Cálculo 3 - 2022.1

Aula 29: funções homogêneas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C3.html

Introdução

No semestre passado eu apresentei funções homogêneas de um jeito que demorou muito... esse aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-funcoes-homogeneas.pdf

Vou tentar outro jeito agora.
Normalmente a gente começa a ouvir falar de funções homogêneas por polinômios homogêneos, que são polinômios que todos os monômios deles têm o mesmo grau... por exemplo,

$$2x^3y^4 + 5x^4y^3 - 6x^7$$

é um polinômio em duas variáveis, x e y, que é homogêneo de grau 7, porque x^3y^4, x^4y^3, e x^7 são monômios de grau 7. Qualquer polinômio em duas variáveis pode ser decomposto em polinômios homogêneos; por exemplo:

$$\begin{array}{rcll} F(x,y) & = & a & \leftarrow \text{ parte homogênea de grau 0} \\ & + & bx + cy & \leftarrow \text{ parte homogênea de grau 1} \\ & + & dx^2 + exy + fy^2 & \leftarrow \text{ parte homogênea de grau 2} \\ & + & gx^3 + hxy^2 + jx^2y + ky^3 & \leftarrow \text{ parte homogênea de grau 3} \\ & + & \ldots & \end{array}$$

Repare que fica implícito que $a, b, \ldots, k, \ldots$ são constantes.

Uma função em duas variáveis, $F(x,y)$, homogênea de grau k, é uma que obedece isso aqui:

$$[\mathrm{H}_k] \quad = \quad \left(\; F(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1) \quad = \quad \lambda^k \cdot F(x_1, y_1) \; \right)$$

ou, equivalentemente,

$$[\mathrm{H}'_k] \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (x_2, y_2) & = & \lambda \cdot (x_1, y_1) \\ \text{então} & F(x_2, y_2) & = & \lambda^k \cdot F(x_1, y_1) \end{array} \right)$$

O "$\forall x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda \in \mathbb{R}$" fica implícito. Veja estas páginas da Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_polynomial
https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function

Eu inventei nomes curtos — $[\mathrm{H}_k]$ e $[\mathrm{H}'_k]$ — pra essas propriedades pra poder usar a operação '$[:=]$' de Cálculo 2,
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=11

pra obter casos particulares. Por exemplo, se a função $F(x,y)$ é homogênea de grau 2 então estes casos particulares valem:

$$[\mathrm{H}_k] \begin{bmatrix} x_1:=3 \\ y_1:=4 \\ x_2:=30 \\ y_2:=40 \\ \lambda:=10 \\ k:=2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\; F(10 \cdot 3, 10 \cdot 4) \quad = \quad 10^2 \cdot F(3,4) \; \right)$$

$$[\mathrm{H}'_k] \begin{bmatrix} x_1:=3 \\ y_1:=4 \\ x_2:=30 \\ y_2:=40 \\ \lambda:=10 \\ k:=2 \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (30, 40) & = & 10 \cdot (3,4) \\ \text{então} & F(30, 40) & = & 10^2 \cdot F(3,4) \end{array} \right)$$

Vamos definir $[\mathrm{H}_1], [\mathrm{H}_2], [\mathrm{H}_3], \ldots, [\mathrm{H}'_1], [\mathrm{H}'_2], [\mathrm{H}'_3], \ldots$ "do jeito óbvio" — $[\mathrm{H}_2] = [\mathrm{H}_k][k := 2]$, $[\mathrm{H}'_3] = [\mathrm{H}_k][k := 3]$, etc. No exercício abaixo você vai entender os detalhes disso.

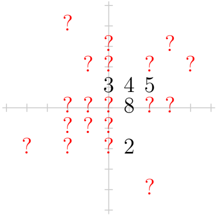
Exercício 1.
Complete:

a) $[\mathrm{H}_k][k := 2] \;\; = \;\; ?$

b) $[\mathrm{H}'_k][k := 3] \;\; = \;\; ?$

Exercício 2

Digamos que $F(x, y)$ é uma função de duas variáveis, que não precisa ser um polinômio em duas variáveis — ela pode ser algo bem mais esquisito.
Digamos que $F(x, y)$ seja homogênea de grau 2.
Digamos que a figura à direita diz coisas que a gente sabe sobre a função F e coisas que a gente quer descobrir sobre ela — por exemplo, o numerozinho 2 na posição $(1, 1)$ diz que sabemos que $F(1, 1) = 4$, e o '?' na posição $(3, 3)$ diz que queremos saber $F(3, 3)$. Como F obedece $[\mathrm{H}_2']$, este caso particular do $[\mathrm{H}_2']$ tem que valer:



$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (x_2, y_2) & = & \lambda \cdot (x_1, y_1) \\ \text{então} & F(x_2, y_2) & = & \lambda^2 \cdot F(x_1, y_1) \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} x_1 := 1 \\ y_1 := 1 \\ x_2 := 3 \\ y_2 := 3 \\ \lambda := 3 \end{array} \right] \\
= &\left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (3, 3) & = & 3 \cdot (1, 1) \\ \text{então} & F(3, 3) & = & 3^2 \cdot F(1, 1) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

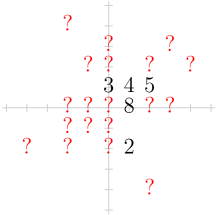
E portanto $F(3, 3) = 3^2 \cdot F(1, 1) = 3^2 \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$.

Exercício 2 (cont.)

a) O que você tem que pôr em cada '?' daqui

$$\left(\begin{array}{lrcl} \text{Se} & (x_2, y_2) & = & \lambda \cdot (x_1, y_1) \\ \text{então} & F(x_2, y_2) & = & \lambda^2 \cdot F(x_1, y_1) \end{array} \right) \begin{bmatrix} x_1 := ? \\ y_1 := ? \\ x_2 := ? \\ y_2 := ? \\ \lambda := ? \end{bmatrix}$$

pra descobrir o valor de $F(3,0)$ a partir do valor de $F(1,0)$?



b) Qual vai ser o valor de $F(3,0)$?

c) O que você tem que pôr em cada '?' acima pra descobrir $F(-2,4)$ a partir de $F(1,-2)$?

d) Qual vai ser o valor de $F(-2,4)$?

e) Qual vai ser o valor de $F(-1,-1)$?

f) Escreva as contas do item (e) de forma que cada '=' seja fácil de justificar. Baseie-se neste jogo aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-der-fun-inv.pdf#page=4

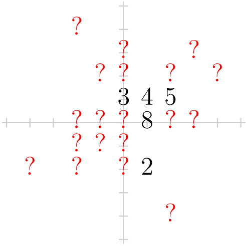
g) Descubra os valores da F nos outros '?'s da figura à direita.

Exercício 3.

No exercício 2 nós supusemos que a função $F(x,y)$ era homogênea de grau 2. Agora nós vamos usar a mesma figura, mas vamos supor que a $F(x,y)$ é homogênea de grau 1.

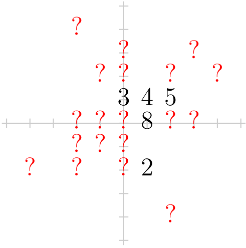
Digamos — como no exercício anterior — que os numerozinhos da figura à direita indicam coisas que a gente sabe sobre a função $F(x,y)$ e que os '?' indicam coisas que a gente quer descobrir.

Descubra o valor dessa $F(x,y)$ em cada '?' da figura.



Exercício 4.

No exercício 2 nós supusemos que a função $F(x,y)$ era homogênea de grau 2, e no exercício 3 nós supusemos que ela era homogênea de grau 1. Agora nós vamos usar a mesma figura, mas vamos supor que a $F(x,y)$ é homogênea de grau 3.



Digamos — como no exercício anterior — que os numerozinhos da figura à direita indicam coisas que a gente sabe sobre a função $F(x,y)$ e que os '?' indicam coisas que a gente quer descobrir.

Descubra o valor dessa $F(x,y)$ em cada '?' da figura.

Exercício 5.

Vamos dizer que uma função $F(x,y)$ é *homogênea de grau k em torno do ponto* (x_0,y_0) quando ela obedece

$$\left(\ F(x_0+\lambda y_0, \Delta x+\lambda\Delta y) \ \ = \ \ \lambda^k F(x_0+y_0, \Delta x+\Delta y)\ \right)$$

-4	-2	0	2	4
-2	-1	0	1	2
0	0	0	0	0
2	1	0	-1	-2
4	2	0	-2	-4