Cálculo 2 - 2022.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Questão 1
(Total: 3.0 pts)

Calcule:

$$\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx\ .$$

Dicas: 1) Você provavelmente vai precisar de pelo menos duas mudanças de variável pra chegar no resultado final. 2) No curso nós vimos dois modos de fazer mudanças de variável de um jeito legível: um modo usava chaves sob subexpressões e o outro modo usava "caixinhas de anotações" como a abaixo,

$$\left[\begin{array}{c} u = \operatorname{sen} x \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x\,dx = du \\ x = \operatorname{arcsen} u \end{array}\right]$$

em que todas as outras linhas da caixinha eram consequência da primeira.

Questão 2
(Total: 2.0 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a "fórmula da integração por partes" seria esta aqui:

$$\text{[IP]} \quad = \quad \left(\int fg'\,dx \quad = \quad fg - \int f'g\,dx\right)$$

Mostre que aplicando integração por partes três vezes dá pra obter uma fórmula que transforma a integral $\int x^3 h'''(x)\,dx$ em algo bem mais simples. Aqui você vai poder omitir os argumentos das funções se quiser — note que na [IP] eu abreviei, por exemplo, '$f(x)$' para 'f'.

Nesta questão eu vou ver principalmente se você sabe os truques pra deixar as contas dela organizadas e legíveis.

Questão 3
(Total: 2.0 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a "fórmula" do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] \;=\; \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando $a = 1$, $b = 3$ e

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x < 2, \\ 2x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente $F(x)$ e $F'(x)$ e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhômetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

Questão 4
(Total: 2.0 pts)

Calcule:

$$\int \frac{4x+5}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

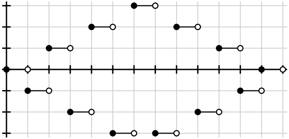
e teste o seu resultado.

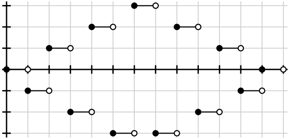
Questão 5
(Total: 1.0 pts)

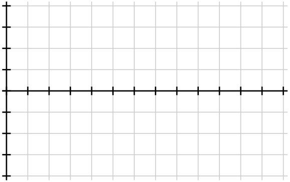
Seja $f(x)$ a função no topo da página seguinte. Seja

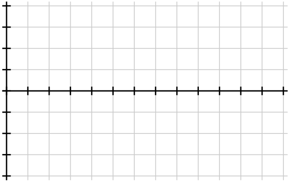
$$F(x) \;=\; \int_{t=2}^{t=x} f(x)\,dt.$$

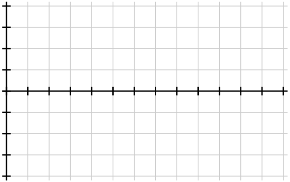
Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

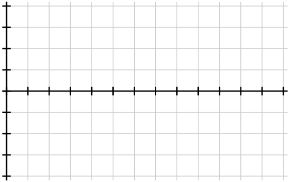












Questão 1: gabarito

$$
\begin{array}{rcl}
\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx & = & \int \frac{1}{8}u^3\sqrt{1-u^2}\cdot\frac{1}{2}\,du \\
& = & \frac{1}{16}\int u^3\sqrt{1-u^2}\,du \\
& = & \frac{1}{16}\int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)(\cos\theta)\,d\theta \\
& = & \frac{1}{16}\int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
& = & \frac{1}{16}\int c^2(1-c^2)(-1)\,dc \\
& = & \frac{1}{16}\int c^2(c^2-1)\,dc \\
& = & \frac{1}{16}\int c^4-c^2\,dc \\
& = & \frac{1}{16}(\frac{c^5}{5}-\frac{c^3}{3}) \\
& = & \frac{1}{16}(\frac{(\cos\theta)^5}{5}-\frac{(\cos\theta)^3}{3}) \\
& = & \frac{1}{16}(\frac{\sqrt{1-u^2}^5}{5}-\frac{\sqrt{1-u^2}^3}{3}) \\
& = & \frac{1}{16}(\frac{\sqrt{1-4x^2}^5}{5}-\frac{\sqrt{1-4x^2}^3}{3})
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{c}
u=2x \\
u^2=4x^2 \\
x=u/2 \\
x^3=u^3/8 \\
du=2dx \\
dx=\frac{1}{2}du
\end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{c}
u=\operatorname{sen}\theta \\
u^2=(\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-u^2=(\cos\theta)^2 \\
\sqrt{1-u^2}=\cos\theta \\
\frac{du}{d\theta}=\cos\theta \\
du=\cos\theta\,d\theta
\end{array}\right]
$$

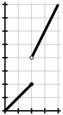
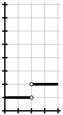
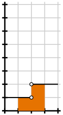
$$
\left[\begin{array}{c}
c=\cos\theta \\
\frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\
dc=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(-1)dc=\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(\operatorname{sen}\theta)^2=1-c^2
\end{array}\right]
$$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int x^3h'''\,dx & = & x^3h'' - \int 3x^2h''\,dx \\
 & = & x^3h'' - 3\int x^2h''\,dx \\
\int x^2h''\,dx & = & x^2h' - \int 2xh'\,dx \\
 & = & x^2h' - 2\int xh'\,dx \\
\int xh'\,dx & = & xh - \int 1\cdot h\,dx \\
 & = & xh - \int h\,dx
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\int x^3h'''\,dx & = & x^3h'' - 3\int x^2h''\,dx \\
 & = & x^3h'' - 3(x^2h' - 2\int xh'\,dx) \\
 & = & x^3h'' - 3(x^2h' - 2(xh - \int h\,dx)) \\
 & = & x^3h'' - 3x^2h' + 6(xh - \int h\,dx) \\
 & = & x^3h'' - 3x^2h' + 6xh - 6\int h\,dx)
\end{array}$$

Questão 3: gabarito

$F(x) =$  $F'(x) =$  $\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx =$  $= 3$

$$\underbrace{\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx}_{3} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{F(x)\Big|_{x=1}^{x=3}}_{F(3)-F(1)}}_{6-1}}_{5}}_{\mathbf{F}}$$

Questão 4: gabarito

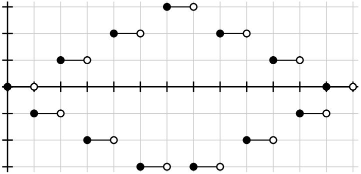
$$
\begin{aligned}
\frac{4x+5}{(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \\
&= \frac{A(x+3)}{(x-2)(x+3)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4x+5 &= (A+B)x+(3A-2B) \\
A+B &= 4 \\
3A-2B &= 5 \\
A &= 13/5 \\
B &= 7/5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4x+5}{(x-2)(x+3)} &= \frac{13/5}{x-2} + \frac{7/5}{x+3} \\
\int \frac{4x+5}{(x-2)(x+3)}\,dx &= \int \frac{13/5}{x-2} + \frac{7/5}{x+3}\,dx \\
&= \frac{13}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+3}\,dx \\
&= \frac{13}{5}\ln|x-2| + \frac{7}{5}\ln|x+3|
\end{aligned}
$$

Questão 5: gabarito

$$f(x) \;=$$



$$F(x) \;=\; \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt \;=$$