Cálculo 2 - 2022.2

Aula 19: o TFC1 e o TFC2.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Os próximos 3 slides são uma versão melhorada (?)
das definições de partições, de inf e sup, e de
integral definida destes PDFs antigos:

Partições:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=9 (até a p.12)

Infs e sups:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=2 (até a p.15)

Integral definida como limite – definições:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=16 (até a p.21)
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=35 – $[a,b]_n$
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=16 – simplificações

Integral definida como limite – uma animação:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-TFC1.pdf#page=35 (até a p.41)

A definição de partição

Se P é um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$,
então podemos interpretar P como uma partição...
Por exemplo, se $P = \{200, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$
então $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$, e aí vamos interpretar
esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente –
como uma partição do intervalo $I = [a, b] = [20, 200]$ em
5 subintervalos ("$N = 5$"), assim:

$$\begin{array}{cccccccl}
20 & 33 & 42 & 63 & 99 & 200 & & \\
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
a_1 & b_1 & & & & & & I_1 = [a_1, b_1] \\
 & a_2 & b_2 & & & & & I_2 = [a_2, b_2] \\
 & & a_3 & b_3 & & & & I_3 = [a_3, b_3] \\
 & & & a_4 & b_4 & & & I_4 = [a_4, b_4] \\
 & & & & a_5 & b_5 & & I_5 = [a_5, b_5] \\
a & & & & & b & & I = [a, b] = [x_0, x_N]
\end{array}$$

As definições de inf e sup

Digamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $B\subset\mathbb{R}$.
Vamos definir $\inf(f(B))$ e $\sup(f(B))$ —
e também $\inf(D)$ e $\sup(D)$, pra $D\subset\mathbb{R}$ —
desta forma:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \\
C & = & \{\,(x,f(x)) \mid x\in B\,\} \\
D & = & \{\,f(x) \mid x\in B\,\} \\
D' & = & \{\,y\in\mathbb{R} \mid \exists x\in B.\ f(x)=y\,\} \\
L & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}} \mid \forall d\in D.\ y\le d\,\} \\
U & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}} \mid \forall d\in D.\ d\le y\,\} \\
(\alpha=\inf(D)) & = & \alpha\in L\wedge(\forall\ell\in L.\ \ell\le\alpha) \\
(\beta=\sup(D)) & = & \beta\in U\wedge(\forall u\in U.\ \beta\le u)
\end{array}$$

Com isto podemos definir a integral definida.
A definição formal dela está na próxima página.

$$
\begin{aligned}
[a,b]_N &= \{\, a + k(\tfrac{b-a}{N}) \mid k \in \{0,\dots,N\} \,\} \\
&= \{a + 0(\tfrac{b-a}{N}),\ a + 1(\tfrac{b-a}{N}),\ \dots,\ a + N(\tfrac{b-a}{N})\} \\
&= \{a,\ a + \tfrac{b-a}{N},\ a + 2\tfrac{b-a}{N},\ a + 3\tfrac{b-a}{N},\ \dots,\ b\} \\
\overline{\int}_P f(x)\,dx &= [\sup]_P \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx &= [\inf]_P \\
&= \sum_{i=1}^{n} \inf(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &= \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\
\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \ \text{ existe}\right) &= \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\right) \\
&= \left(\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = 0\right) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)} \\
&= \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)}
\end{aligned}
$$

Exercício 1.

Leia isto aqui:

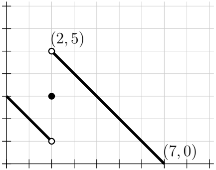
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=9 (até a p.12)

a) Seja $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$.
Interprete P como uma partição.
Diga quem são o N, o a e o b dela e monte
a tabela dos subintervalos dela (p.10 do link acima).

b) Seja $P = [2, 4]_6$.
Diga quem são os pontos da partição P.

c) Seja $P = [2, 5]_{2^3}$.
Diga quem são os pontos da partição P.

Exercício 2.

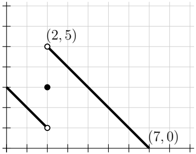
Sejam $f(x) =$ 

e $B = [1,3]$.

Represente graficamente B, $f(B)$ e os conjuntos abaixo:

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{\, (x, f(x)) \mid x \in B \,\} \\ D & = & \{\, f(x) \mid x \in B \,\} \\ D' & = & \{\, y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y \,\} \\ L & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d \,\} \\ U & = & \{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y \,\} \end{array}$$

Exercício 3.

Sejam $f(x) =$ 

.

e $P = \{1, 3, 4, 5\}$.

Represente graficamente:

a) $\overline{\int}_P f(x)\,dx$

b) $\underline{\int}_P f(x)\,dx$

c) $\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx$

d) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_2} f(x)\,dx$

e) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_4} f(x)\,dx$

Exercício 4.

Dê uma olhada nesses 4 slides sobre a função de Dirichlet:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=51` (até a p.54)

Sejam:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}, \\ g(x) &= f(x) + x. \end{aligned}$$

Represente graficamente:

a) $g(x)$

b) $\overline{\underline{\int}}_{[0,4]_1} g(x)\,dx$

c) $\overline{\underline{\int}}_{[0,4]_2} g(x)\,dx$

d) $\overline{\underline{\int}}_{[0,4]_4} g(x)\,dx$

e) $\overline{\underline{\int}}_{[0,4]_8} g(x)\,dx$