Cálculo 2 - 2022.2

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Questão 1

(Total: 6.0 pts)
Lembre que nós vimos que o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — pode ser escrito como a demonstração [M] abaixo, e a "fórmula" para resolver EDOVSs pode ser escrita como [F]:

$$
[M] = \left(\begin{array}{rcl}
\frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\
\int h(y)\,dy & = & \int g(x)\,dx \\
\| & & \| \\
H(y) + C_1 & & G(x) + C_2 \\
H(y) & = & G(x) + C_2 - C_1 \\
 & = & G(x) + C_3 \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x) + C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array} \right)
$$

$$
[F] = \left(\begin{array}{rcl}
\frac{dy}{dx} & = & \frac{g(x)}{h(y)} \\
H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x) + C_3) \\
\| & & \\
y & &
\end{array} \right)
$$

Quando a gente quer criar exercícios de EDOVSs que sejam fácil de resolver a gente começa escolhendo $G(x)$ e $H(y)$, não $g(x)$ e $h(y)$.
Digamos que $G(x) = x^4 + 5$ e $H(y) = y^2 + 3$.

a) **(0.5 pts)** Diga qual é a EDO da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ associada a esta escolha de $G(c)$ e $H(y)$. Chame-a de $(*)$. Não esqueça do "Seja"!

b) **(0.5 pts)** Escolha uma função H^{-1} adequada. Defina ela com um "Seja" e verifique que ela obedece o que esperamos dela.

c) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral da EDO $(*)$. Chame-a de $f(x)$ e defina ela com um "Seja".

d) **(1.5 pts)** Verifique que essa função $f(x)$ obedece $(*)$.

e) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $f_1(x)$ que passe pelo ponto $(x_1, y_1) = (1, 2)$. Defina-a com um "Seja".

f) **(1.5 pts)** Teste a sua solução $f_1(x)$.

Questão 2

(Total: 3.0 pts)
No curso nós vimos um modo de resolver EDOs lineares com coeficientes constantes — "EDOLCCs" — no qual a gente traduzia a EDO "pra Álgebra Linear", fatorava uma "matriz", e aí encontrava as soluções básicas dessa EDO e tratava elas como "vetores"... por exemplo,

$$\begin{aligned}
y'' + 5y' + 6y &= 0 \\
(D^2 + 5D + 6)f &= 0 \\
(D+2)(D+3)f &= 0 \\
M &= (D+2)(D+3) \\
Me^{-2x} &= 0 \\
Me^{-3x} &= 0 \\
Me^{-2x} &= 0 \\
M(42e^{-2x} + 99e^{-3x}) &= 0
\end{aligned}$$

Seja $(*)$ esta EDO:

$$y'' + y' - 20y = 0 \qquad (*)$$

a) **(0.2 pts)** Traduza a EDO $(*)$ para "Álgebra Linear" e fatore-a. Chame essa versão fatorada de $(**)$, e defina-a com um "Seja".

b) **(0.3 pts)** Encontre as duas soluções básicas para a EDO $(*)$. Chame elas de f_1 e f_2. Não esqueça o "Sejam"!

c) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral para a EDO $(*)$ e chame-a de f. Não esqueça o "Seja"!

d) **(2.0 pts)** Encontre uma solução g para a EDO $(*)$ que obedeça $g(0) = 7$ e $g'(0) = 1$. Defina esta g com um "seja" e verifique que ela realmente obedece $g(0) = 7$ e $g'(0) = 1$.

Questão 3

(Total: 1.5 pts)

Lembre que nós vimos estes tipos de Somas de Riemann,

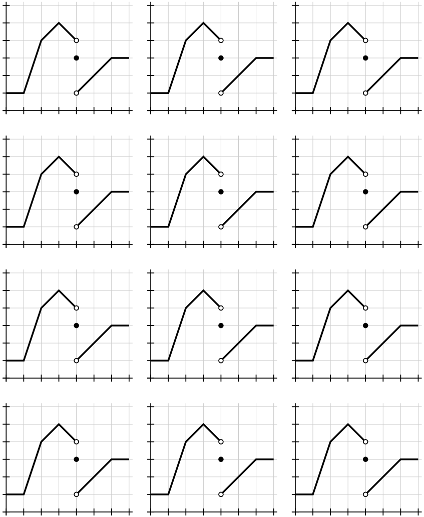
$$
\begin{aligned}
[\mathrm{L}] &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{aligned}
$$

e vimos que o [Trap] pode ser interpretado tanto como uma soma de trapézios como como uma soma de retângulos.

Seja $f(x)$ a função dos gráficos à direita.
Represente graficamente:

a) $[\mathrm{inf}]_{\{1,2,3,4\}}$
b) $[\mathrm{sup}]_{\{1,2,3,4\}}$
c) $[\mathrm{M}]_{\{1,3,5\}}$
d) $[\mathrm{Trap}]_{\{1,3,5\}}$ usando retângulos
e) $[\mathrm{Trap}]_{\{1,3,5\}}$ usando trapézios

Indique claramente qual desenho é a resposta final de cada item e quais desenhos são rascunhos.



Questão 1: gabarito

A substituição é:

$$[\mathrm{S}] = \begin{bmatrix} G(x) := x^4+5 \\ H(y) := y^2+3 \\ g(x) := 4x^3 \\ h(y) := 2y \\ H^{-1}(x) := \sqrt{x-3} \end{bmatrix}$$

a) Seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{2y} \qquad (*)$$

b)
$$\begin{array}{lrcl} \text{Seja:} & H^{-1}(x) & = & \sqrt{x-3}. \\ \text{Temos:} & H^{-1}(H(y)) & = & \sqrt{H(y)-3} \\ & & = & \sqrt{(y^2+3)-3} \\ & & = & y. \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{lrcl} & y & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ & & = & \sqrt{(G(x)+C_3)-3} \\ & & = & \sqrt{((x^4+5)+C_3)-3} \\ & & = & \sqrt{x^4+2+C_3} \\ \text{Seja:} & f(x) & = & \sqrt{x^4+2+C_3}. \end{array}$$

d) $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}}$

$$\left(f'(x) = \frac{4x^3}{2f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) = \sqrt{x^4+2+C_3} \\ f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} \end{bmatrix}$$
$$= \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+2+C_3}}\right) \qquad =)$$

e)
$$\begin{array}{lrcl} \text{Se} & f(x_1) & = & y_1, \\ \text{i.e.,} & f(1) & = & 2, \\ \text{então} & f(1) & = & \sqrt{1^4+2+C_3} \\ & & = & \sqrt{3+C_3} \\ & & = & 2 \\ & 2^2 & = & \sqrt{3+C_3}^2 \\ & 4 & = & 3+C_3 \\ & C_3 & = & 1 \\ & f(x) & = & \sqrt{x^4+2+C_3} \\ & & = & \sqrt{x^4+3} \\ \text{Seja:} & f_1(x) & = & \sqrt{x^4+3}. \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{lrcl} \text{Será que} & f_1(x_1) & = & y_1, \\ \text{i.e.,} & f_1(1) & = & 2? \\ & \sqrt{1^4+3} & = & \sqrt{4} \\ & & = & 2 \qquad =) \end{array}$$

Questão 2: gabarito

a) Temos: $D^2 + D - 20 = (D+5)(D-4)$.
Seja $(**)$ esta EDO:

$$(D+5)(D-4)f \;=\; 0. \qquad (**)$$

b) Sejam $f_1(x) = e^{4x}$, $f_2(x) = e^{-5x}$,

c) Seja

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & af_1(x) + bf_2(x) \\ & = & ae^{4x} + be^{-5x}. \end{array}$$

d) Digamos que
$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & af_1(x) + bf_2(x) \\ & = & ae^{4x} + be^{-5x}, \\ g(0) & = & 7, \\ g'(0) & = & 1. \end{array}$$
Então:
$$\begin{array}{rcl} g(0) & = & ae^0 + be^0, \\ & = & a + b, \\ g'(0) & = & a \cdot 4e^0 + b \cdot (-5)e^0, \\ & = & 4a - 5b, \\ a & = & 4, \\ b & = & 3, \\ g(x) & = & 4e^{4x} + 3e^{-5x}, \\ g(0) & = & 4 + 3 \;\; = \;\; 7, \qquad =) \\ g'(0) & = & 16 - 15 \;\; = \;\; 1, \qquad =). \end{array}$$

Questão 3: gabarito (sem desenhos)

$$\begin{array}{lcl} \text{a) } [\text{inf}]_{\{1,2,3,4\}} & = & 1(2-1) + 4(3-2) + 3(4-3) \\ \text{b) } [\text{sup}]_{\{1,2,3,4\}} & = & 4(2-1) + 5(3-2) + 5(4-3) \\ \text{c) } [\text{M}]_{\{1,3,5\}} & = & 4(3-1) + 3(5-3) \\ \text{d) } [\text{Trap}]_{\{1,3,5\}} & = & 3(3-1) + 3.5(5-3) \\ \text{e) } [\text{Trap}]_{\{1,3,5\}} & = & \frac{1+5}{2}(3-1) + \frac{5+2}{2}(5-3) \end{array}$$