Cálculo 2 - 2022.2

Prova de reposição (VR)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Questão 1
(Total: 4.0 pts)

Calcule:

$$\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx\ .$$

Dicas: 1) Você provavelmente vai precisar de pelo menos duas mudanças de variável pra chegar no resultado final. 2) No curso nós vimos dois modos de fazer mudanças de variável de um jeito legível: um modo usava chaves sob subexpressões e o outro modo usava "caixinhas de anotações" como a abaixo,

$$\left[\begin{array}{c} u = \operatorname{sen} x \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x\,dx = du \\ x = \operatorname{arcsen} u \end{array}\right]$$

em que todas as outras linhas da caixinha eram consequência da primeira.

Questão 2
(Total: 1.0 pts)

Calcule:

$$\int_{x=5}^{x=6} (2x+3)^4\,dx$$

Lembre que no curso nós vimos que existem várias noções diferentes do que é "simplificar uma expressão"... por exemplo, no ensino médio os professores exigem que a gente "simplifique" $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}$ pra $\frac{661}{3036}$, mas em Cálculo 2 a gente geralmente considera $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}$ mais "simples" do que $\frac{661}{3036}$.

Questão 3

(Total: 5.0 pts)
Lembre que nós vimos que o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — pode ser escrito como a demonstração [M] abaixo, e a "fórmula" para resolver EDOVSs pode ser escrita como [F]:

$$[M] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\ \displaystyle\int h(y)\,dy & = & \displaystyle\int g(x)\,dx \\ \| & & \| \\ H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\ H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\ & = & G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$[F] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array} \right)$$

Quando a gente quer criar exercícios de EDOVSs que sejam fácil de resolver a gente começa escolhendo $G(x)$ e $H(y)$, não $g(x)$ e $h(y)$.
Digamos que $G(x) = x^4 + 5$ e $H(y) = y^2 + 3$.

a) **(0.5 pts)** Diga qual é a EDO da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ associada a esta escolha de $G(x)$ e $H(y)$. Chame-a de $(*)$. Não esqueça do "Seja"!

b) **(0.5 pts)** Escolha uma função H^{-1} adequada. Defina ela com um "Seja" e verifique que ela obedece o que esperamos dela.

c) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral da EDO $(*)$. Chame-a de $f(x)$ e defina ela com um "Seja".

d) **(1.0 pts)** Verifique que essa função $f(x)$ obedece $(*)$.

e) **(1.0 pts)** Encontre uma solução da EDO $(*)$ que passe pelo ponto $(x_1, y_1) = (1, 2)$. Chame-a de $f_1(x)$ e defina-a com um "Seja".

f) **(1.0 pts)** Verifique que a sua $f_1(x)$ realmente passa pelo ponto (x_1, y_1).