváveis "onde precisar".

Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ então "f e g são inversas" quer dizer:

$$\begin{array}{rl}
 & \forall a \in A.\ g(f(a)) = a \\
\text{e} & \forall b \in B.\ f(g(b)) = b
\end{array}$$

A linha "Se: $f(g(x)) = x$" diz que a nossa única hipótese explícita é que $\forall x \in \mathrm{dom}(g). f(g(x)) = x$...

Exercício 1.

Sejam:

$$[\mathrm{DFI}] \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & \frac{d}{dx}f(g(x)) & = & \frac{d}{dx}x \\ & & = & 1 \\ & \frac{d}{dx}f(g(x)) & = & f'(g(x))g'(x) \\ & f'(g(x))g'(x) & = & 1 \\ & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{DFI}^-] \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se:} & f(g(x)) & = & x \\ \text{Então:} & g'(x) & = & \dfrac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Repare que [DFI] é a demonstração da fórmula da derivada da função inversa e [DFI$^-$] é só a fórmula da derivada da função inversa, sem a demonstração toda... e, de novo, lembre que eu vou usar uma versão muito reduzida das condições necessárias pra essa fórmula valer.

Diga os resultados das substituições abaixo.

a) $[\mathrm{DFI}] \begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \end{bmatrix} = ?$

b) $[\mathrm{DFI}^-] \begin{bmatrix} f(y) := y^2 \\ f'(y) := 2y \\ g(x) := \mathrm{sqrt}(x) \\ g'(x) := \mathrm{sqrt}'(x) \end{bmatrix} = ?$

c) $[\mathrm{DFI}^-] \begin{bmatrix} f(y) := \operatorname{sen} y \\ f'(y) := \cos y \\ g(x) := \operatorname{arcsen}(x) \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}'(x) \end{bmatrix} = ?$

d) $[\mathrm{DFI}^-] \begin{bmatrix} x := s \\ f(\theta) := \operatorname{sen} \theta \\ f'(\theta) := \cos \theta \\ g(s) := \operatorname{arcsen}(s) \\ g'(s) := \operatorname{arcsen}'(s) \end{bmatrix} = ?$

e) $[\mathrm{DFI}^-] \begin{bmatrix} x := c \\ f(\theta) := \cos \theta \\ f'(\theta) := -\operatorname{sen} \theta \\ g(c) := \cos^{-1}(c) \\ g'(c) := (\cos^{-1})'(c) \end{bmatrix} = ?$

Repare que no item (b) eu usei ‘sqrt(x)’ ao invés de ‘$\sqrt{x}$’... isso é porque não há uma notação boa pra derivada da raiz quadrada.

Exercício 1: respostas

...ainda não digitei! Mas veja este PDF:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-dicas-pra-P1.pdf

Uma demonstração complicada

$$
\begin{array}{rcl}
\exp(\ln(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\ln' x & \overset{(2)}{=} & 1/\exp'(\ln(x)) \\
 & \overset{(3)}{=} & 1/\exp(\ln(x)) \\
 & \overset{(4)}{=} & 1/x \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(5)}{=} & f'(g(x))g'(x) \\
\frac{d}{dx} \ln(-x) & \overset{(6)}{=} & \ln'(-x) \cdot -1 \\
 & \overset{(7)}{=} & 1/(-x) \cdot -1 \\
 & \overset{(8)}{=} & 1/x \\
\ln|x| & \overset{(9)}{=} & \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
\frac{d}{dx} \ln|x| & \overset{(10)}{=} & \frac{d}{dx} \begin{cases} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(11)}{=} & \begin{cases} \frac{d}{dx} \ln x & \text{quando } 0 < x, \\ \frac{d}{dx} \ln -x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(12)}{=} & \begin{cases} 1/x & \text{quando } 0 < x, \\ 1/x & \text{quando } x < 0 \end{cases} \\
 & \overset{(13)}{=} & 1/x \\
1/x & \overset{(14)}{=} & \frac{d}{dx} \ln|x| \\
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x}\, dx & \overset{(15)}{=} & \big(\ln|x|\big)\Big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}
$$

Outro jogo

No final de maio nós usamos um jogo pra debugar representações gráficas... esse aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=10

Agora nós vamos fazer algo parecido pra debugar *demonstrações*. Nesse jogo novo os objetivos do jogador O vão ser 1) garantir que o jogador P sabe justificar cada passo da demonstração que ele propôs, e 2) ajudar o jogador P a decobrir erros, 3) ajudar o jogador P a descobrir passos da demonstração que são saltos "grandes demais", e que ficariam mais claros se fosses reescritos como vários sub-passos.

Falta digitar isso aqui!

Os exemplos de jogadas que eu pus no quadro em 30/jun/2022 foram estes:

O: Porque $\overset{(2)}{=}$?
P: Pela [DFI].
O: Qual caso particular da [DFI]?
P: (Aqui o jogador P responde mostrando uma substituição em detalhes: o resultado do exercício 1a)
O: Porque $\overset{(4)}{=}$?
P: Por $\exp(\ln(x)) = x$ — portanto $1/\exp(\ln(x)) = 1/x$.

Exercício 2.

a) Justifique a igualdade $\overset{(5)}{=}$.
Obs: aqui você pode responder com o nome de uma fórmula bem conhecida. Alguém que não lembre essa fórmula bem pode pesquisar ela pelo nome e encontrar várias explicações grandes sobre ela, *usando várias notações diferentes*, em livros e na internet.

b) Justifique $\overset{(6)}{=}$.

c) Justifique $\overset{(7)}{=}$.

d) Justifique $\overset{(12)}{=}$.

e) Justifique $\overset{(15)}{=}$.
Dicas: 1) a igualdade $\overset{(15)}{=}$ é consequência da igualdade $\overset{(14)}{=}$; 2) aqui você vai ter que usar o TFC2! Encontre um enunciado do TFC2 em algum lugar e mostre qual é a substituição que você tem que usar pra obter $\overset{(15)}{=}$ a partir de $\overset{(14)}{=}$.

O item (f) abaixo é bem mais difícil —
mas os livros fazem passos desse tipo a beça... =(

f) A igualdade $\overset{(11)}{=}$ é consequência de uma "regra misteriosa", [RM], que é "óbvia". Digamos que:

$$[\text{RM}] \quad = \quad \left(\frac{d}{dx} \begin{cases} f(x) & \text{quando } P(x) \\ g(x) & \text{quando } Q(x) \end{cases} = ? \right)$$

Descubra qual é o '?' certo e descubra qual é a substituição [RM] [??] =??? que justifica $\overset{(11)}{=}$.

$$\begin{array}{llcl}
\text{Se:} & f(g(x)) & \overset{(1)}{=} & x \\
\text{Então:} & \frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(2)}{=} & \frac{d}{dx} x \\
& & \overset{(3)}{=} & 1 \\
& \frac{d}{dx} f(g(x)) & \overset{(4)}{=} & f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
& f'(g(x)) \cdot g'(x) & \overset{(5)}{=} & 1 \\
& g'(x) & \overset{(6)}{=} & \dfrac{1}{f'(g(x))}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Se:} & e^{g(x)} & \overset{(1)}{=} & x \\
\text{Então:} & \frac{d}{dx} e^{g(x)} & \overset{(2)}{=} & \frac{d}{dx} x \\
& & \overset{(3)}{=} & 1 \\
& \frac{d}{dx} e^{g(x)} & \overset{(4)}{=} & f'(\ln(x)) \cdot g'(x) \\
& f'(\ln(x)) \cdot g'(x) & \overset{(5)}{=} & 1 \\
& g'(x) & \overset{(6)}{=} & \dfrac{1}{f'(\ln(x))}
\end{array}
$$

Cálculo 2 - 2022.1

Aula 29: algumas técnicas de integração

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Aviso: estou reorganizando este PDF e
reescrevendo muita coisa do semestre passado!
Ele ainda está uma bagunça!

No mini-teste 3 - link:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT3.pdf#page=4`

vocês viram que quando a função G "é uma integral da f"
nós podemos fazer contas como esta aqui:

$$\int_{x=2}^{x=5} f(x)\,dx \quad = \quad G(5) - G(2)$$

Isto é um caso particular do TFC2,
que tem várias versões diferentes...
a fórmula dele é essa aqui:

$$\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$$

Historinha (pros meus amigos lógicos)

Nas últimas aulas nós vimos um pouquinho sobre: 1) como fazer só as "contas" de uma demonstração, deixando pra completar as "hipóteses" depois, e 2) como fazer demonstrações em que cada passo seja "fácil de justificar"...
Isso tem a ver com um dos meus assuntos de pesquisa e com uma tentativa de lidar com uma coisa que toda vez que acontece me deixa com muito ódio durante anos. Vou tentar explicar.

Hoje em dia existe uma noção *que todo mundo aceita* (!!!) do que é uma demonstração "completa": é uma demonstração *formalizada num proof assistant*. Esse artigo aqui explica isso bem:

`https://arxiv.org/pdf/2112.11598.pdf`

Eu aprendi um pouquinho de dois proof assistants importantes: o Lean, que o artigo acima descreve, e o Agda. "Um pouquinho" quer dizer que eu segui metade de cada um desses tutoriais daqui:

`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural_number_game/`
`https://plfa.github.io/`

Eu conheco a base teórica por trás dos proof assistants — "Dependent Type Theory" — razoavelmente bem, mas os proof assistants em si eu conheço mal.

Praticamente todas as operações, regras e táticas que aparecem nos dois tutoriais acima são consequência do '[:=]'.

Os módulos do mathlib do Lean pra demonstrações de contas com derivadas são bem difíceis de entender:
`https://leanprover-community.github.io/mathlib_docs/analysis/calculus/deriv.html`
e os módulos pra contas com integrais são mais difíceis ainda. Eu acho que isso é porque eles exigem que o usuário faça as "contas" com todas as "hipóteses" especificadas corretamente...

O meu assunto principal de pesquisa é como formalizar demonstrações — por enquanto só numa área chamada Teoria de Categorias, que não tem quase nada a ver com Cálculo — em duas etapas, como se a gente fizesse as "contas" primeiro e só acrescentasse as "hipóteses" depois. Tem dois artigos meus que explicam isso de jeitos bastante legíveis:

`http://angg.twu.net/math-b.html#2022-md`
`http://angg.twu.net/math-b.html#idarct`

Acho — sendo otimista, óbvio — que daqui a uns anos eu vou conseguir adaptar essas idéias pra formalizar a matéria de Cálculo 2 em Lean. E quando eu conseguir fazer isso eu vou conseguir lidar bem melhor com uma das coisas que me dá mais ódio no meu trabalho como professor, que são aqueles alunos que escrevem os maiores absurdos numa prova e depois ficam insistindo AOS BERROS que tá tudo certo na prova deles e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles... aí eu vou poder responder "*se a sua resposta tá certa traz ela formalizada em Lean*".

A operação "diferença"

Defs:

$$\begin{array}{rcl} f(x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & f(b)-f(a) \\ \mathsf{expr}\big|_{x=a}^{x=b} & = & (\mathsf{expr})[x:=b]-(\mathsf{expr})[x:=a] \\ [\text{DefDif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \;=\; F(b)-F(a)\right) \end{array}$$

Os livros costumam usar a primeira definição acima.

Exercício 1.

Expanda e simplifique o máximo possível:

a) $x^2\big|_{x=4}^{x=5}$

b) $x^2\big|_{x=5}^{x=4}$

c) $2\big|_{x=4}^{x=5}$

d) $t^2\big|_{t=4}^{t=5}$

e) $x^2\big|_{t=4}^{t=5}$

f) $(x^3-x^2)\big|_{x=2}^{x=10}$

g) $x^3\big|_{x=2}^{x=10}-x^2\big|_{x=2}^{x=10}$

h) $x^3-(x^2\big|_{x=2}^{x=10})$

Exercício 2.

Lembre que:

$$[\text{TFC2}] \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

a) Calcule o resultado desta substituição:

$$[\text{TFC2}] \begin{bmatrix} F(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ F'(x) := 4x - x^2 \\ a := 0 \\ b := 4 \end{bmatrix} = ?$$

b) Use o resultado do item (a) pra calcular $\int_{x=0}^{x=4} 4 - (x-2)^2\,dx$. Dica: o resultado final vai ser $32/3$.

Vamos chamar o método do slide anterior de "integração por TFC2 e chutar-e-testar"...
Obs: no exercício eu chutei a $F(x)$ certa.

Exercício 3.
Integre por TFC2 e chutar-e-testar:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos x \, dx = ?$

b) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$

c) $\displaystyle\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = ?$

d) $\displaystyle\int_{x=5}^{x=6} \operatorname{sen}(2x+3) \, dx = ?$

Fórmulas pra mudança de variáveis (2022.1)

$$[\mathrm{MV}_1] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MV}_2] = \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\mathrm{MV}_3] = \left(\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right) \qquad [\mathrm{MV}_4] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MVI}_3] = \left(\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:}} \\ F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \\ \multicolumn{3}{l}{\text{Obs: } u = g(x)} \end{array} \right) \qquad [\mathrm{MVI}_4] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array} \right)$$

Uma demonstração do [MV$_1$]

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{DefDif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \;=\; F(b) - F(a) \right) \\
[\text{TFC2}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{DefDif}] \left[\, {\scriptstyle F(x):=f(g(x))} \, \right] & = & \left(f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \;=\; f(g(b)) - f(g(a)) \right) \\
[\text{DefDif}] \left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ F(u):=f(u) \\ a:=g(a) \\ b:=g(b) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \;=\; f(g(b)) - f(g(a)) \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{TFC2}] \left[\begin{smallmatrix} F(x):=f(g(x)) \\ F'(x):=f'(g(x))g'(x) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{TFC2}] \left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ b:=g(b) \\ a:=g(a) \\ F(u):=f(u) \\ F'(u):=f'(u) \end{smallmatrix} \right] & = & \left(\displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \;=\; f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
& = & f(g(b)) - f(g(a)) \\
& = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
& = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{array}
$$

Um exemplo de mudança de variável

$$[\mathrm{EMV1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &=& f(g(x))|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(g(b)) - f(g(a)) \\ &=& f(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &=& \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{EMV2}] \quad = \quad [\mathrm{EMV1}] \begin{bmatrix} g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(2x)\cdot 2\,dx &=& f(2x)|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(2b) - f(2a) \\ &=& f(u)|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{EMV3}] \quad = \quad [\mathrm{EMV2}] \begin{bmatrix} f(x) := -\cos x \\ f'(x) := \mathrm{sen}\, x \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \mathrm{sen}(2x)\cdot 2\,dx &=& (-\cos(2x))|_{x=a}^{x=b} \\ &=& (-\cos(2b)) - (-\cos(2a)) \\ &=& (-\cos(u))|_{u=2a}^{u=2b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \mathrm{sen}(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{EMV4}] \quad = \quad \left(\int_{u=2a}^{u=2b} \mathrm{sen}(u)\,du \quad = \quad \int_{x=a}^{x=b} \mathrm{sen}(2x)\cdot 2\ dx \right)$$

$$[\mathrm{EMV5}] \quad = \quad \left(\int_{u=a}^{u=b} \mathrm{sen}(u)\,du \quad = \quad \int_{x=a/2}^{x=b/2} 2\,\mathrm{sen}(2x)\,dx \right)$$

Outro exemplo de mudança de variável

Aqui a gente não substitui a f, só a f'...
Digamos que $f(x) = \int_{t=c}^{t=x} \tan t\, dt$,
e portanto $f'(x) = \tan x$.

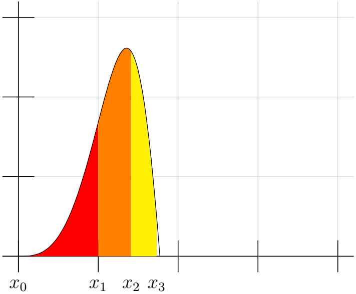
$$[\text{OEMV3}] = [\text{EMV2}]\left[f'(x) := \tan x\right] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x)\cdot 2\, dx & = & (f(2x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & (f(2b)) - (f(2a)) \\ & = & (f(u))\big|_{u=2a}^{u=2b} \\ & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\, du \end{array} \right)$$

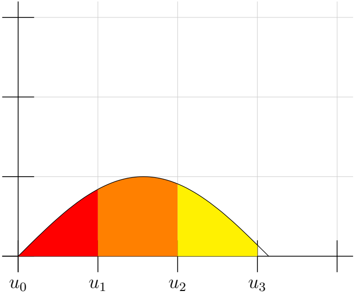
$$[\text{OEMV4}] = \left(\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\, du = \int_{x=a}^{x=b} \tan(2x)\cdot 2\ dx \right)$$

$$[\text{OEMV5}] = \left(\int_{u=a}^{u=b} \tan(u)\, du = \int_{x=a/2}^{x=b/2} 2\tan(2x)\, dx \right)$$

Uma figura pra mudança de variável

$$\begin{aligned} x^2 &= u \\ \int_{x=a}^{x=b} \operatorname{sen}(x^2) \cdot 2x\,dx &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \operatorname{sen} u\,du \end{aligned}$$





Links

Aqui tem links pra como alguns livros apresentam o método da mudança de variáveis...

http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf
http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf
http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_5.5_e_5.6.pdf
http://angg.twu.net/2022.1-C2/ross__elementary_analysis_secs_10_32_33_34.pdf#page=42

De todos esses o único que eu acho realmente honesto é o Ross.

Em todos os outros a variável nova é tratada à vezes como uma variável independente, às vezes como uma variável dependente, e às vezes como uma abreviação...
Eu levei mais de 10 anos pra entender como essa gambiarra funcionava. Vocês vão ver um pouco sobre o meu modo atual de entender ela em Cálculo 3, nesta parte do curso:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf#page=9

Um exemplo com contas

Isto aqui é um exemplo de como contas com integração por substituição costumam ser feitas na prática:

$$
\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
=\;& \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
=\;& \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
=\;& \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
=\;& \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}
$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta: $u = 3x + 4$.

Dê uma olhada nos exemplos do livro do Miranda:
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=190`

Um exemplo com contas (cont.)

Compare:

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} 2\cos(3x+4)\,dx \\ \displaystyle = \int_{u=3a+4}^{u=3b+4} 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\ \displaystyle = \frac{2}{3}\int_{u=3a+4}^{u=3b+4} \cos u\,du \\ \displaystyle = \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen} u)\big|_{u=3a+4}^{u=3b+4}\right) \\ \displaystyle = \frac{2}{3}\left((\operatorname{sen}(3x+4))\big|_{x=a}^{x=b}\right) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \displaystyle\int 2\cos(3x+4)\,dx \\ \displaystyle = \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\ \displaystyle = \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\ \displaystyle = \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\ \displaystyle = \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4) \end{pmatrix}$$

Nós vamos tratar a versão da direita como uma abreviação da versão da esquerda — pra ir da esquerda pra direita a gente apaga os limites de integração, o que é bem fácil... pra ir da direita pra esquerda a gente precisa reconstruir os limites de integração, o que é mais difícil.

Outro exemplo com contas

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
=\ & \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
=\ & \int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
=\ & \int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
=\ & \int s^5 - s^7 \, ds \\
=\ & \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
=\ & \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{array}\right]$$

Substituição na integral definida

Eu vou chamar a demonstração abaixo de [S2].
Ela é uma série de três igualdades: o '=' de cima,
o '=' de baixo, e o '=' da esquerda (que é um '||').
Eu vou chamar o "$F'(u) = f(u)$" de a hipótese do [S2].
Obs: nós ainda não acreditamos nessa demonstração...
vamos verificar as igualdades dela daqui a alguns slides.

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l}
\text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\
\begin{array}{ccc}
F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\
\| & & \\
F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du
\end{array}
\end{array} \right)
$$

Lembre que dá pra substituir só alguns símbolos...
Por exemplo:

$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)
$$

$$
[\mathsf{S2}][g(x) := 2x] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle \int_{x=a}^{x=b} f(2x)\cdot 2\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=2a}^{u=2b} & = & \displaystyle \int_{u=2a}^{u=2b} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)
$$

Também podemos substituir o f por F'...
E aí a hipótese passa a ser "trivialmente verdadeira":

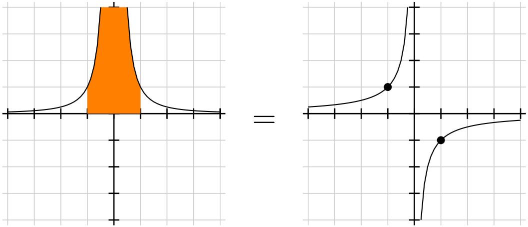
$$
[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)
$$

$$
[\mathsf{S2}][f(u) := F'(u)] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = F'(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} F'(u)\,du \end{array} \end{array} \right)
$$

Um caso em que o TFC2 dá um resultado errado

Se $F(x) = -x^{-1}$
então $F'(x) = x^{-2}$, e:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=-1}^{x=1} F'(x)\,dx & = & F(x)\big|_{x=-1}^{x=1} \\
\int_{x=-1}^{x=1} x^{-2}\,dx & = & (-x^{-1})\big|_{x=-1}^{x=1} \\
 & = & (-1^{-1}) - (-(-1)^{-1}) \\
 & = & -2
\end{array}$$



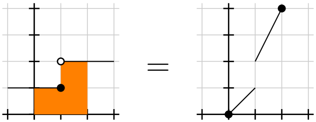
$=($

Outro caso em que o TFC2 dá um resultado errado

Isso aqui foi uma questão de prova que metade da turma errou... =(Links:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=3
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=8
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=50

$$\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=0}^{x=2}$$



$$3 \quad = \quad 4 - 0$$

Neste semestre eu vou tentar
explicar o TFC2 e as consequências dele —
tipo: TODAS as técnicas de integração são
consequência do TFC2 — com uma abordagem
diferente da do semestre passado.

Dê uma olhada nestes slides do semestre passado:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-os-dois-TFCs.pdf`
Leia as páginas 2 até 4 dele,
a definição no fim da página 7,
e as páginas 10 até 12.

Exercício 1.
Faça os exercícios 1, 2 e 3 do PDF acima —
mas ao invés de fazer o 2 como eu pedi no semestre
passado faça esta versão modificada dele:

$$[\text{TFC2}]\begin{pmatrix} F(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ F'(x) := 4x - x^2 \\ b := 4 \\ a := 0 \end{pmatrix} \quad = \quad ?$$

Exercício 2.
Assista este vídeo,
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-C2-int-subst.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=YbVfNi-xGNw`
e depois tente entender cada uma
das igualdades do slide 7.

Dica: os '='s do slide 7 têm montes
de significados diferentes dependendo
do contexto. Tente fazer uma lista de
significados e pronúncias.

Obs: os próximos 3 slides não são
autocontidos – você vai precisar
assistir o vídeo pra entendê-los.

A fórmula da derivada da função inversa

$$[\text{DFI1}] = \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) &=& x \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) &=& \frac{d}{dx} x \quad = \quad 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) &=& f'(g(x)) g'(x) \\ f'(g(x)) g'(x) &=& 1 \\ g'(x) &=& \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

$$[\text{DFI2}] = \left(\begin{array}{rcl} f(g(x)) &=& x \\ g'(x) &=& \frac{1}{f'(g(x))} \end{array} \right)$$

Exercício 3.

a) $[\text{DFI1}] \begin{bmatrix} f(y) := e^y \\ f'(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \end{bmatrix} =' $

Exercício 3 (cont.)

b) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := y^2 \\ f'(y) := 2y \\ g(x) := \text{sqrt}(x) \\ g'(x) := \text{sqrt}'(x) \end{bmatrix} =' $

c) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} f(y) := \operatorname{sen} y \\ f'(y) := \cos y \\ g(x) := \operatorname{arcsen}(x) \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}'(x) \end{bmatrix} =' $

d) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} x := s \\ f(\theta) := \operatorname{sen} \theta \\ f'(\theta) := \cos \theta \\ g(s) := \operatorname{arcsen}(s) \\ g'(s) := \operatorname{arcsen}'(s) \end{bmatrix} =' $

e) $[\text{DFI2}] \begin{bmatrix} x := c \\ f(\theta) := \cos \theta \\ f'(\theta) := -\operatorname{sen} \theta \\ g(c) := \cos^{-1}(c) \\ g'(c) := (\cos^{-1})'(c) \end{bmatrix} =' $

Mais algumas fórmulas que não valem sempre

$$(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)^2 &= 1 - (\cos x)^2 \\
\sqrt{(\operatorname{sen} x)^2} &= \sqrt{1 - (\cos x)^2} \\
\operatorname{sen} x &= \sqrt{1 - (\cos x)^2} \\
(\cos x)^2 &= 1 - (\operatorname{sen} x)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\cos x)^2} &= \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2} \\
\cos x &= \sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}
\end{aligned}$$

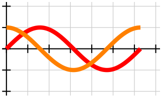
Exercício 4.

a) Escolha um número entre 42 e 99.
(Se você não conseguir converse com seus colegas!!!)

b) Escolha um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}\alpha < 0$
e verifique se $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - (\cos\alpha)^2}$.
Dica: escolha um α para o qual você sabe $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

c) Escolha um $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\beta < 0$
e verifique se $\cos\beta = \sqrt{1 - (\cos\beta)^2}$.

d) Faça uma cópia do gráfico abaixo num papel



e desenhe sobre ela os conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{\,\theta \in [0, 2\pi] \mid \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - (\cos\theta)^2}\,\}, \\ B & = & \{\,\theta \in [0, 2\pi] \mid \cos\theta = \sqrt{1 - (\operatorname{sen}\theta)^2}\,\}. \end{array}$$

Juntando fórmulas estranhas

$$
\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \\
e^{\ln x} & = & x \\
\ln' x & = & \frac{1}{e^{\ln x}} \\
 & = & \frac{1}{x} \\
\int_{x=a}^{x=b} \ln' x \, dx & = & \ln x \big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{x} \, dx & = & \ln x \big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}
$$

Juntando fórmulas estranhas

$$
\begin{array}{rcl}
f(g(x)) & = & x \\
g'(x) & = & \frac{1}{f'(g(x))} \\
\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) & = & x \\
\operatorname{arcsen}' x & = & \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} \\
 & = & \frac{1}{\sqrt{(\cos(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
 & = & \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x))^2}} \\
 & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\int_{x=a}^{x=b} \operatorname{arcsen}' x \, dx & = & \operatorname{arcsen} x \big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx & = & \operatorname{arcsen} x \big|_{x=a}^{x=b}
\end{array}
$$

Exercício 1.
Lembre que:

$$[\mathsf{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx} F(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Calcule os resultados destas expansões:
a) $[\mathsf{TFC2}] \left[F(x) := F(g(x)) \right]$
b) $[\mathsf{TFC2}] \left[x := u \right] \begin{bmatrix} a := g(a) \\ b := g(b) \end{bmatrix}$

...e verifique que se $f(u) = F'(u)$ então:
c) o que você obteve no (a) prova o '$=$' de cima da $[\mathsf{S2}]$,
d) o que você obteve no (b) prova o '$=$' de baixo da $[\mathsf{S2}]$,

O '$\|$' à esquerda na [S2]
é bem fácil de verificar... ó:

$$\begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & F(g(b)) - F(g(a)) \\ & = & F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \end{array}$$

Se você conseguiu fazer todos os itens
do exercício 1 e conseguiu entender isso aí
então agora você entende o [S2] como uma
demonstração — você entende todas as
igualdades dele.

Pra que serve a hipótese do [S2]?
Ela serve pra gente lidar com 'f's que a gente não sabe integrar! Por exemplo:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}] \begin{bmatrix} f(x) := \tan x \\ g(u) := 2u \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \color{red}{\text{Se } F'(u) = \tan u \text{ então:}} \\ \begin{array}{ccc} F(2x)\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \tan(2x)\cdot 2\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

Uma versão do [S2] para integrais indefinidas

Compare... e repare no "Obs: $u = g(x)$".

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

Versões sem a parte da esquerda

Compare:

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S3}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

Versões sem a parte da esquerda (2)

...e compare:

$$
[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)
$$

$$
[\mathsf{S3I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)
$$

As pessoas costumam usar variações da [S3I], geralmente sem darem um nome pra função $g(u)$... Lembre que em vários exercícios que nós já fizemos ficava implícito que vocês tinhan que descobrir qual era a substituição certa... por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
x^2\big|_{x=4}^{x=5} & = & ? \\
\left(f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ a := ? \\ b := ? \end{bmatrix} & = & ? \\
\left(f(x)\big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2 \\ a := 4 \\ b := 5 \end{bmatrix} & = & \left(x^2\big|_{x=4}^{x=5} = 5^2 - 4^2 \right) \\
x^2\big|_{x=4}^{x=5} & = & 5^2 - 4^2
\end{array}$$

Exercício 2.
Nos livros e nas notas de aula que você vai encontrar por aí o "Obs: $u = g(x)$" da nossa [S3I] quase sempre aparece escrito de (ZILHÕES DE!!!) outros jeitos, então o melhor que a gente pode fazer é tentar encontrar as substituições que transformam a nossa [S3I] em algo "mais ou menos equivalente" às igualdades complicadas que eu mostrei no vídeo e que eu disse que a gente iria tentar decifrar...

Nos itens a e b deste exercício você vai tentar encontrar as substituições — que eu vou escrever como '[?]' — que transformam a [S3I] em algo "mais ou menos equivalente" às igualdades da direita.

Exercício 2 (cont.)
Encontre as substituições '[?]'s que façam com que:

a) $$\begin{pmatrix} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{pmatrix}$$ [?] vire algo como $$\begin{pmatrix} \displaystyle\int 2\cos(3x+4)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \end{pmatrix}$$

b) [S3I] [?] vire algo como $$\begin{pmatrix} \displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5(1-\operatorname{sen} x^2)(\cos x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int s^5(1-s^2)\,ds \end{pmatrix}$$

Gambiarras

Em geral é mais prático a gente usar umas gambiarras como "$\frac{du}{dx}dx = du$" ao invés do método "mais honesto" que a gente usou no exercício 2...

Às vezes essas gambiarras vão usar uma versão disfarçada do teorema da derivada da função inversa: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$, e umas outras manipulações esquisitas de 'dx's e 'du's que só aparecem explicadas direito nos capítulos sobre "diferenciais" dos livros de Cálculo.

Nós vamos começar usando elas como gambiarras mesmo, e acho que nesse semestre não vai dar pra ver como traduzir cada uma delas pra algo formal...

Gambiarras (2)
Quando a gente está começando e ainda não tem prática este modo de por anotações embaixo de chaves ajuda muito:

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2)\, \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\, dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5 (1 - s^2)\, ds$$

Quando a gente já tem mais prática acaba sendo melhor pôr todas as anotações dentro de caixinhas — por exemplo:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x\, dx = ds \end{bmatrix}$$

Gambiarras (3)

Essas caixinhas, como

$$\left[\begin{array}{c} \operatorname{sen} x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x \, dx = ds \end{array}\right]$$

vão ser os únicos lugares em que nós vamos permitir esses 'dx's e 'ds' "soltos", que não estão nem em derivadas e nem associados a um sinal '$\int$'...

E esses 'dx's e 'ds' "soltos" só vão aparecer em linhas que dizem como traduzir uma expressão que termina em 'dx' numa integral em x pra uma expressão que termina em 'ds' numa integral na variável s.

Nós vamos evitar usar s como uma abreviação para $\operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações

Tudo numa caixinha de anotações é consequência da primeira linha dela, que é a que define a variável nova. Por exemplo, se definimos a variável nova como $c = \cos x$ então $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$, e podemos reescrever isso na "versão gambiarra" como: $dc = -\operatorname{sen} x\, dx$, e também como $\operatorname{sen} x\, dx = (-1)dc$.

A caixinha vai ser:

$$\left[\begin{array}{c} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \\ dc = -\operatorname{sen} x\, dx \\ \operatorname{sen} x\, dx = (-1)\, dc \end{array}\right]$$

Mais sobre as caixinhas de anotações (2)

Muito importante: cada linha das caixinhas é uma série de igualdades — por exemplo $\mathsf{expr}_1 = \mathsf{expr}_2 = \mathsf{expr}_3$ — e cada uma dessas expressões $\mathsf{expr}_1, \ldots, \mathsf{expr}_n$ só pode mencionar ou a variável antiga ou a variável nova...

Então:

Bom: $dc = -\operatorname{sen} x \, dx$
Mau: $\frac{1}{-\operatorname{sen} x} dc = dx$
Bom: $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x$

Truque: em $\frac{dc}{dx}$ o c faz o papel de uma abreviação para $\cos x$, não de uma variável.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)
Quando a gente faz algo como

$$\int \underbrace{\underbrace{(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5(1-(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2)\,\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\,dx}_{}}_{} \quad = \quad \int s^5(1-s^2)\,ds$$

$$\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5(1-(\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2)\,\underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}}\,dx}_{ds} \quad = \quad \int s^5(1-s^2)\,ds$$

Cada chave é como uma igualdade da caixa de anotações "escrita na vertical"... por exemplo, "$\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s}$" é $s = \operatorname{sen} x$.

As outras chaves correspondem a outras igualdades da caixa de anotações — que têm que ser consequências desse $s = \operatorname{sen} x$.

Mais sobre as caixinhas de anotações (3)

Isto aqui está errado:

$$\int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^2) \underbrace{\underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx}_{ds} \quad = \quad \int ({\color{red}\operatorname{sen} x})^5 (1 - s^2)\, ds$$

À esquerda do '$=$' a gente tem uma integral na qual só aparece a "variável antiga", que é x, e à direita do '$=$' a gente tem uma integral na qual aparecem tanto a variável antiga, x, quanto a nova, que é s... $=($

Lembre que tanto o truque das caixinhas quanto o truque das chaves servem pra gente conseguir aplicar a [S3I] de um jeito mais fácil, e no [S3I] uma integral usa só a variável antiga e a outra usa só a nova.

Exercício 3.
Leia o início da seção 6.1 do APEX Calculus
e faça os exercíos 25 até 32 da página 280 dele. Link:
http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf

Exercício 4.
Leia o início da seção 6.1 do Martins/Martins
e refaça os exercícios resolvidos 1 a 6 dele
usando ou as nossas anotações sob chaves ou
as nossas anotações em caixinhas. Link:
http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf

Exercício 5.

A questão 2 da P1 do semestre passado dizia que:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável (ou: "por uma sequência de integrações por substituição") pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

E ela pedia pra vocês verificarem isso num caso específico.
Tente fazer essa questão olhando poucas vezes pro gabarito dela.
Link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4`

$$[\mathsf{S2}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right)$$

$$[\mathsf{S2}][f(u) := F'(u)] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(w) = \cos(2+w) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(\sqrt{v}) & = & \displaystyle\int \cos(2+\sqrt{v}) \cdot (2\sqrt{v})^{-1}\,dv \\ \parallel & & \\ F(w) & = & \displaystyle\int \cos(2+w)\,dw \end{array} \\ \text{Obs: } w = \sqrt{v}. \end{array} \right)$$

Introdução

No último PDF e na P1 a gente viu como fazer “integração por substituição” de um jeito mais ou menos fácil de formalizar... agora a gente vai ver o método que os livros usam, que nos permite fazer as contas bem rápido, mas que usa várias gambiarras, algumas delas bem difíceis de formalizar.

Os nomes “integração por substituição” e “integração por mudança de variável” costumam ser equivalentes. Vou me referir ao método que a gente vai ver agora como “mudança de variável”, “mudança de variável por gambiarras”, “MV”, ou “MVG”, pra gente poder usar o termo “substituição” pro ‘[:=]’.

Introdução (2)

Cada livro usa convenções um pouco diferentes pra como escrever as contas por MVG. Eu vou usar a convenção do exemplo do próximo slide, em que a resolução da integral fica à esquerda e as caixinhas indicando os truques que usamos em cada MV ficam à direita, separadas da contas da integral.

A primeira caixinha tem os truques pra mudar
da variável x pra variável u e pra voltar de u pra x.

A segunda caixinha tem os truques pra mudar
da variável u pra variável v e pra voltar de v pra u.

A terceira caixinha tem os truques pra mudar
da variável v pra variável w e pra voltar de w pra v.

A quarta caixinha tem os truques pra mudar
da variável w pra variável y e pra voltar de y pra w.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{3\cos\left(2+\sqrt{3x+4}\right)}{2\sqrt{3x+4}}\,dx \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{u+4}\right)}{2\sqrt{u+4}}\,du \\
&= \int \frac{\cos\left(2+\sqrt{v}\right)}{2\sqrt{v}}\,dv \\
&= \int \cos\left(2+w\right)dw \\
&= \int \cos y\,dy \\
&= \operatorname{sen} y \\
&= \operatorname{sen}\left(2+w\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{v}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{u+4}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(2+\sqrt{3x+4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} u=3x \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3\,dx \\ dx=\frac{1}{3}\,du \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} v=u+4 \\ du=dv \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} w=\sqrt{v} \\ \frac{dw}{dv}=\frac{1}{2}v^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} y=2+w \\ dy=dw \end{bmatrix}
$$

Limites de integração
A coluna da esquerda tem uma série de integrais sem limites de integração — a gente está trabalhando numa notação abreviada em que os limites de integração foram apagados. Eles podem ser recolocados de novo no final, quando a gente for transformar essas contas abreviadas numa versão "desabreviada" delas.

Os limites de integração em x são diferentes
dos limites de integração em u, que são diferentes
dos limites de integração em v, que são diferentes
dos limites de integração em w, que são diferentes
dos limites de integração em y.

Detalhes em breve!

A coluna da esquerda tem uma série de igualdades. Ela é da forma $\langle \mathsf{expr_1} \rangle = \langle \mathsf{expr_2} \rangle = \ldots = \langle \mathsf{expr_n} \rangle$, mas a gente escreve essa série de igualdades na vertical.

Repare que na coluna da esquerda
"as variáveis não se misturam":
$\langle \mathsf{expr_1} \rangle$ e $\langle \mathsf{expr_{10}} \rangle$ são "expressões em x",
$\langle \mathsf{expr_2} \rangle$ e $\langle \mathsf{expr_9} \rangle$ são "expressões em u",
$\langle \mathsf{expr_3} \rangle$ e $\langle \mathsf{expr_8} \rangle$ são "expressões em v",
$\langle \mathsf{expr_4} \rangle$ e $\langle \mathsf{expr_7} \rangle$ são "expressões em w",
$\langle \mathsf{expr_5} \rangle$ e $\langle \mathsf{expr_6} \rangle$ são "expressões em y".

A regra mais importante de todas

Na coluna da esquerda cada expressão é
uma expressão "em uma variável só".
Se você escrever algo como

$$\int \cos(2+w)\,dy$$

Isso é um ERRO CONCEITUAL GRAVÍSSIMO
e a sua questão é ZERADA.

A gente não vai ter tempo de ver o porquê disso...
O motivo é que com essa proibição o método pra
"desabreviar" as contas fica simples —
sem essa proibição ele fica BEM mais complicado,
e a gente precisaria de uns truques de "notação
de físicos", que é um assunto bem difícil de
Cálculo 3, pra definir o método de desabreviação.

As caixinhas de truques

As caixinhas de truques da MVG têm uma sintaxe BEM diferente das caixinhas do ‘[:=]’.
Pra enfatizar isso a gente usa ‘=’s dentro delas, não ‘:=’s, e a gente escreve elas separadas do resto, à direita.

Dê uma olhada nas 9 primeiras páginas daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf

Dentro cada caixinha de truques da MVG a gente vai usar algumas expressões que só podem ser formalizadas direito usando a “notação de físicos”, que a gente vai ver com detalhes em C3...
Vou mostrar como “ler em voz alta” uma caixinha e a gente vai tentar usar elas meio de improviso.

Lendo uma caixinha de truques em voz alta

$$\begin{bmatrix} u = 3x \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

Digamos que u e x são variáveis dependentes,
que obedecem a equação $u = 3x$.
Então podemos tratar u como uma função de x,
e temos $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(u(x)) = \frac{d}{dx}(3x) = \frac{d}{dx}(u(x)) = 3$.
Multiplicando os dois lados de $\frac{du}{dx} = 3$ por dx
obtemos $du = 3\,dx$; e multiplicando os dois lados de
$du = 3\,dx$ por $\frac{1}{3}$ obtemos $dx = \frac{1}{3}$.

Na caixinha

$$\begin{bmatrix} u = 3x \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{bmatrix}$$

as duas últimas linhas são igualdades entre expressões incompletas. Você viu na P1 como substituir expressões incompletas, como parênteses, bananas e lentes...

Em expressões das formas '$\int \ldots\, dx$' e '$\int \ldots\, du$' o 'dx' e o 'du' fazem papel de "fecha parênteses", e as igualdades $du = 3\,dx$ e $dx = \frac{1}{3}du$ indicam substituições que você vai poder fazer nas integrais do lado esquerda que vão ser parecidas com as da questão 2 da P1.

Exercício 1.
Reescreva os exemplos 1 a 4 da seção 6.2 do livro do Daniel Miranda na notação que eu disse que nós vamos usar, em que todas caixinhas de truques são escritas explicitamente.

Link:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=189

Cálculo 2 - 2022.1

Mini-teste 2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Mini-teste 2
(Veja o rodapé pra detalhes).

Isto aqui é um exemplo do livro do Miranda:

Problema. Calcule a antiderivada de $(\operatorname{sen} 4x)^5 \cos 4x$.
Solução. Observamos que a derivada de $\operatorname{sen} 4x$ é $4\cos x$, que é um múltiplo do fator $\cos 4x$ que aparece no integrando. Isso motiva a substituição

$$u = \operatorname{sen} 4x, \qquad du = 4\cos 4x\,dx \qquad \frac{du}{4} = \cos 4x\,dx$$

e assim:

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{sen} 4x)^5 \cos 4x\,dx &= \frac{1}{4}\int u^5\,du \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}u^6 + C \\ &= \frac{1}{24}(\operatorname{sen} 4x)^6 + C. \end{aligned}$$

Justifique o passo $\int (\operatorname{sen} 4x)^5 \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\int u^5\,du$. Mais precisamente: imagine que você tentou justificar ele dizendo que ele é verdadeiro “por mudança de variáveis”, e o jogador O respondeu: “me mostra um caso particular do $[\mathrm{MV}_1]$ que justifica esse passo” — e o jogador O te dá essa dica daqui: “o $[\mathrm{MV}_1]$ é sobre integrais definidas, então suponha que a primeira integral vai de $x = a$ até $x = b$”.

Gabarito

Veja estes PDFs pra mais detalhes:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-dicas-pra-P1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P1.pdf#page=4

As contas são:

$$[\text{MT2}] = \left(\int \text{sen}(4x)^5 \cos(4x)\, dx = \frac{1}{4} \int u^5\, du \right)$$

$$[\text{MV}_2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \right)$$

$$[\text{MV}_2] \begin{bmatrix} g(x):=\text{sen}(4x) \\ g'(x):=4\cos(4x) \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(\text{sen}(4x)) \cdot 4\cos(4x)\, dx = \int_{u=\text{sen}(4a)}^{u=\text{sen}(4b)} f'(u)\, du \right)$$

$$[\text{MV}_2] \begin{bmatrix} g(x):=\text{sen}(4x) \\ g'(x):=4\cos(4x) \\ f'(u):=u^5 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \text{sen}(4x)^5 \cdot 4\cos(4x)\, dx = \int_{u=\text{sen}(4a)}^{u=\text{sen}(4b)} u^5\, du \right)$$

$$[\text{MV}_2] \begin{bmatrix} g(x):=\text{sen}(4x) \\ g'(x):=4\cos(4x) \\ f'(u):=\frac{1}{4}u^5 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{4}\text{sen}(4x)^5 \cdot 4\cos(4x)\, dx = \int_{u=\text{sen}(4a)}^{u=\text{sen}(4b)} \frac{1}{4}u^5\, du \right)$$

Cálculo 2 - 2022.1

Aula 31: primitivas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Vídeos antigos

Em 2021.1 eu fiz três vídeos sobre como integrar funções escada que eu acho que ficaram muito bons. Se você ainda não é capaz de integrar uma função escada em poucos segundos, comece por eles! Links:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-propriedades-da-integral.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=ORfsWiwelV8

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-propriedades-da-integral-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=MmlQTtH5jFo

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-propriedades-da-integral-3.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=J97x7MNpr90

A parte sobre integrar funções escada do primeiro vídeo começa no 14:14, e ela é sobre este trecho aqui do PDF (note o page=29):

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-propriedades-da-integral.pdf#page=29

O segundo vídeo é sobre primitivas diferentes pra mesma função. O terceiro vídeo é sobre integrar uma função escada resolvendo uma EDO no olho traçando segmentos de reta com os coeficientes angulares certos.

Introdução

O livro do Miranda define primitiva na página 181,
e define a integral indefinida na página seguinte:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=182

Ele faz uma gambiarra que é muito comum em livros de Cálculo 2, que é definir primitivas e integrais indefinidas de um jeito simples demais, que não funciona pra fórmula $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ (que aparece na p.184!!!) e funciona bem mal pra funções escada... tem um vídeo bom sobre isso aqui, mas é em inglês:

"Your calculus prof lied to you (probably)"
http://www.youtube.com/watch?v=u4kex7hDC2o

Introdução (2)

Existem vários jeitos de trocar essas definições de primitiva e integral indefinida "simples demais" que a maioria dos livros de C2 usam por outras um pouco melhores. O meu jeito preferido é o que eu vou explicar nas próximas páginas.

Existe uma notação padrão pro domínio de uma função f: "$\mathrm{dom}(f)$". Vamos definir o conjunto $\mathrm{domc}(f)$ — pronúncia: o "domínio de continuidade" da f — como o subconjunto de $\mathrm{dom}(f)$ que só contém os pontos em que a f é contínua...

Introdução (3)

Agora vamos escolher a definição de primitiva mais simples possível que faça as soluções dos exercícios 8 e 9 daqui serem primitivas da f do enunciado:

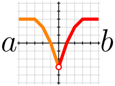
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-TFC1.pdf#page=48`

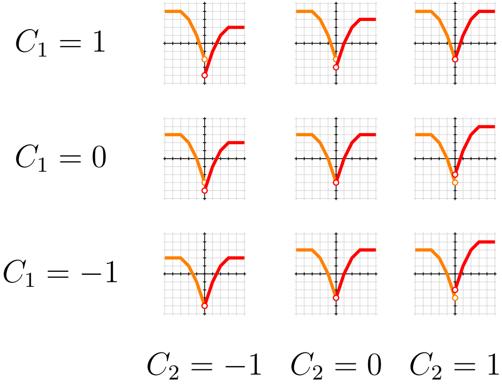
A definição vai ser esta aqui:

> Uma função F é uma primitiva da função f quando estas quatro condições são obedecidas:
>
> 1) $\mathrm{dom}(F) = \mathrm{dom}(f)$,
> 2) F é contínua — ou seja, $\mathrm{domc}(F) = \mathrm{dom}(F)$,
> 3) a F é derivável em todos os pontos de $\mathrm{domc}(f)$,
> 4) para todo $x \in \mathrm{domc}(f)$ temos $F'(x) = f(x)$.

Exercício 1.
Entenda a definição do slide anterior e verifique que

P1 e escadas





Compare com:

Cálculo 2 - 2022.1

Aula 31: dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Introdução

Nos livros é bem comum encontrarmos trechos como este aqui... Lembre que está é a fórmula da regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Substituindo $f(x)$ e $g(x)$ nela por $\operatorname{sen} x$ e $2x$ respectivamente, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x)\cdot 2$$

Nós precisávamos de uma notação curta e precisa pra esse tipo de substituição, e eu introduzi essa notação aqui:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{RC}] & = & \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) \;=\; f'(g(x))g'(x)\right) \\ [\mathrm{RC}]\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \\ g(x) := 2x \\ g'(x) := 2 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2x) = \cos(2x)\cdot 2\right) \end{array}$$

Quando nós tentamos traduzir essa duas notações — a original em português e a formalizada — pra uma operação “que um computador conseguisse executar” nós vimos que a tradução não era nada óbvia. Nós fizemos uns exercícios representando as expressões em árvores e fazendo tudo passo a passo, testamos algumas traduções, e vimos que se:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{SA}_1] = \begin{bmatrix} f(\alpha) := \operatorname{sen}(\alpha) \\ g(\alpha) := 2\cdot\alpha \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} (f(\alpha))[\mathrm{SA}_1] = \operatorname{sen}(\alpha) \\ (g(\alpha))[\mathrm{SA}_1] = 2\cdot\alpha \end{bmatrix} \\ [\mathrm{SA}_2] = \begin{bmatrix} f(\alpha) := \operatorname{sen}((\alpha)[\mathrm{SA}_2]) \\ g(\alpha) := 2\cdot(\alpha)[\mathrm{SA}_2] \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} (f(\alpha))[\mathrm{SA}_2] = \operatorname{sen}((\alpha)[\mathrm{SA}_2]) \\ (g(\alpha))[\mathrm{SA}_2] = 2\cdot(\alpha)[\mathrm{SA}_2] \end{bmatrix} \end{array}$$

Então

$$\begin{array}{rcl} (f(g(100)))[\mathrm{SA}_1] & = & (\operatorname{sen}(g(100))) \\ (f(g(100)))[\mathrm{SA}_2] & = & (\operatorname{sen}(2\cdot 100))\ , \end{array}$$

e a tradução $[\mathrm{SA}_2]$ é a que corresponde ao que os livros fazem quando eles dizem “subtitua”... a $[\mathrm{SA}_1]$ é uma substituição que “pára pelo meio do caminho” e não substitui tudo que deveria.

Em termos beeem técnicos, acho que a substituição que nós queremos usar é o “call-by-name”,

https://en.wikipedia.org/wiki/Evaluation_strategy#Call_by_name

mas numa versão simplificada que não tem o truque pra evitar captura de variáveis ligadas.

Seja [S1] $= \left[\begin{array}{c} f(\alpha) := \sin((\alpha)[\mathrm{S1}]) \\ f'(\alpha) := \cos((\alpha)[\mathrm{S1}]) \\ g(\alpha) := (42)[\mathrm{S1}] \cdot (\alpha)[\mathrm{S1}] \\ g'(\alpha) := 42 \end{array}\right]$.

Também dá pra calcular [RC][S1] desta forma:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{d}{d\underbrace{x}_{\Rightarrow x}}\,\underbrace{f(\underbrace{g(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42\cdot x})}_{\Rightarrow \sin(42\cdot x)}}_{\Rightarrow \frac{d}{dx}\sin(42\cdot x)} = \underbrace{\underbrace{f'(\underbrace{g(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42\cdot x})}_{\Rightarrow \cos(42\cdot x)} \cdot \underbrace{g'(\underbrace{x}_{\Rightarrow x})}_{\Rightarrow 42}}_{\Rightarrow \cos(42\cdot x)42}}_{\Rightarrow \frac{d}{dx}\sin(42\cdot x)=\cos(42\cdot x)42}$$

$$[\mathrm{MV}_1] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MV}_2] = \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\mathrm{MV}_3] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array} \right) \qquad [\mathrm{MV}_4] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{MVI}_3] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array} \right) \qquad [\mathrm{MVI}_4] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array} \right)$$

No mini-teste 2 - link:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-MT2.pdf

eu pedi pra vocês justificarem um passo de um exemplo do livro do Miranda como nesse jogo aqui,

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-der-fun-inv.pdf#page=6

como se o jogador O tivesse dito "justifica essa igualdade *com um caso particular do* $[MV_1]$ *ou do* $[MV_3]$", onde $[\mathrm{MV}_1]$ e $[\mathrm{MV}_3]$ são as demonstrações da mudança de variável da página anterior... a $[\mathrm{MV}_1]$ e a $[\mathrm{MV}_3]$ são pra integral definida, então você vai obter um caso particular que é só "parecido" com a igualdade que você quer justificar.

$$[\mathrm{MV}_2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \right)$$

$$[\mathrm{S4}] = \begin{bmatrix} g(\alpha) := \mathrm{sen}(4x) \\ g'(\alpha) := 4\cos(4x) \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{MV}_2][\mathrm{S4}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(\mathrm{sen}(4x)) \cdot 4\cos(4x)\, dx = \int_{u=\mathrm{sen}(4x)}^{u=\mathrm{sen}(4x)} f'(u)\, du \right)$$

$$[\mathrm{S5}] = \begin{bmatrix} g(\alpha) := \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4x) \\ g'(\alpha) := \cos(4x) \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{MV}_2][\mathrm{S5}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4x)) \cdot \cos(4x)\, dx = \int_{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4x)}^{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4x)} f'(u)\, du \right)$$

$$[\mathrm{S6}] = \begin{bmatrix} g(\alpha) := \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4\alpha) \\ g'(\alpha) := \cos(4(\alpha)[\mathrm{S6}]) \\ f'(\alpha) := ((\alpha)[\mathrm{S6}])^5 \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{MV}_2][\mathrm{S6}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} (\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4x))^5 \cdot \cos(4x)\, dx = \int_{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4a)}^{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4b)} (u)^5\, du \right)$$

$$[\mathrm{S7}] = \begin{bmatrix} g(\alpha) := \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4\alpha) \\ g'(\alpha) := \cos(4(\alpha)[\mathrm{S7}]) \\ f'(\alpha) := 4 \cdot ((\alpha)[\mathrm{S7}])^5 \end{bmatrix} \qquad [\mathrm{MV}_2][\mathrm{S7}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} 4 \cdot (\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4x))^5 \cdot \cos(4x)\, dx = \int_{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4a)}^{u=\frac{1}{4}\mathrm{sen}(4b)} 4 \cdot (u)^5\, du \right)$$

Cálculo 2 - 2022.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Introdução

Lembre que a gente não teve tempo no curso pra "aprender a resolver integrais" no sentido usual... "resolver integrais" significa começar com um problema como, sei lá, por exemplo,

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 8} \, dx \;=\; ?$$

e aí fazer um monte de contas até transformar a expressão original numa expressão que "é mais fácil de calcular" porque não tem mais um sinal de integral, e depois checar se todas as contas estão certas e listar quais condições têm que ser verdade pra todas as igualdades serem verdadeiras...
No curso só deu tempo da gente fazer o início disso, que é aprender e ler contas de "resolver integrais", e entender, verificar e justificar cada passo delas.
Em vários dos problemas desta prova você vai ter que justificar os passos mais difíceis de certas "contas de resolver integrais". Eu tentei fazer essa prova de um modo que valesse muito a pena vocês relerem ela depois e tentarem entender e justificar os outros passos dessas contas...

...mais precisamente: 1) eu escolhi integrais que usam técnicas que vão ser <u>muito úteis</u> nas matérias que vêm depois (principalmente as de Física); 2) eu pus links pra mais textos (com exercícios!) sobre essas técnicas de integração; 3) e se vocês tiverem que fazer vista de prova eu talvez peça pra vocês justificarem outros passos da contas pra ver se vocês estão sabendo a matéria...

A prova vai ser posta neste link aqui em breve:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P1.pdf`

Estudem por ela quando der!
Boa prova! =)

Questão 1

(Total: 5.0 pts)
(Sobre frações parciais)
Considere:

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx & \overset{(1)}{=} & \ln|x| \\
\displaystyle\int \frac{1}{x+a}\,dx & \overset{(2)}{=} & \displaystyle\int \frac{1}{u}\,du \\
& \overset{(3)}{=} & \ln|u| \\
& \overset{(4)}{=} & \ln|x+a| \\
\displaystyle\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x+5} & = & \displaystyle\frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)}+\frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\
& = & \displaystyle\frac{2(x+5)+4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\
& = & \displaystyle\frac{2x+10+4x+12}{(x+3)(x+5)} \\
& = & \displaystyle\frac{6x+22}{x^2+8x+15} \\
\displaystyle\int \frac{6x+22}{x^2+8x+15}\,dx & = & \displaystyle\int \frac{2}{x+3}+\frac{4}{x+5}\,dx \\
& = & \displaystyle\int \frac{2}{x+3}\,dx+\int \frac{4}{x+5}\,dx \\
& = & \displaystyle 2\int \frac{1}{x+3}\,dx+4\int \frac{1}{x+5}\,dx \\
& \overset{(12)}{=} & 2\ln|x+3|+4\ln|x+5|
\end{array}
$$

Sejam [FP1], [FP2] e [FP12] as igualdades numeradas à esquerda.

a) **(2.0 pts)** Mostre como justificar o '$\overset{(2)}{=}$' usando o [MV2].

b) **(3.0) pts)** Mostre como justificar o '$\overset{(12)}{=}$'.

Questão 1: gabarito

Pra fazer o item (a) eu vou começar dando um nome curto – [FP$_2$] – pra igualdade '$\overset{(2)}{=}$', e relembrando qual é a fórmula [MV$_2$]:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{FP}_2] & = & \left(\int \frac{1}{x+a}\,dx = \int \frac{1}{u}\,dx \right) \\ [\mathrm{MV}_2] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right) \end{array}$$

...e agora vou procurar uma substituição que transforma a [MV$_2$] em algo parecido com a [FP$_2$]. Eu não consigo encontrar ela direto, então vou fazer vários chutes – a escolha da substituição – e testes – escrever por extenso o resultado da substituição e ver se esse resultado é "parecido" com a [FP$_2$]:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{MV}_2] \begin{bmatrix} g(x):=x+a \\ g'(x):=1 \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(x+a) \cdot 1\,dx = \int_{u=a+a}^{u=b+a} f'(u)\,du \right) \\ [\mathrm{MV}_2] \begin{bmatrix} g(x):=x+a \\ g'(x):=1 \\ a:=b \\ b:=c \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=b}^{x=c} f'(x+a) \cdot 1\,dx = \int_{u=x+a}^{u=x+a} f'(u)\,du \right) \\ [\mathrm{MV}_2] \begin{bmatrix} g(x):=x+a \\ g'(x):=1 \\ f'(x):=\frac{1}{x} \\ a:=b \\ b:=c \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=b}^{x=c} \frac{1}{x+a} \cdot 1\,dx = \int_{u=b+a}^{u=c+a} \frac{1}{u}\,du \right) \end{array}$$

O último resultado acima é bastante bom. Note que ele tem um '$\cdot 1$' e que ele descreve uma mudança de variável na integral definida, não na integral indefinida.

Agora o item (b). Se combinarmos as igualdades '$\overset{(2)}{=}$', '$\overset{(3)}{=}$' e '$\overset{(4)}{=}$' obtemos a igualdade abaixo:

$$[\mathrm{FP}_{234}] \quad = \quad \left(\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| \right)$$

Ela vale pra todo valor de a. Aqui estão dois casos particulares dela:

$$\begin{array}{l} [\mathrm{FP}_{a=3}] = [\mathrm{FP}_{234}]\,[a:=3] = \left(\int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x+3| \right) \\ [\mathrm{FP}_{a=5}] = [\mathrm{FP}_{234}]\,[a:=3] = \left(\int \frac{1}{x+5}\,dx = \ln|x+5| \right) \end{array}$$

Considere esta série de igualdades:

$$\begin{array}{rcl} \int \frac{1}{x+a}\,dx & \overset{(20)}{=} & \ln|x+a| \\ \int \frac{1}{x+3}\,dx & \overset{(21)}{=} & \ln|x+3| \\ \int \frac{1}{x+5}\,dx & \overset{(22)}{=} & \ln|x+5| \\ 2\int \frac{1}{x+3}\,dx + 4\int \frac{1}{x+5}\,dx & \overset{(23)}{=} & 2\ln|x+3| + 4\ln|x+5| \end{array}$$

As três primeiras são justificadas por fórmulas pras quais nós já demos nomes, e a última é consequência das duas do meio.

Questão 2

(Total: 3.0 pts)
(Sobre "integrais de potências de senos e cossenos")

A demonstração abaixo é do gabarito de uma prova antiga minha:

$$\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
= &\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
= &\int (\operatorname{sen} x)^5 (1 - \operatorname{sen} x^2) (\cos x) \, dx \\
\overset{(3)}{=} &\int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
= &\int s^5 - s^7 \, ds \\
= &\frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
= &\frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}$$

Esta caixinha aqui

$$\left[\begin{smallmatrix} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \operatorname{sen} x = s \\ (\cos x)^2 = 1 - s^2 \\ \cos x \, dx = ds \end{smallmatrix}\right]$$

"Explica" a mudança de variáveis.

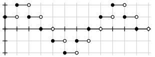
a) **(3.0 pts)** Mostre como justificar o '$\overset{(3)}{=}$' usando o [MV2].

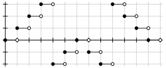
Questão 2: gabarito

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \left(\int (\operatorname{sen} x)^5 (1-\operatorname{sen} x^2)(\cos x)\,dx \overset{(3)}{=} \int s^5(1-s^2)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\,\big[u:=s\big] & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{s=g(a)}^{s=g(b)} f'(s)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\operatorname{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ u:=s \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(\operatorname{sen}(x))\cdot\cos(x)\,dx = \int_{s=\operatorname{sen}(a)}^{s=\operatorname{sen}(b)} f'(s)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} f'(x):=x^5(1-x^2) \\ g(x):=\operatorname{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ u:=s \end{bmatrix} & = & \left(\int_{x=a}^{x=b} \left(\operatorname{sen}(x)^5\left(1-\operatorname{sen}(x)^2\right)\right)\cdot\cos(x)\,dx = \int_{s=\operatorname{sen}(a)}^{s=\operatorname{sen}(b)} \left(s^5\left(1-s^2\right)\right)\,ds\right)
\end{array}
$$

Questão 3

(Total: 3.0 pts)
(Sobre funções escada)
Sejam:

$f(x) =$  ,

$g(x) =$  ,

$$F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt,$$

$$G(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt,$$

e seja $H(x)$ a função contínua cujo domínio é o conjunto $D = [0,7) \cup (7,12]$ e que obedece estas três condições:
1) $H(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt$ se $x \in [0,7)$,
2) $H(10) = 1$, e
3) "para todo $x \in (7,12]$ temos $H'(x) = g(x)$", onde eu pus a expressão acima entre aspas porque ela é um abuso de linguagem comum quando a gente fala de funções escada... a tradução disto pra uma linguagem mais formal é: "$H'(x) = g(x)$ é verdade em todos os pontos $x \in (7,12]$ nos quais a $g(x)$ é contínua.

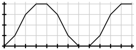
a) **(0.5 pts)** Faça o gráfico da $F(x)$.
b) **(0.5 pts)** Faça o gráfico da $G(x)$.
c) **(1.0 pts)** Faça o gráfico da $H(x)$.

d) **(1.0 pts)** Digamos que a função $M(x)$ é definida exatamente da mesma forma que a $H(x)$, mas mudando o "$H(10) = 1$" por "$M(10) = 2$". Faça o gráfico da $M(x)$.

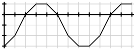
Questão 3: gabarito

$$f(x) \quad = $$

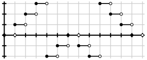
$$F(x) = \int_{t=0}^{t=x} f(t)\,dt \quad = $$



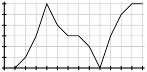
$$G(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt \quad = $$



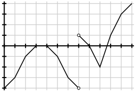
$$g(x) \quad = $$



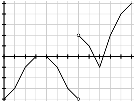
$$\int_{t=0}^{t=x} g(t)\,dt \quad = $$

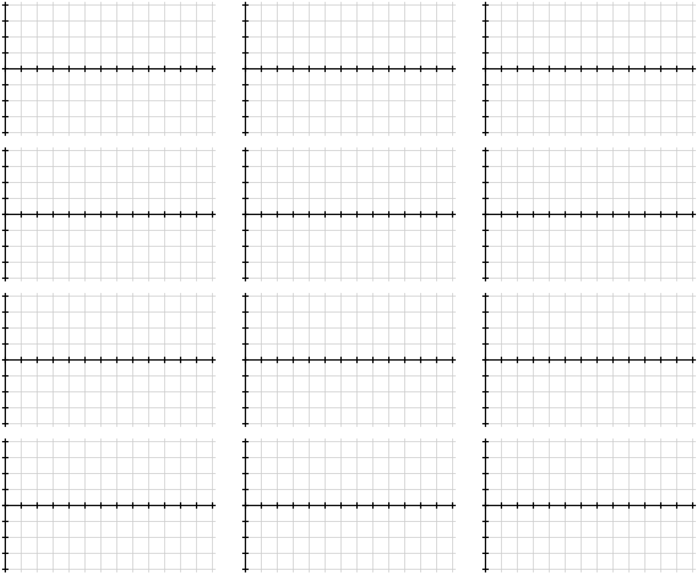


$$\begin{array}{r} H(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \;\; \text{se} \;\; x \in [0,7), \\ \text{“}H'(x) = g(x)\text{”} \;\; \text{se} \;\; x \in (7,12], \\ H(10) = 1 \end{array} \quad \Rightarrow$$



$$\begin{array}{r} M(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \;\; \text{se} \;\; x \in [0,7), \\ \text{“}M'(x) = g(x)\text{”} \;\; \text{se} \;\; x \in (7,12], \\ M(10) = 2 \end{array} \quad \Rightarrow$$





$$[\mathrm{RC}] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

$$[\mathrm{MV}_1] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & \overset{(1)}{=} & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & \overset{(2)}{=} & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & \overset{(3)}{=} & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & \overset{(4)}{=} & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array}\right)$$

$$[\mathrm{MV}_2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \overset{(4)}{=} \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right)$$

$$[\mathrm{MV}_3] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array} \end{array}\right) \qquad [\mathrm{MV}_4] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \end{array}\right)$$

$$[\mathrm{MVI}_3] = \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{ccc} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array}\right) \qquad [\mathrm{MVI}_4] = \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x) \end{array}\right)$$

Links pra estudar esta matéria:

http://angg.twu.net/2019.2-C2/2019.2-C2.pdf#page=37
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-fracoes-parciais.pdf
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=240

Cálculo 2 - 2022.1

Aula 31.5: dicas pra P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Campos de direções

A P2 vai ter uma questão de "desenhe o campo de direções" que vai ser muito parecida com os itens do Exercício 1 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-edovs.pdf#page=5

A página 7 desse PDF tem links pra três vídeos:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-edovs.pdf#page=7

Tem uma explicação pra esse Exercício 1 no segundo vídeo, a partir do 5:54. Use o terceiro link abaixo:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=bNfZUomf1xg
https://www.youtube.com/watch?v=bNfZUomf1xg#t=5m54s (Exercício 1)

Essa questão vai valer um ponto.

Cálculo 2 - 2022.1

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Questão 1

(Total: 2.5 pts)

Isto é um exemplo de substituição trigonométrica:

$$\begin{aligned}
\int s^4 \sqrt{1-s^2}^{10}\, ds &\overset{(1)}{=} \int (\operatorname{sen}\theta)^4 \sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}^{10} \cos\theta\, d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^4 \sqrt{(\cos\theta)^2}^{10} \cos\theta\, d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^{10} \cos\theta\, d\theta \\
&= \int (\operatorname{sen}\theta)^4 (\cos\theta)^{11}\, d\theta
\end{aligned}$$

Alguns livros justificam essa mudança de variável dizendo só algo como: “seja $s = \operatorname{sen}\theta$; então $ds = \cos\theta\, d\theta$”.
Note que a gente não chega a resolver a integral – a gente só transforma a integral original, $\int s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\, ds$, em algo que é um pouco mais fácil de integrar.

Justifique a igualdade ‘$\overset{(1)}{=}$’ usando o [MV$_2$].
Fórmulas:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{MV}_2] &= \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\, du \right) \\
[\mathrm{RC}] &= \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \right)
\end{aligned}$$

Questão 2

(Total: 3.5 pts)
Todos os métodos pra resolver EDOs que eu conheço direito podem ser expressos usando o '[:=]'. Por exemplo, digamos que a nossa EDO é:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \qquad (*)$$

Se traduzirmos a $(*)$ pra notação antiga – a que eu chamo de "notação de físicos" (sempre entre aspas!) no curso de Cálculo 3 – ela vira:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

Uma EDO com variáveis separáveis (obs: vou abreviar isso pra "EDOVS"; obs 2: eu nunca vi ninguém mais usando essa abreviação) é uma em que "$\frac{dy}{dx}$ pode ser expresso na forma $\frac{g(x)}{h(y)}$ com $g(x)$ dependendo só de x e $h(y)$ dependendo só de y". Pra pegar um exemplo concreto, vamos definir $g(x)$ como $-2x$ e $h(y)$ como $2y$; aí temos $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \frac{-2x}{2y} = \frac{g(x)}{h(y)}$. O método pra encontrar soluções de uma EDOVSs pode ser resumido na "demonstração" à direita. Os passos desse método que ficam implícitos são: 1) escolha uma primitiva $G(x)$ para $g(x)$; 2) escolha uma primitiva $H(y)$ para $h(y)$; 3) escolha as constantes C_1 e C_2; 4) defina C_3 como $C_2 - C_1$; 4) escolha uma inversa $H^{-1}(x)$ para a função $H(y)$ – ela tem que obedecer $H^{-1}(H(x)) = x$.

a) **(1.0 pts)** Qual é o resultado da substituição ? Dica: ele deve terminar com algo como $y = -\sqrt{25 - x^2}$.

b) **(1.0 pts)** Verifique que a função $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ é uma solução para a EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

c) **(1.0 pts)** Verifique que essa solução passa pelos pontos $(0, -5)$, $(3, -4)$ e $(4, -3)$.

d) **(0.5 pts)** Verifique que se estivermos trabalhando só com números reais então $f(10)$ não está definida – ou seja, o domínio dessa solução não é o $\mathbb{R}$ todo.

$$[\text{EDOVSG}] = \left(\begin{array}{rcl} \frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\ \| & & \| \\ H(y) + C_1 & & G(x) + C_2 \\ H(y) & = & G(x) + C_2 - C_1 \\ & = & G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array}\right)$$

$$[\text{SE}_1] = \begin{bmatrix} g(x) := -2x \\ G(x) := -x^2 \\ h(x) := 2x \\ H(x) := x^2 \\ H^{-1}(x) := -\sqrt{x} \\ C_1 := 4 \\ C_2 := 29 \\ C_3 := 25 \end{bmatrix}$$

Questão 3.

(Total: 1.0 pts)

Desenhe os campos de direções para as EDOs abaixo. Mais precisamente: para cada um dos 25 pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ calcule o valor de $\frac{dy}{dx}$ naquele ponto, interprete esse valor como um coeficiente angular, e faça um tracinho com esse coeficiente angular centrado naquele ponto (x, y).

a) **(0.5 pts)** Faça isso para a EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

b) **(0.5 pts)** Faça isso para a EDO

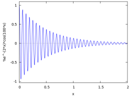
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2}.$$

Questão 4

(Total: 3.0 pts)
EDOs *parecidas* com essa aqui

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \qquad (*)$$

vão ser incrivelmente importantes nos cursos de Física. Algumas delas descrevem “oscilações amortecidas”, como esta figura:



A maioria dos livros “normais” de EDOs ensinam um modo de resolver a $(*)$ que eu acho muito árido. Nesta questão você vai ver um método pra resolver EDOs desse tipo que eu acho bem mais legal, e que eu aprendi num curso de Álgebra Linear. Nesse método a gente trata funções como vetores (de dimentão infinita) e a derivada como uma transformação linear (uma “matriz de dimensão infinita”). Quando eu precisar enfatizar que estou “em Álgebra Linear” eu vou escrever f e D ao invés de $f(x)$ e $\frac{d}{dx}$.

Isto aqui é uma demonstração quase completa do modo rápido de encontrar as “soluções básicas” e a “solução geral” da EDO $(*)$... ela é “quase completa” no sentido de que ela é o que as pessoas escrevem no quadro quando explicam esse método, mas sem a parte falada.

$$\begin{array}{rcl}
f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) & = & 0 \\
\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) + 7\frac{d}{dx}f(x) + 10f(x) & = & 0 \\
(\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} + 7\frac{d}{dx} + 10)f(x) & = & 0 \\
(D^2 + 7D + 10)f & = & 0 \\
(D^2 + (2+5)D + (2\cdot 5))f & = & 0 \\
(D+2)(D+5)f & = & 0 \\
(D+2)(D+5)e^{-5x} & = & (D+2)(De^{-5x} + 5e^{-5x}) \\
 & = & (D+2)(-5e^{-5x} + 5e^{-5x}) \\
 & = & (D+2)0 \\
 & = & 0 \\
(D+5)(D+2)f & = & 0 \\
(D+5)(D+2)e^{-2x} & = & (D+5)(De^{-2x} + 2e^{-2x}) \\
 & = & (D+5)(-2e^{-2x} + 2e^{-2x}) \\
 & = & (D+5)0 \\
 & = & 0 \\
(D^2 + 7D + 10)(\gamma e^{-2x} + \delta e^{-5x}) & = & 0
\end{array}$$

(Continua...)

Questão 4 (cont.)

...e isto aqui é uma versão mais curta da demonstração da página anterior:

$$\begin{array}{rcl} f''(x)+7f'(x)+10f(x) & = & 0 \\ (D^2+7D+10)f & = & 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f & = & 0 \\ (D^2+7D+10)(\gamma e^{-2x}+\delta e^{-5x}) & = & 0 \end{array}$$

Aqui que você já tem uma certa prática com problemas de "encontre a substituição certa" você vai fazer um problema de "encontre a generalização certa". Vou explicar ele em português.

Você vai definir [EDOLP] – de "EDO linear, caso particular" – como sendo o bloco de quatro igualdades acima. Faça isso na notação certa, que é algo como "[EDOLP] = ?".

Depois disso você vai procurar a "generalização certa" da [EDOLP], e na "substituição certa" que transforma ela na [EDOLP]. O seu objetivo é chegar em algo da forma [EDOLG][S] = [EDOLP]; o nome "[EDOLG]" vem de "EDO linear, caso geral". É difícil chegar na [EDOLG] direto, então vou dar instruções pra você chegar lá por chutar-e-testar.

Chame as suas tentativas de [EDOLG1], [EDOLG2], etc, e as suas substituições de [S1], [S2], etc. O seu objetivo é chegar numa [EDOLG$_n$] que não tenha mais os números 2, 5, 7 e 10; eles devem ter sido substuídos ou por variáveis ou por expressões que dependem dessas variáveis.

O seu objetivo *final* é chegar num caso em que [S] seja só isto aqui:

$$[\mathrm{S}] = \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix}$$

E isto valha:

$$[\mathrm{EDOLG}] \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix} \text{"="}[\mathrm{EDOLP}]$$

Eu pus o "=" entre aspas porque você vai não chegar a algo exatamente igual à [EDOLP], só em algo equivalente à EDOLP... como o que a gente fez nos exercícios de "justifique esse passo".

Quem for fazer a VS vai ver como nos últimos semestres a gente usou essa técnica pra aprender a demonstrar algumas fórmulas das tabelas de integração dos livros – a gente começava com um caso particular e "generalizava ele do jeito certo" depois.

Questão 1: gabarito

(Com vários chutes e testes)

$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{TRIG}_1] & = & \left(\displaystyle\int s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\,ds = \int \mathrm{sen}(\theta)^4\sqrt{1-(\mathrm{sen}(\theta))^2}^{10}\cos(\theta)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(\mathrm{sen}(x))\cdot\cos(x)\,dx = \int_{u=\mathrm{sen}(a)}^{u=\mathrm{sen}(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} f'(\mathrm{sen}(\theta))\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} f'(s)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(x):=\sqrt{x}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} \sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} \sqrt{s}^{10}\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(x):=1-\sqrt{x}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} 1-\sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} 1-\sqrt{s}^{10}\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\begin{bmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(s):=s^4\sqrt{1-s^2}^{10} \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} \mathrm{sen}(\theta)^4\sqrt{1-\mathrm{sen}(\theta)^2}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\,ds\right)
\end{array}$$

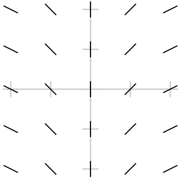
Questão 2: gabarito do item a

$$
[\text{EDOVSG}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\displaystyle\int h(y)\,dy & = & \displaystyle\int g(x)\,dx \\
\| & & \| \\
H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\
H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\
& = & G(x)+C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array} \right)
$$

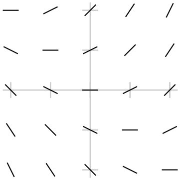
$$
[\text{EDOVSG}] \begin{bmatrix} g(x) := -2x \\ G(x) := -x^2 \\ h(x) := 2x \\ H(x) := x^2 \\ H^{-1}(x) := -\sqrt{x} \\ C_1 := 4 \\ C_2 := 29 \\ C_3 := 25 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl}
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{-2x}{2y} \\
2y\,dy & = & -2x\,dx \\
\displaystyle\int 2y\,dy & = & \displaystyle\int -2x\,dx \\
\| & & \| \\
y^2+4 & & -x^2+29 \\
y^2 & = & -x^2+29-4 \\
& = & -x^2+25 \\
-\sqrt{y^2} & = & -\sqrt{-x^2+25} \\
\| & & \\
y & &
\end{array} \right)
$$

Questão 3: gabarito

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$:



b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2}$:



Questão 4: gabarito

$$[\text{EDOLP}] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+7f'(x)+10f(x) &=& 0 \\ (D^2+7D+10)f &=& 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f &=& 0 \\ (D^2+7D+10)(\gamma e^{-2x}+\delta e^{-5x}) &=& 0 \end{array}\right)$$

$$[\text{EDOLG}_1] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+7f'(x)+10f(x) &=& 0 \\ (D^2+7D+10)f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+7D+10)(\gamma e^{-\alpha x}+\delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array}\right) \qquad [\text{S}_1] = \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix}$$

$$[\text{EDOLG}_2] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+jf'(x)+kf(x) &=& 0 \\ (D^2+jD+k)f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+jD+k)(\gamma e^{-\alpha x}+\delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array}\right) \qquad [\text{S}_2] = \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \\ j := 7 \\ k := 10 \end{bmatrix} \qquad [\text{S}_3] = \begin{bmatrix} j := (\alpha+\beta) \\ k := (\alpha\cdot\beta) \end{bmatrix}$$

$$[\text{EDOLG}_2][\text{S}_3] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+(\alpha+\beta)f'(x)+(\alpha\cdot\beta)f(x) &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))(\gamma e^{-\alpha x}+\delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array}\right) \qquad [\text{EDOLG}] = [\text{EDOLG}_2][\text{S}_3]$$

$$[\text{EDOLG}] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+(\alpha+\beta)f'(x)+(\alpha\cdot\beta)f(x) &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2+(\alpha+\beta)D+(\alpha\cdot\beta))(\gamma e^{-\alpha x}+\delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array}\right)$$

$$[\text{EDOLG}]\begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} f''(x)+(2+5)f'(x)+(2\cdot 5)f(x) &=& 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f &=& 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))f &=& 0 \\ (D^2+(2+5)D+(2\cdot 5))(\gamma e^{-2x}+\delta e^{-5x}) &=& 0 \end{array}\right), \quad \text{que é “muito parecido” com o [EDOLP]...}$$

Cálculo 2 - 2022.1

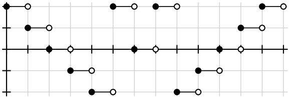
Prova de reposição (VR)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Questão 1

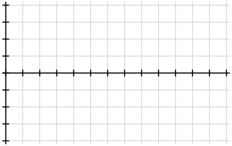
(Total: 1.0 pts)

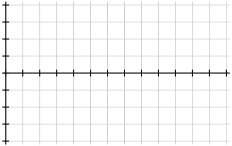
Sejam:

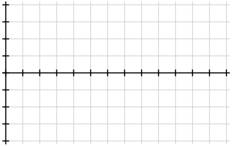
$f(x) =$ 

e $F(x) = \int_{t=6}^{t=x} f(x)\,dt$.

Faça o gráfico da $F(x)$.







Questão 1: gabarito

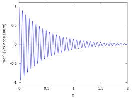
Questão 2

(Total: 6.0 pts)
Obs: esta questão é uma versão modificada de uma questão da P2.

EDOs *parecidas* com essa aqui

$$f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) = 0 \qquad (*)$$

vão ser incrivelmente importantes nos cursos de Física. Algumas delas descrevem "oscilações amortecidas", como esta figura:



A maioria dos livros "normais" de EDOs ensinam um modo de resolver a $(*)$ que eu acho muito árido. Nesta questão você vai ver um método pra resolver EDOs desse tipo que eu acho bem mais legal, e que eu aprendi num curso de Álgebra Linear. Nesse método a gente trata funções como vetores (de dimentão infinita) e a derivada como uma transformação linear (uma "matriz de dimensão infinita"). Quando eu precisar enfatizar que estou "em Álgebra Linear" eu vou escrever f e D ao invés de $f(x)$ e $\frac{d}{dx}$.

Isto aqui é uma demonstração quase completa do modo rápido de encontrar as "soluções básicas" e a "solução geral" da EDO $(*)$... ela é "quase completa" no sentido de que ela é o que as pessoas escrevem no quadro quando explicam esse método, mas sem a parte falada.

$$\begin{array}{rcl}
f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) &=& 0 \\
\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) + 7\frac{d}{dx}f(x) + 10f(x) &=& 0 \\
(\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} + 7\frac{d}{dx} + 10)f(x) &=& 0 \\
(D^2 + 7D + 10)f &=& 0 \\
(D^2 + (2+5)D + (2\cdot 5))f &=& 0 \\
(D+2)(D+5)f &=& 0 \\
(D+2)(D+5)e^{-5x} &=& (D+2)(De^{-5x} + 5e^{-5x}) \\
&=& (D+2)(-5e^{-5x} + 5e^{-5x}) \\
&=& (D+2)0 \\
&=& 0 \\
(D+5)(D+2)f &=& 0 \\
(D+5)(D+2)e^{-2x} &=& (D+5)(De^{-2x} + 2e^{-2x}) \\
&=& (D+5)(-2e^{-2x} + 2e^{-2x}) \\
&=& (D+5)0 \\
&=& 0 \\
(D^2 + 7D + 10)(\gamma e^{-2x} + \delta e^{-5x}) &=& 0
\end{array}$$

(Continua...)

Questão 2 (cont.)

...e isto aqui é uma versão mais curta da demonstração da página anterior:

$$\begin{array}{rcl} f''(x) + 7f'(x) + 10f(x) & = & 0 \\ (D^2 + 7D + 10)f & = & 0 \\ (D^2 + (2+5)D + (2\cdot 5))f & = & 0 \\ (D^2 + 7D + 10)(\gamma e^{-2x} + \delta e^{-5x}) & = & 0 \end{array}$$

Aqui que você já tem uma certa prática com problemas de "encontre a substituição certa" você vai fazer um problema de "encontre a generalização certa". Vou explicar ele em português.

a) **(0.2 pts)** Você vai definir [EDOLP] – de "EDO linear, caso particular" – como sendo o bloco de quatro igualdades acima. Faça isso na notação certa, que é algo como "[EDOLP] = ?".

b) **(2.3 pts)** Depois disso você vai procurar a "generalização certa" da [EDOLP], e na "substituição certa" que transforma ela na [EDOLP]. O seu objetivo é chegar em algo da forma [EDOLG][S] = [EDOLP]; o nome "[EDOLG]" vem de "EDO linear, caso geral". É difícil chegar na [EDOLG] direto, então vou dar instruções pra você chegar lá por chutar-e-testar.

Chame as suas tentativas de [EDOLG1], [EDOLG2], etc, e as suas substituições de [S1], [S2], etc. O seu objetivo é chegar numa [EDOLG$_n$] que não tenha mais os números 2, 5, 7 e 10; eles devem ter sido substuídos ou por variáveis ou por expressões que dependem dessas variáveis.

O seu objetivo *final* neste item é chegar num caso em que [S] seja só isto aqui:

$$[\mathrm{S}] = \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix}$$

E isto valha:

$$[\mathrm{EDOLG}] \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 5 \end{bmatrix} \text{“=”}[\mathrm{EDOLP}]$$

Eu pus o "=" entre aspas porque você vai não chegar a algo exatamente igual à [EDOLP], só em algo equivalente à EDOLP... como o que a gente fez nos exercícios de "justifique esse passo".

Questão 2 (cont.)

c) **(1.0 pts)** Seja:

$$[S2] = \begin{bmatrix} \alpha := 3 \\ \beta := 4 \\ \gamma := 1 \\ \delta := 0 \end{bmatrix}$$

Calcule o resultado disto aqui:

$$[\text{EDOO}] = [\text{EDOLG}][\text{S2}] = ?$$

d) **(2.5 pts)** No item (c) você definiu o [EDOO] ("outra EDO") como uma sequência de quatro igualdades. Se você tiver feito tudo certo até aqui, e você interpretar as quatro igualdades da [EDOO] do jeito correto, você vai ver que elas dizem algo como:

A função $f(x) = e^{20x}$
é solução da EDO
$f''(x) + 42f'(x) + 99f(x) = 0$

...só que eu pus números errados de propósito. Descubra os números certos – a única dica que eu posso dar aqui é que o 20 do e^{20x} tem que virar ou 3, ou 4, ou -3, ou -4 – e verifique que essa $f(x)$ realmente é solução dessa EDO.

Questão 2: gabarito

Questão 3

(Total: 3.0 pts)

Calcule as seguintes integrais indefinidas e teste os seus resultados.

a) **(1.0 pts)**

$$\int 2x + \frac{4}{x^3} + \cos 4x \, dx$$

b) **(2.0 pts)**

$$\int (3x+4)^{20} \, dx$$

Dica pro item (b): se você souber o método de mudança de variável que os livros usam você consegue calcular ela bem rápido usando a mudança de variável $u = 3x + 4$. Dá pra calcular essa integral por chutar-e-testar, mas dá um pouquinho mais de trabalho.

Gabarito
(sem os testes)

a)

$$x^2 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x$$

b)

$$\frac{(3x+4)^{21}}{63}$$

Cálculo 2 - 2022.1

Aula 35: dicas pra VS aberta
(versão muito incompleta!)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Substituição: semântica

Lembre que no curso eu insisti muito que a operação '[:=]' na maioria dos casos seria usada como uma notação complementar pra coisas que normalmente são escritas em português, e em várias situações eu pedi pra vocês fazerem exercícios do Miranda traduzindo-os pra notação com '[:=]'s... por exemplo, eu pedi pra vocês fazerem os exercícios de regra da cadeia da seção 3.5 do Miranda –

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=87

traduzindo-os pra notação com '[:=]'...

Eu conversei com alguns amigos meus, e todos eles (ok, confesso: todos os dois...) disseram o seguinte: todo mundo aprende as regras de como a substituição funciona estudando centenas de horas e descobrindo como ela deve funcionar. Por exemplo: as pessoas sabem que a fórmula da regra da cadeia da página 87 do Miranda tem que valer pra todas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em todo ponto. Vou dizer que funções definidas em todo $\mathbb{R}$ e diferenciáveis em todo ponto são "simples". Se a gente escolhe duas funções f e g "simples", substitui elas na fórmula da regra da cadeia, e obtém uma igualdade que é falsa, absurda, ou "que não compila", então tem algo errado com o nosso método de substituir – o método pra fazer a substituição que a gente achou que estava certo está errado, e a gente tem que consertá-lo.

Um dos indícios de que um aluno de Cálculo 1 estudou o suficiente é que toda vez que ele precisa aplicar alguma fórmula famosa ele obtém um caso particular dela do jeito certo.

Lembre que tem alguns tipos de erros que são indícios de que a pessoa não aprendeu algo importantíssimo de matérias anteriores, e ou não notou que precisava aprender aquilo depois, ou não deu bola pra isso...

Muitos dos meus colegas consideram que Cálculo 2 é uma das matérias que têm como funcionar como filtros que não deixam passar pessoas que cometem certos tipos de erros gravíssimos, como $2 + 3 = 23$, ou como aplicar a regra da cadeia errado e obter consequências absurdas dela, ou como aplicar o [TFC2] ou o [MV2] e obter consequências absurdas deles... e "Cálculo 2 tem que funcionar como filtro" quer dizer "Cálculo 2 tem que reprovar pessoas assim"... =/

Durante algumas aulas lá no início do curso eu tentei fazer uma experiência didática que talvez tenha sido uma má idéia. Foi isso aqui, principalmente nos dias em que a gente trabalhou o exercício 7:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-intro.pdf#page=10

Naquela época eu estava tentando fazer as pessoas considerarem operações de substituição que fossem puramente sintáticas e que pudessem transformar expressões que jeitos que não fizessem sentido matematicamente... ou seja, que fossem o contrário do "todo mundo aprende as regras de como a substituição funciona estudando centenas de horas e descobrindo como ela deve funcionar" de alguns parágrafos atrás. Bom, essa época passou, e agora a gente só está interessado em operações de substituição que "funcionam do jeito certo" – ou seja, que quando você aplica elas num teorema você sempre obtém casos particulares verdadeiros.

Substituição: erros comuns (sintáticos)

CMM confundiu maiúsculas e minúsculas. Exemplo: transformar $f(x)$ em $F(x)$.

ET erro de tipo

DA descartou o argumento. Exemplo: escrever só "f" ao invés de "$f(x)$".

DE derivada errada. Exemplo:

$$\left[\begin{smallmatrix} f(x):=(\operatorname{sen} x)^2 \\ f'(x):=(\cos x)^2 \end{smallmatrix}\right]$$

DPO descartou parte do original. Exemplo:

$$[RC]\left[\begin{smallmatrix} g(x):=42 \\ g'(x):=43 \end{smallmatrix}\right] = (f'(42x)\cdot 42)$$

Lembre que o [RC] é uma igualdade.

LEC lado esquerdo complicado demais. Dois exemplos:

$$\left[\, f(g(x)):=(\operatorname{sen} x)^5 \,\right],\ \left[\, \textstyle\int \frac{1}{x}\,dx:=\ln|x| \,\right],$$

NS não substituiu. Exemplo:

$$(f(x)g(x))\left[\begin{smallmatrix} f(x):=\operatorname{sen} x \\ g(x):=42x \end{smallmatrix}\right] = ((\operatorname{sen} x)g(x))$$

NSD não substituiu dentro (recursivamente). Exemplo:

$$(f(g(x)))\left[\begin{smallmatrix} f(x):=\operatorname{sen} x \\ g(x):=42x \end{smallmatrix}\right] = (\operatorname{sen}(g(x)))$$

SIMP simplificou. Exemplo:

$$(f'(g(x))\cdot g'(x))\left[\begin{smallmatrix} f'(x):=\frac{1}{x} \\ g(x):=x+42 \\ g'(x):=1 \end{smallmatrix}\right] = \left(\tfrac{1}{x+42}\right)$$

ao invés de "$= \left(\frac{1}{x+42}\cdot 1\right)$".

SP substituiu parênteses. Pra gente 'dx' e 'du' são como ')'s, e expressões como "$\cos x\,dx$" são tão incompletas como "$\cos x)$", e coisas como

$$\left[\, \cos x\,dx:=ds \,\right]$$

não fazem sentido. Lembre que nós passamos um tempo aprendendo a ver expressões como árvores e subexpressões como subárvores; quando a gente interpreta o 'dx' como um ')' a gente vê que '$\cos x\,dx$' nunca corresponde a uma subárvore.

Sobre as questões da prova

Na página 2 eu fiz papel de ogro que reprova todo mundo, MAAAS a VS aberta só tem como aumentar a nota de quem fizer ela – se alguém tirar uma nota muito baixa na VSA essa nota é ignorada – e ela vai ser sobre assuntos que vale muito a pena estudar... ela vai ter pelo menos duas questões de "encontre a generalização certa e aplique ela a este outro caso aqui", como a questão 4 da P2,

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P2.pdf#page=6

a continuação dela na VR,

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VR.pdf#page=4

A questão da VSA que vai parecida com essas daí vai ser bem mais fácil de fazer se você souber multiplicar números complexos. Dica (detalhes depois):

http://angg.twu.net/2019.2-C2/2019.2-C2.pdf#page=59

A outra questão de "encontra a generalização certa" vai ter a ver com substituição trigonométrica. Detalhes em breve também!

Cálculo 2 - 2022.1

VS aberta (VSA)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Questão 1

(Total: 3.0 pts)
Esta questão é continuação das questões sobre EDOs de 2a ordem ("lineares, com coeficientes constantes, etc, etc...") que eu pus na P2 e na VR. Quando eu puser essa prova na página do curso eu vou colocar links pra essas questões.

Em todas as questões desta prova uma lacuna como _ quer dizer "aqui vai ter um número mas eu não posso dizer qual é – você vai ter que descobrir ele"... por exemplo, $e^{\_x}$ pode ser e^{42x}, e^{-200x}, ou outras coisas assim.

Sejam:

$$
[\text{ECS}] = \left(\begin{array}{rcl}
e^{i\theta} & = & \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \\
\text{sen}\,-\theta & = & -\,\text{sen}\,\theta \\
\cos -\theta & = & -\cos\theta \\
e^{-i\theta} & = & \cos -\theta + i\,\text{sen}\,-\theta \\
 & = & \cos -\theta - i\,\text{sen}\,\theta \\
 & = & \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \\
e^{i\theta} + e^{-i\theta} & = & 2\cos\theta \\
e^{i\theta} - e^{-i\theta} & = & 2i\,\text{sen}\,\theta \\
\cos\theta & \overset{(9)}{=} & \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
\text{sen}\,\theta & \overset{(10)}{=} & \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
\cos k\theta & \overset{(11)}{=} & \frac{1}{2}(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) \\
\text{sen}\,k\theta & \overset{(12)}{=} & \frac{1}{2i}(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} + e^{(\alpha-\beta i)\theta} & = & e^{\alpha}(e^{\beta i\theta} + e^{-\beta i\theta}) \\
 & = & 2\,e^{\alpha}\cos\beta\theta \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} - e^{(\alpha-\beta i)\theta} & = & e^{\alpha}(e^{\beta i\theta} - e^{-\beta i\theta}) \\
 & = & 2i\,e^{\alpha}\cos\beta\theta
\end{array} \right)
$$

$$
[\text{EDOLG}] = \left(\begin{array}{rcl}
f''(x) + (\alpha+\beta)f'(x) + (\alpha\cdot\beta)f(x) & = & 0 \\
(D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))f & = & 0 \\
(D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))f & = & 0 \\
(D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))(\gamma e^{-\alpha x} + \delta e^{-\beta x}) & = & 0
\end{array} \right)
$$

Eu vou usar notações como $[\text{ECS}_9]$ e $[\text{ECS}_{13..14}]$ pra me referir a linhas individuais e a sequências contíguas de linhas do [ECS].
Todas as linhas são fáceis de demonstrar a partir da $[\text{ECS}_1]$, mas muita gente tinha dificuldade em passar das igualdades (9) e (10) pras (11) e (12), porque isso precisa de uma substituição como $[\theta := k\theta]$.
A $[\text{ECS}_1]$ é complicada de demonstrar – nos semestres "normais" a gente via uma introdução a séries de Taylor pra se convencer de que a $[\text{ECS}_1]$ é verdade, mas a gente não via uma demonstração formal da $[\text{ECS}_1]$.

a) **(0.2 pts)** Calcule o resultado da substituição

$$
[\text{EDOLG}] \begin{bmatrix} \alpha := -2 + 10i \\ \beta := -2 - 10i \end{bmatrix}
$$

e chame-o de $[\text{E}_1]$.

b) **(2.8 pts)** As idéias da [ECS] devem indicar que existe uma função da forma $g_1(x) = e^{\_x}\cos(\_x)$ que é solução da EDO da primeira linha da resposta do seu item (a). Chame esta EDO de $(*)$ e verifique se a sua função $g_1(x)$ é solução da EDO $(*)$. Se não for chute outra função – chame-a de $g_2(x)$ – e veja se ela é solução da EDO $(*)$. Se ainda não for faça outro chute-e-teste, e repita. Lembre de NUNCA de apagar um chute-e-teste que não resolveu o seu problema original.

Questão 1: gabarito

$$[\text{EDOLG}] = \left(\begin{array}{rcl} f''(x) + (\alpha+\beta)f'(x) + (\alpha\cdot\beta)f(x) &=& 0 \\ (D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))f &=& 0 \\ (D^2 + (\alpha+\beta)D + (\alpha\cdot\beta))(\gamma e^{-\alpha x} + \delta e^{-\beta x}) &=& 0 \end{array} \right)$$

$$[\text{E}_1] = [\text{EDOLG}] \begin{bmatrix} \alpha := (-2+10i) \\ \beta := (-2-10i) \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{rcl} f''(x) + ((-2+10i)+(-2-10i))f'(x) + ((-2+10i)\cdot(-2-10i))f(x) &=& 0 \\ (D^2 + ((-2+10i)+(-2-10i))D + ((-2+10i)\cdot(-2-10i)))f &=& 0 \\ (D^2 + ((-2+10i)+(-2-10i))D + ((-2+10i)\cdot(-2-10i)))f &=& 0 \\ (D^2 + ((-2+10i)+(-2-10i))D + ((-2+10i)\cdot(-2-10i)))(\gamma e^{-(-2+10i)x} + \delta e^{-(-2-10i)x}) &=& 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{rcl} f''(x) + (-4)f'(x) + 104f(x) &=& 0 \\ (D^2 + (-4)D + 104)f &=& 0 \\ (D^2 + (-4)D + 104)f &=& 0 \\ (D^2 + (-4)D + 104)(\gamma e^{-(-2+10i)x} + \delta e^{-(-2-10i)x}) &=& 0 \end{array} \right)$$

A última linha acima diz que $e^{2x}e^{-10ix}$ e $e^{2x}e^{10ix}$
são soluções da EDO $f''(x) - 4f'(x) + 104f(x) = 0$. $\quad (*)$
Então $e^{2x}e^{-10ix} + e^{2x}e^{10ix} = e^{2x}(2\cos 10x)$
também deve ser solução dessa EDO, e $e^{2x}\cos 10x$ também.
Sejam $g(x) = e^{2x}\cos 10x$ e $h(x) = e^{2x}\,\mathrm{sen}\,10x$. Daí:

$$\begin{array}{rcl} g'(x) &=& 2g(x) - 10h(x) \\ h'(x) &=& 2h(x) + 10g(x) \\ g''(x) &=& -96g(x) - 40h(x) \\ h''(x) &=& -96h(x) + 40g(x) \\ g''(x) - 4g'(x) + 104g(x) &=& (-96g(x) - 40h(x)) - 4(2g(x) - 10h(x)) + 104g(x) \\ &=& 0 \\ h''(x) - 4h'(x) + 104h(x) &=& (-96h(x) + 40g(x)) - 4(2h(x) + 10g(x)) + 104h(x) \\ &=& 0 \end{array}$$

e portanto tanto $g(x)$ quanto $h(x)$ são soluções da EDO $(*)$.

Questão 2

(Total: 7.0 pts)
Alguns livros ensinam substituição trigonométrica começando direto por casos complicados em que o "termo malvado" da integral é este:

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}$$

Seja:

$$[\mathrm{T}] = \left(\begin{array}{rcl} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2} & = & \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2}\beta^2 x^2} \\ & = & \sqrt{\alpha^2 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2\right)} \\ & = & \sqrt{\alpha^2}\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} x^2} \\ & = & \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} x\right)^2} \end{array} \right)$$

a) **(0.2 pts)** Calcule:

$$[\mathrm{T}] \begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 3 \end{bmatrix}$$

b) **(2.8 pts)** Digamos que a gente quer transformar esta integral

$$\int x^2 \sqrt{4 - 9x^2}\, dx \qquad (**)$$

numa mais simples usando substituição trigonométrica. Use o truque do item (a), o $[\mathrm{MV}_2]$ e as idéias do gabarito da questão 1 da P2 pra transformar a $(**)$ em "algo em θ".

c) **(4.0 pts)** Digamos que $(***)$ é esta integral:

$$\int x^\gamma \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}^{\,\delta}\, dx \qquad (***)$$

Mostre que uma mudança de variável com $u = \frac{\beta}{\alpha} x$ transforma esta integral numa da forma:

$$\_ \int u^{\_} \left(\sqrt{1 - u^2}\right)^{\_}\, dx$$

Dica: comece com o caso particular em que $\gamma = 1$ e $\delta = 1$ e depois tente casos mais complicados.

Peçam dicas!!!

Questão 2: gabarito

a) [T] $\begin{bmatrix} \alpha := 2 \\ \beta := 3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \sqrt{2^2 - 3^2x^2} & = & \sqrt{2^2 - \frac{2^2}{2^2}3^2x^2} \\ & = & \sqrt{2^2\left(1 - \frac{3^2}{2^2}x^2\right)} \\ & = & \sqrt{2^2}\,\sqrt{1 - \frac{3^2}{2^2}x^2} \\ & = & 2\sqrt{1 - \left(\frac{3}{2}x\right)^2} \end{array} \right)$

b)

$$\begin{array}{rcl} \int x^2\sqrt{4-9x^2}\,dx & = & \int x^2\sqrt{2^2-3^2x^2}\,dx \\ & = & \int x^2 \cdot 2\sqrt{1-(\frac{3}{2}x)^2}\,dx \\ & = & \int (\frac{2}{3}u)^2 \cdot 2\sqrt{1-u^2} \cdot \frac{2}{3}\,du \\ & = & \int (\frac{2}{3})^3 \cdot 2 \cdot u^2\sqrt{1-u^2}\,du \\ & = & \frac{16}{27}\int u^2\sqrt{1-u^2}\,du \\ & = & \frac{16}{27}\int (\operatorname{sen}\theta)^2\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} \cdot \cos\theta\,d\theta \\ & = & \frac{16}{27}\int (\operatorname{sen}\theta)^2\sqrt{(\cos\theta)^2} \cdot \cos\theta\,d\theta \\ & = & \frac{16}{27}\int (\operatorname{sen}\theta)^2\cos\theta \cdot \cos\theta\,d\theta \\ & = & \frac{16}{27}\int (\operatorname{sen}\theta)^2(\cos\theta)^2\,d\theta \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} u=\frac{3}{2}x \\ x=\frac{2}{3}u \\ du=\frac{3}{2}dx \\ dx=\frac{2}{3}du \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u=\operatorname{sen}\theta \\ \frac{du}{d\theta}=\cos\theta \\ du=\cos\theta\,d\theta \end{bmatrix}$$

Questão 2: gabarito (cont.)

c)

$$
\begin{aligned}
\int x^\gamma \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}^\delta \, dx &= \int x^\gamma \sqrt{\alpha^2 (1 - \tfrac{\beta^2}{\alpha^2} x^2)}^\delta \, dx \\
&= \int x^\gamma \left(\sqrt{\alpha^2 (1 - (\tfrac{\beta}{\alpha} x)^2)} \right)^\delta \, dx \\
&= \int x^\gamma \left(\alpha \sqrt{(1 - (\tfrac{\beta}{\alpha} x)^2)} \right)^\delta \, dx \\
&= \alpha^\gamma \int x^\gamma \left(\sqrt{(1 - (\tfrac{\beta}{\alpha} x)^2)} \right)^\delta \, dx \\
&= \alpha^\gamma \int (\tfrac{\alpha}{\beta} u)^\gamma \left(\sqrt{(1 - u^2)} \right)^\delta \cdot \tfrac{\alpha}{\beta} \, du \\
&= \alpha^\gamma (\tfrac{\alpha}{\beta})^{\gamma+1} \int u^\gamma \sqrt{(1 - u^2)}^\delta \, du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
u = \frac{\beta}{\alpha} x \\
x = \frac{\alpha}{\beta} u \\
du = \frac{\beta}{\alpha} dx \\
dx = \frac{\alpha}{\beta} du
\end{bmatrix}
$$

EM TODAS AS QUESTÕES DESTA PROVA UMA LACUNA COMO __ QUER DIZER "AQUI VAI TER UM NÚMERO MAS EU NÃO POSSO DIZER QUAL É - VOCÊ VAI TER QUE DESCOBRIR ELE".

$\boxed{0.2 \text{ PTS}}$

QUESTÃO 1a:

CALCULE O RESULTADO DA SUBSTITUIÇÃO

$$[\text{EDOLG}]\begin{bmatrix} a:=-2+10i \\ \beta:=-2-10i \end{bmatrix}$$

E CHAME-O DE $[E_1]$.

$\boxed{2.8 \text{ PTS}}$

QUESTÃO 1B: AS IDÉIAS DA [ECS] DEVEM INDICAR QUE EXISTE UMA FUNÇÃO $g_1(x)$ DA FORMA $g_1(x) = e^{-x}\cos(-x)$ QUE É SOLUÇÃO DA EDO DA PRIMEIRA LINHA DA RESPOSTA DO SEU ITEM a.

CHAME ESTA EDO ~~DE (*)~~, E VERIFIQUE SE A SUA FUNÇÃO $g(x)$ É SOLUÇÃO DA EDO (*).

SE NÃO FOR, CHUTE OUTRA FUNÇÃO - CHAME-A DE $g_2(x)$ - E VEJA SE ELA É SOLUÇÃO DA EDO (*). SE AINDA NÃO FOR FAÇA OUTRO CHUTE E TESTE, E REPITA. LEMBRE DE NUNCA APAGAR UM CHUTE-E-TESTE QUE NÃO RESOLVEU O SEU PROBLEMA ORIGINAL.

QUESTÃO 2

(TOTAL: 7.0 PONTOS)

ALGUNS LIVROS ENSINAM SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA COMEÇANDO DIRETO POR CASOS COMPLICADOS EM QUE O "TERMO MALVADO" DA INTEGRAL É ESTE:

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 x^2}.$$

SEJA:

$$[T] = \left[\begin{array}{rl} \sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2} & = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2}\beta^2x^2} \\ & = \sqrt{\alpha^2\left(1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2\right)} \\ & = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2} \\ & = \alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)^2} \end{array}\right]$$

2a) (0.2 PTS) CALCULE $[T]\begin{bmatrix} \alpha:=2 \\ \beta:=3 \end{bmatrix}$.

2b) (2.8 PTS) DIGAMOS QUE A GENTE QUER TRANSFORMAR ESTA INTEGRAL

$$\int x^2\sqrt{4-9x^2}\,dx \qquad (\star\star)$$

NUMA MAIS SIMPLES USANDO SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA. USE O TRUQUE DO ITEM 2a, O [MV2] E AS IDÉIAS DO GABARITO DA QUESTÃO 1 DA P2 PRA TRANSFORMAR A $(\star\star)$ EM "ALGO EM θ".

2c) (4.0 PTS) DIGAMOS QUE $(\star\star\star)$ É ESTA INTEGRAL:

$$\int x^\gamma \sqrt{\alpha-\beta^2x^2}^{\,\delta}\,dx \qquad (\star\star\star).$$

MOSTRE COMO UMA MUDANÇA DE VARIÁVEL COM $u = \frac{\beta}{\alpha}x$ TRANSFORMA ESTA INTEGRAL NUMA DA FORMA

$$\_\_\int u^{\_\_}\sqrt{1-u^2}^{\,\_\_}\,du.$$

DICA: COMECE COM O CASO PARTICULAR EM QUE $\gamma=1$ E $\delta=1$ E DEPOIS TENTE CASOS MAIS COMPLICADOS.

PEÇAM DICAS!

DICAS:

(↑ Vou digitar isso aqui depois!)

Gabarito da questão 1 da P2

(Com vários chutes e testes – pra questão 2)

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{TRIG}_1] & = & \left(\displaystyle\int s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\,ds = \int \mathrm{sen}(\theta)^4\sqrt{1-(\mathrm{sen}(\theta))^2}^{10}\cos(\theta)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\left[\begin{smallmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(\mathrm{sen}(x))\cdot\cos(x)\,dx = \int_{u=\mathrm{sen}(a)}^{u=\mathrm{sen}(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\left[\begin{smallmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} f'(\mathrm{sen}(\theta))\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} f'(s)\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\left[\begin{smallmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(x):=\sqrt{x}^{10} \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} \sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} \sqrt{s}^{10}\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\left[\begin{smallmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(x):=1-\sqrt{x}^{10} \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} 1-\sqrt{\mathrm{sen}(\theta)}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} 1-\sqrt{s}^{10}\,ds\right) \\
[\mathrm{MV}_2]\left[\begin{smallmatrix} g(x):=\mathrm{sen}(x) \\ g'(x):=\cos(x) \\ x:=\theta \\ u:=s \\ f'(s):=s^4\sqrt{1-s^2}^{10} \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\displaystyle\int_{\theta=a}^{\theta=b} \mathrm{sen}(\theta)^4\sqrt{1-\mathrm{sen}(\theta)^2}^{10}\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int_{s=\mathrm{sen}(a)}^{s=\mathrm{sen}(b)} s^4\sqrt{1-s^2}^{10}\,ds\right)
\end{array}
$$

Cálculo 2 - 2022.1

VS extra - 31/ago/2022

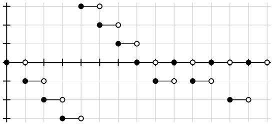
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Questão 1

(Total: 1.0 pts)

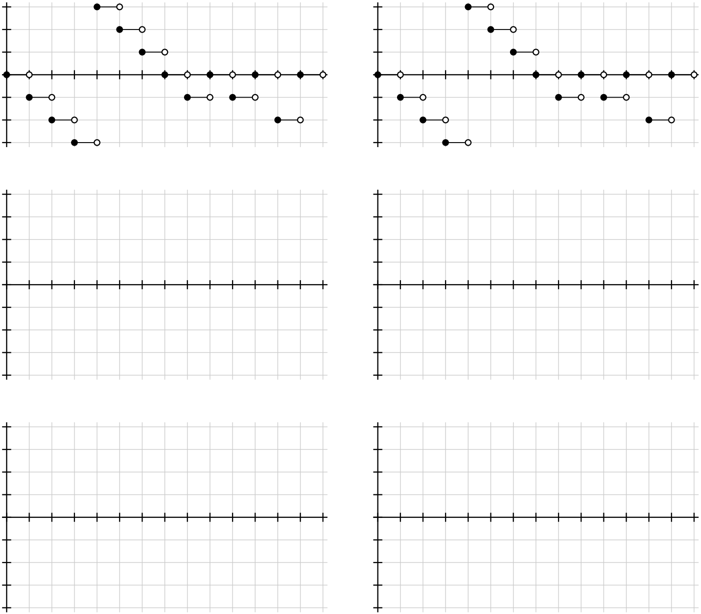
Seja

$f(x) =$  .

a) **(0.5 pts)** Represente graficamente a função $F(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt$.

b) **(0.5 pts)** Represente graficamente a função $G(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt$.

Use os grids da próxima folha. Indique claramente qual desenho é a resposta de cada item e quais desenhos são só rascunho.



Questão 2
(Total: 3.0 pts)

Lembre que a fórmula da integração por partes é esta aqui:

$$[\mathrm{IP}] = \left(\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right)$$

e que se substituirmos $f(x)$ por x^4 e $g(x)$ por e^{5x} nela obtemos isto:

$$\int x^4 \cdot 5e^{5x}\,dx = (x^4 \cdot e^{5x}) - \int 4x^3 \cdot e^{5x}\,dx$$

Calcule

$$\int x \cdot e^{42x}\,dx.$$

Pontuação:

a) **(0.5 pts)** pelo resultado correto,

b) **(2.5 pts)** se você conseguir escrever as contas disto no formato que nós vimos em sala, com os '='s alinhados e as justificativas (corretas!) à direita.

Questão 3
(Total: 3.0 pts)

Calcule:

$$\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^3\,dx.$$

Questão 4

(Total: 3.0 pts)
Lembre que nós vimos que o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis pode ser escrito como a demonstração [M] abaixo, e a "fórmula" para resolver EDOs com variáveis separáveis pode ser escrita como [F]:

$$[M] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl}
\frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\
\| & & \| \\
H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\
H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\
 & = & G(x)+C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)$$

$$[F] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl}
\frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array}\right)$$

Digamos que queremos resolver esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{5y^4} \qquad (*)$$

a) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral da EDO $(*)$.

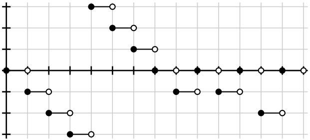
b) **(1.0 pts)** Teste a solução do seu item (a).

c) **(0.5 pts)** Encontre a solução da EDO que passa pelo ponto $(x,y) = (2,2)$.

d) **(1.0 pts)** Teste a solução do seu item (c).

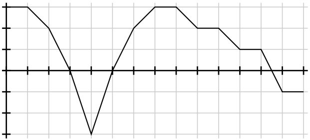
Questão 1: gabarito

$$f(x) \quad = $$



$$F(x) \;=\; \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt \quad = $$

$$G(x) \;=\; \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \quad = $$



Questão 2: gabarito

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{42x}}_{g'(x)}\,dx &\overset{(1)}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{42}e^{42x}}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{42}e^{42x}}_{g(x)}\,dx \\
&\overset{(2)}{=} \tfrac{1}{42}xe^{42x} - \tfrac{1}{42}\int e^{42x}\,dx \\
&\overset{(3)}{=} \tfrac{1}{42}xe^{42x} - \tfrac{1}{42}\tfrac{1}{42}e^{42x}
\end{aligned}$$

(1): por [IP] com $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{42}e^{42x}$

(2): por $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, com $k = \frac{1}{42}$ e $f(x) = e^{42x}$

(3): por $\int e^{42x}\,dx = \frac{1}{42}e^{42x}$

Questão 3: gabarito

$$
\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^3 \, dx \\
= \;& \int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
= \;& \int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^3 \, \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \, \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
= \;& \int s^3 (1 - s^2) \, ds \\
= \;& \int s^3 - s^5 \, ds \\
= \;& \frac{s^4}{4} - \frac{s^6}{6} \\
= \;& \frac{(\operatorname{sen} x)^4}{4} - \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{bmatrix}
$$

Questão 4: gabarito

Sejam:

$g(x) = 3x^2$,
$h(y) = 5y^4$,
$G(x) = x^3$,
$H(y) = y^5$,
$H^{-1}(y) = y^{1/5}$.

Isso dá a solução $f(x) = y = H^{-1}(G(x) + C_3) = (x^3 + C_3)^{1/5}$.

Temos $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{5}(x^3 + C_3)^{-4/5} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{5(x^3+C_3)^{4/5}}$

e $\frac{g(x)}{h(y)} = \frac{3x^2}{5y^4} = \frac{3x^2}{5f(x)^4} = \frac{3x^2}{5((x^3+C_3)^{1/5})^4} = \frac{3x^2}{5(x^3+C_3)^{4/5}}$,

e portanto $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$.

Se $(x, y) = (2, 2)$ então $(x, f(x)) = (2, 2)$, $f(2) = 2$,
$(2^3 + C_3)^{1/5} = 2$, $(2^3 + C_3) = 2^5$, $8 + C_3 = 32$, $C_3 = 24$.

Testando: $f(2) = (2^3 + C_3)^{1/5} = (8 + 24)^{1/5} = 32^{1/5} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Critérios de correção

Questão 1:
Cada uma das duas figuras vale 0.5 pontos se for feita corretamente. Cada segmento (com $\Delta x = 1$) inexistente ou com inclinação errada desconta 0.1 pontos – ou seja, uma figura com 5 ou mais 6 segmentos errados vale 0.

Questão 2:
Item a: aqui eu aceitei respostas sem justificativa.
Item b: o "formato que nós vimos em sala" é este aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-tudo.pdf#page=116
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-tudo.pdf#page=8

Questão 3:
Se a pessoa tiver escrito o resultado certo isso vale 0.3 pontos. Os outros 2.7 pontos são pra quem conseguiu fazer as contas passo a passo de uma forma que cada passo ficasse legível (e correto). Nós trabalhamos exemplos bem parecidos com esse — mas com outros expoentes — em sala, e um dos PDFs que eu recomendei muito que os alunos estudassem por ele pra P2, pra VR e pra VS também tinha uma integral de potências de senos e cossenos bem parecida com essa, então aqui dá pra ser bem exigente na correção.

Questão 4:
As fórmulas/figuras [M] e [F] são pra lembrar os alunos da questão de EDOs com variáveis separáveis que eles fizeram na P2. Aqui eu esperava que os alunos fizessem contas legíveis, feitas passo a passo, e chegassem nos resultados corretos. Note que os itens de "encontre a solução" valem só 0.5 pontos cada um e que os itens de "teste a solução" valem bem mais, 1.5 pontos cada um.