Cálculo 3 - 2022.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Questão 1.

(Total: 7.0 pts)
Quando nós fizemos os exercícios do barranco – reproduzido na próxima página – nós vimos que as duas faces mais complicadas dele eram a) a face que continha os pontos $(3,5,2)$, $(4,5,3)$ e $(3,6,3)$ e b) a face que continha os pontos $(7,2,2)$, $(8,2,2)$ e $(7,3,4)$. Vou chamar essas faces de F_a e F_b e usar os mesmos símbolos pras funções dos planos associados a elas: quando $(x,y) \in F_a$ temos $z(x,y) = F_a(x,y)$ e quando $(x,y) \in F_b$ temos $z(x,y) = F_b(x,y)$.

a) **(0.2 pts)** Dê a equação do plano $F_a(x,y)$.

b) **(0.2 pts)** Dê a equação do plano $F_b(x,y)$.

c) **(2.0 pts)** Mostre em qual região do barranco os numerozinhos obedecem $z = F_a(x,y)$ e em qual região eles obedecem $z = F_b(x,y)$. As faces F_a e F_b têm uma aresta em comum?

d) **(0.6 pts)** Sejam $P_0 = (6,2.5)$, $P_1 = (6.5,2.5)$ e $P_2 = (7,2.5)$. Descubra - no olhômetro mesmo - quem são z_x e z_y nos pontos P_0, P_1 e P_2.

e) **(2.0 pts)** O Bortolossi define a derivada direcional por essa fórmula aqui:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

Calcule

$$\frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

quando $\mathbf{p} = P_1$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(0.5,-0.5)}$, para os seguintes valores de t: $t = 3$, $t = 2$, $t = 1$, $t = 0.5$, $t = -3$, $t = -2$, $t = -1$, $t = -0.5$.

f) **(2.0 pts)** Lembre que o gradiente de uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ é definido como $\vec{\nabla} G(x,y) = \overrightarrow{(G_x(x,y), G_y(x,y))}$. Em "notação de físicos" isso vira $\vec{\nabla} z = \overrightarrow{(z_x, z_y)}$, e a nossa convenção pra notação pra desenhar vetores gradientes é que cada $\vec{\nabla} G(x,y)$ é desenhado como $G(x,y) + \vec{\nabla} G(x,y)$. Represente em um dos diagramas de numerozinhos da próxima página $\vec{\nabla} F$ para estes valores de (x,y): $(2,1)$, $(2,5)$, $(5,3)$, $(6,6)$, $(7,1)$, $(7,2.5)$.

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

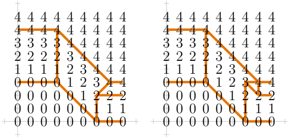
4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

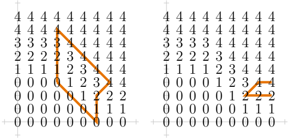
4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	4	4	4	4	4
2	2	2	2	3	4	4	4	4
1	1	1	1	2	3	4	4	4
0	0	0	0	1	2	3	4	4
0	0	0	0	0	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1: gabarito (muito incompleto)

Dois modos de dividir o barranco em faces:

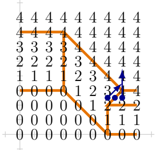


Eu prefiro o primeiro modo porque ele tem uma face a menos, mas vou aceitar respostas que usavam o segundo modo.
As faces F_a e F_b são:

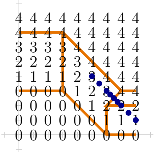


a) $F_a(x,y) = x + y - 6$
b) $F_b(x,y) = 2y - 2$
c) Veja as figuras acima.
d) Em $P_0 = (6, 2.5)$ temos $z = 2.5$, $z_x = 1$, $z_y = 1$;
Em $P_1 = (6.5, 2.5)$ temos $z = 3$, e nesse ponto z_x e z_y não existem;
Em $P_2 = (7, 2.5)$ temos $z = 3$, $z_x = 0$, $z_y = 2$.

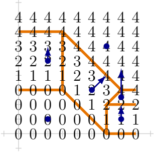
Item d:



Item e:



Item f:



Questão 2.

(Total: 3.0 pts)

No capítulo VI o Thompson calcula $\frac{d}{dx}((x^2+c)+(ax^4+b))$ organizando as contas mais ou menos desta forma:

$$\begin{array}{rcl} y &=& (x^2+c)+(ax^4+b) \\ \frac{dy}{dx} &=& \frac{d((x^2+c)+(ax^4+b))}{dx} \\ &=& \frac{d(x^2+c)}{dx}+\frac{d(ax^4+b)}{dx} \\ &=& 2x+4ax^3 \end{array}$$

E no capítulo IX – "Introducing a useful dodge" – o Thompson mostra como a gente pode simplificar contas como essa introduzindo "variáveis dependentes" novas... por exemplo, $w=x^2+c$. Além disso ele trata dy e dw como variáveis que dependem de x e dy.

Use estes truques pra calcular $\frac{dy}{dx}$ quando:

$$y=\sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}\sqrt[3]{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$$

Gabarito

Veja o livro do Thompson! Ó:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=81