Cálculo 2 - 2022.2

Aula 10: Mudança de variáveis
(e integrais de potências de senos e cossenos)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

A mudança de variáveis na integral *indefinida* ("MVI") é uma gambiarra que eu até hoje ainda não sei interpretar geometricamente.

A mudança de variáveis na integral *definida* ("MVD") – que nós vamos ver depois! – é fácil de interpretar geometricamente: ela muda os limites de integração. Veja esta figura aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=12

Nós vamos tentar entender a MVI pela seção 5.2.1 do Leithold, pela seção 6.2 do Miranda e pela seção 5.5 do Thomas. Links:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=192
http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_5.5_e_5.6.pdf

O Miranda explica como integrar potências de senos e cossenos na seção 8.3:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=255

Veja também:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=16
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=39
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VSB.pdf#page=8
http://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g#t=4m35s (até 10:00)

Uma conta com mudança de variáveis

[MVI]: mudança de variáveis na integral indefinida.
[MVA]: uma aplicação típica do [MVI] (caso geral).
[MVA] [...]: uma aplicação típica do [MVI] (caso particular).

Compare com o Teorema 5 e o Exemplo 3 daqui:
`http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_5.5_e_5.6.pdf`

$$\text{[MVI]} \;=\; \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \right)$$

$$\text{[MVA]} \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int f'(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\;dx}_{du} & = & \displaystyle\int f'(u)\,du \\ & = & f(u) \\ & = & f(g(x)) \end{array} \right)$$

$$\text{[MVA]}\begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \\ g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} \;=\; \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \cos(\underbrace{x^2}_{u}) \cdot \underbrace{\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\;dx}_{du} & = & \displaystyle\int \cos(u)\,du \\ & = & \operatorname{sen}(u) \\ & = & \operatorname{sen}(x^2) \end{array} \right)$$

Justificando cada igualdade

Quando os livros dizem "$u = g(x)$" eles não dizem claramente em quais lugares podemos substituir u por $g(x)$...
Por exemplo, será que podemos fazer isto aqui?

$$\int f'(u)\,du \;=\; \int f'(g(x))\,du$$

Eu acho que não, mas até hoje eu não sei as regras exatas...
Me parece que o melhor modo de justificar estas três igualdades

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \;=\; f(u) \;=\; f(g(x))$$

é assim:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx\right)}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\underbrace{\int f'(u)\,du}_{f(u)}}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{f(u)}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Exercício 1.

Leia a seção 6.2 do Miranda. Ela começa na página 189:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=189

Entenda bem o exemplo 6.6 da página 192 dele.
Faça os exercícios de 1 a 13 das páginas 196 e 197, exceto pelos exercícios que envolvem secantes.

Dê uma olhada no meu modo preferido de não me enrolar na mudança de variáveis, que é o método das "caixinhas de anotações", explicado aqui, nas páginas 39–44,
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=39
e tente usá-lo.

Exercício 2.

Entenda bem os exemplos 1, 2 e 3 da seção 8.3 do Miranda,

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=255

e as “caixinhas de anotações”:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=39
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=16

Depois disso resolva estas três integrais:

a) $\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x \, dx$
b) $\int (\cos x)^4 (\operatorname{sen} x)^3 \, dx$
c) $\int (\cos x)^4 (\operatorname{sen} x)^5 \, dx$