Cálculo 2 - 2022.2

Aula 9: Frações Parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

Tanto o Leithold quanto o Daniel Miranda
têm seções sobre frações parciais.
A seção do Leithold é a 9.5.
A do Miranda é a 8.1:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=240

A idéia de frações parciais que vai ser
mais importante pra outras matérias é que
operações como polinômios são como
operações sobre números "sem vai um".
Tem figuras (manuscritas) sobre isso aqui:
http://angg.twu.net/2019.1-C2/2019.1-C2.pdf#page=26
http://angg.twu.net/2019.2-C2/2019.2-C2.pdf#page=43

Slogan: contas sem "vai um" podem ser traduzidas pra contas com polinômios.

O que mais nos interessa pra Frações Parciais é divisão com resto. Exemplo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 7 & 7 & 3 & 12 \\ \cline{5-5}
-2 & 4 & & & 231 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 7 & & \\
 & -3 & 6 & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 3 & \\
 & & -1 & 2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2400 &= 200 \cdot 12 \\
360 &= 30 \cdot 12 \\
12 &= 1 \cdot 12 \\
2772 &= 231 \cdot 12 \\
2773 &= 231 \cdot 12 + 1
\end{aligned}
$$

...e tradução do exemplo para polinômios:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 + 7x^2 & + 7x & + 3 & & x + 2 \\
\cline{5-5}
-(2x^3 + 4x^2) & & & & 2x^2 + 3x + 1 \\
\cline{1-1}
3x^2 & + 7x & & & \\
-(3x^2 & + 6x) & & & \\
\cline{1-2}
& 1x & + 3 & & \\
& -(1x & + 2) & & \\
\cline{2-3}
& & 1 & & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^3 + 4x^2 + 0x + 0 &= (2x^2 + 0x + 0) \cdot (x + 2) \\
3x^2 + 6x + 0 &= (3x + 0) \cdot (x + 2) \\
1x + 2 &= 1 \cdot (x + 2) \\
2x^3 + 7x^2 + 7x + 1 &= (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) \\
2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 &= (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) + 1
\end{aligned}
$$

Exercício 1

Algumas consequências da regra da cadeia...

$$[\mathrm{RC}] \;=\; \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

Obtenha os seguintes casos particulares da [RC]:

a) $g(x) = 2x$
b) $g(x) = 2x + 3$
c) $g(x) = x + 3$
d) $g(x) = x + 3,\ f(x) = \ln x$
e) $g(x) = -x$
f) $g(x) = -x,\ f(x) = \ln x$
g) $g(x) = -x + 200,\ f(x) = \ln x$

Exercício 2.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

Derivadas formais (de novo)

Todas estas igualdades são verdadeiras, mas se tentarmos formalizar elas com todos os detalhes vamos ver que várias delas falam de funções com domínios diferentes...

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dx}\ln x &=& \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\ln(-x) &=& \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\ln|x| &=& \frac{1}{x}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(x)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(-x)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|) \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln(|x|)+C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \begin{cases} \ln(-x)+C_1 & \text{quando } x<0, \\ \ln(x)+C_2 & \text{quando } x>0 \end{cases}
\end{array}$$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5)+4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 \;+\; 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 3.

a) together $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right) = ?$

b) together $\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right) = ?$

c) together $\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right) = ?$

Exercício 4.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a)

a)
$$\begin{aligned}
\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\
\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} &= \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&= \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
&= \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\
c &= A+B \\
d &= -Ab-Ba \\
e &= -a-b \\
f &= ab
\end{aligned}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o '[:=]':

$$\begin{array}{l} \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f}\right) \begin{bmatrix} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{bmatrix} \\ = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}\right), \end{array}$$

e sabemos que esta igualdade é verdade:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{array}{rcl} c &=& A+B \\ d &=& -Ab-Ba \\ e &=& -a-b \\ f &=& ab \end{array}$$

é uma solução para a equação

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \quad \ldots$$

mas não sabemos se é a única solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o '[:=]'. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5) = 0:$$

São:

$$\begin{array}{l} ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=2] \;= \\ ((2-2)(2-5)=0) \\ ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=5] \;= \\ ((5-2)(5-5)=0) \end{array}$$

Nenhum livro "básico" define "solução de uma equação" desse jeito — como "a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira" — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são "equações" e "soluções"...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição "as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter 'x'" o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 4: uma solução pro item (b)

Temos duas soluções para

$$(x-a)(x-b) = x^2 - 7x + 10 :$$

uma é $a = 2$ e $b = 5$, e a outra é $a = 5$ e $b = 2$.
Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar.
A gente pode chutar que $a = 5$, $b = 2$, e que c, d, e, f são os que a gente obtém pelo item (a), e aí ver se isso nos leva a uma solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 4: item (c)
Seja [PFP] esta igualdade aqui – o "princípio por trás das frações parciais":

$$[\text{PFP}] \quad = \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad = \quad \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251`
e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\text{PFP}] \begin{bmatrix} a{:=}? \\ b{:=}? \\ A{:=}? \\ B{:=}? \end{bmatrix}$$

que "está por trás" da sua solução.

Exercício 5.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2}\, dx \quad = \quad ?$$

Exercício 6.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide ?? a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original
em algo fácil de integrar:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx \\
&= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx \\
&= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx \\
&= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx
\end{aligned}
$$

Uma questão da P1 de 2020.1

A questão 3 da P1 de 2020.1,

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.