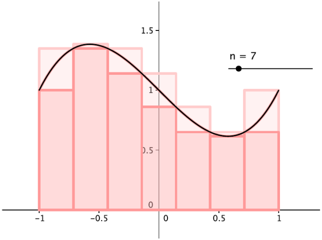
Cálculo 2 - 2022.2

Aula 13, 14 e 16: Somas de Riemann,
imagens de conjuntos, e infs e sups

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Introdução: Somas de Riemann

Somas de Riemann podem ser definidas de vários jeitos diferentes. A figura abaixo tem dois desses jeitos: os retângulos mais escuros dela são a "melhor aproximação por retângulos por baixo" para $\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx$; repare que todos esses retângulos mais escuros estão "apoiados no eixo x"...



Nós vamos considerar que os retângulos mais claros da figura também estão apoiados no eixo x, só que eles estão atrás dos mais escuros, então a gente só vê uma parte deles.

Esses retângulos mais claros – que, deixa eu repetir, estão todos apoiados no eixo x – são a "melhor aproximação por retângulos por cima" para $\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx$.

Dá pra fazer uma figura como essas na mão e no olhômetro assim: 1) a gente começa desenhando uma curva $y = f(x)$; 2) depois a gente desenha a parede esquerda da região $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, que é um segmento vertical em $x = a$, e a parede direita, que é um segmento em $x = b$; 3) depois a gente divide o intervalo de integração, $[a, b]$, em um certo número de subintervalos – a Cristiane Hernández usou o intervalo $[-1, 1]$ e dividiu ele em 7 subintervalos iguais; 4) pra cada um desses subintervalos a gente desenha o retângulo mais alto cuja base é aquele intervalo e que está todo sob a curva $y = f(x)$; 5) pra cada um desses subintervalos a gente desenha o retângulo mais baixo cuja base é aquele intervalo e que está todo acima da curva $y = f(x)$; 6) aí a gente colore tudo do jeito certo, usando uma cor pra "melhor aproximação por retângulos por baixo" – os retângulos do passo 4 – e outra cor pra "melhor aproximação por retângulos por cim" – os retângulos do passo 5.

Eu peguei a figura à esquerda das notas da Cristiane Hernández. Link:
http://angg.twu.net/2015.1-C2/CALCULOIIA_EAD_Versao_Final_correcao_aulas_25_a_30.pdf#page=12

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato.
O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.
O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.
Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.
Aí o Alex vai chorar pontos e diz "*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*"

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele *ficou invisível*.

Seja como o Bob.

O que a gente vai fazer neste PDF vai parecer com o Atirei o Pau no Gato, só que com somatórios e retângulos e trapézios ao invés de notas. Você vai aprender a visualizar e a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – e você quer chegar no ponto em que fazer esses desenhos passa a ser bem fácil.

Somas de retângulos

No "item 5" da aula sobre o Mathologermóvel – links:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-mathologermovel.pdf#page=5
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-TFC1.pdf#page=7
você aprendeu a calcular áreas de figuras "feitas de retângulos", e como essas áreas representavam *distâncias* você sabia que algumas áreas iriam "contar negativamente"...
Agora a gente vai fazer o contrário do que a gente fez naquela aula. Ao invés da gente transformar uma figura feita de retângulos – cuja área a gente quer calcular – numa expressão como esta aqui,

$$2(2-1.5)+3(4-2)$$

a gente vai transformar expressões como essa acima numa figura feita de retângulos. A convenção vai ser essa aqui. Por exemplo, em

$$3(4-2)$$

o 3 vai ser a altura do retângulo e $(4-2)$ vai ser a base dele. Mais precisamente, o "3" diz que o teto desse retângulo vai estar em $y=3$, e o "$(4-2)$" diz que a base dele vai de $x=2$ até $x=4$, e como nós agora só estamos interessados em retângulos apoiados no eixo x o chão dele vai ter $y=0$. Ou seja, os vértices dele vão ser:

$$\begin{array}{ll} (2,3), & (4,3), \\ (2,0), & (4,0). \end{array}$$

Lembre que matemáticos e físicos pensam de jeitos muito diferentes. Por exemplo, é comum livros de Física dizerem coisas tipo "áreas negativas não existem, então temos que fazer o ajuste tal", ou "a massa não pode ser negativa, então blá", e é comum livros de Matemática dizerem coisas tipo "vamos supor que existe um número i tal que $i^2=-1$. Então esse número i vai ter que ter as propriedades tais e tais..."
Lembre também que na aula de 29/setembro eu fiz uma figura sobre generalizar e depois disso obter outros casos particulares da fórmula geral... dá pra acessar essa figura aqui:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=24
Aqui nós vamos pensar "como matemáticos", e pra gente isso aqui

$$y\cdot(x_d-x_e)$$

"vai ser" um retângulo apoiado no eixo x, com altura y e base indo de x_e ("extremidade esquerda") até x_d ("extremidade direita")... a representação gráfica dele vai ser a que eu descrevi acima, e a área dele vai ser o resultado numérico de $y\cdot(x_d-x_e)$ – que pode dar um número negativo!...

Exercício 1

a) Verifique que $3(4-2)$ e $3(2-4)$ são dois retângulos que têm a mesma interpretação geométrica, mas um tem área positiva e o outro tem área negativa.

Depois leia as páginas 35 e 36 daqui,
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-propriedades-da-integral.pdf#page=35`
e os dois links da página 35 pra Wikipedia em português, e represente graficamente cada um dos retângulos abaixo:

b) $(-3)(2-4)$
c) $(-3)(4-2)$
d) $0(4-2)$
e) $0(2-2)$
f) $3(2-2)$

Pra nós todos eles são "retângulos". Na definição da Wikipedia quais deles são "retângulos degenerados"?

Somatórios

Dá pra expandir somatórios tanto em um passo só como em dois passos, como aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \\
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & (10^k)[k := 2] \\
& + & (10^k)[k := 3] \\
& + & (10^k)[k := 4] \\
& + & (10^k)[k := 5] \\
& = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5
\end{array}$$

Exercício 2

Veja esta página aqui para os detalhes,
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=13`
e faça todos os itens do Exercício 3 dela.

O jeito esperto

Leia as páginas 6 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=7

Exercício 3

a) Faça o exercício 1 da página 6 desse PDF –
o que pede pra você desenhar uma parábola.

b) Desenhe sobre essa parábola o retângulo $f(0.5)(1-0.5)$.
Aqui você $\boxed{\text{TEM}}$ que usar o "jeito esperto".

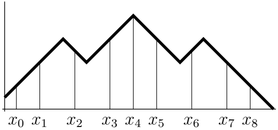
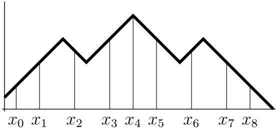
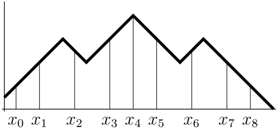
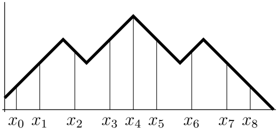
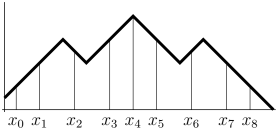
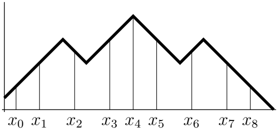
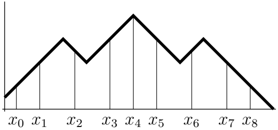
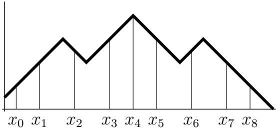
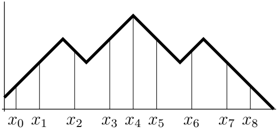
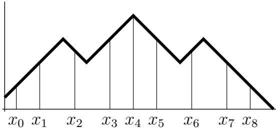
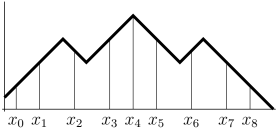
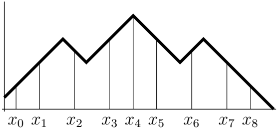
Se você não aprender a usar o jeito esperto:
- você vai demorar muito,
- seu retângulo não vai ter um vértice sobre a parábola,
- e você nunca vai virar o Bob.

Exercício 4.

Seja $f(x)$ a função da próxima página.
Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.
Faça cada item abaxo em um dos 12 gráficos da $f(x)$.

Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.
Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios
comece expandindo ele em dois passos, como na página 7.

a) $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
b) $\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
d) $\sum_{i=1}^{8} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
e) $\sum_{i=1}^{8} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$
f) $\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

Soma superior e soma inferior

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações

$$\min_{x\in I} f(x) \qquad \text{e} \qquad \max_{x\in I} f(x)$$

usando o truque do "vire-se": ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja:
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=218`

Exercício 5.
a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer e verifique que nas figuras da página 9 temos:

$$\begin{aligned} \max(f(x_1), f(x_2)) \ &\lneqq \ \max_{x\in[x_1,x_2]} f(x) \\ \min_{x\in[x_2,x_3]} f(x) \ \lneqq \ \min(f(x_2), f(x_3)) & \end{aligned}$$

e depois represente nos gráficos da página 9:
b) $\sum_{i=1}^{8}(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8}(\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

"Set comprehensions"

Lembre que:

$$\begin{array}{rcl} \{\, a \in \{1,2,3,4\} \mid a \geq 3 \,\} &=& \{3,4\}, \\ \{\, 10a \mid a \in \{1,2,3,4\} \,\} &=& \{10,20,30,40\}\ldots \end{array}$$

Se você não lembrar tente ler as páginas 8 a 12 daqui,
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8
que tem explicações e exercícios, mas as explicações estão escritas numa ordem estranha... =(

Resumindo muitíssimo: existem dois tipos diferentes de notações da forma "$\{\ldots \mid \ldots\}$", e um bom modo de entender como elas funcionam é anotar quais pedaços delas são "geradores", quais são "filtros", e quais são "resultado"; os "geradores" funcionam como o 'for' de uma linguagem de programação, os filtros funcionam como um 'if' – ou, mais precisamente, como um "if not ... then break" – e o "resultado" funciona como um 'print'.

Exercício 6.
Entenda a expressão abaixo e calcule o resultado dela:

$$\{\ \underbrace{(x,y)}_{\text{resultado}}\ \mid\ \underbrace{y \in \{0,1,2,3\}}_{\text{gerador}}, \underbrace{x \in \{0,\ldots,y\}}_{\text{gerador}}, \underbrace{x+y \leq 5}_{\text{filtro}}\,\}$$

e compare-a com estes programinhas em Lua e Haskell:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/set_comprehensions_in_lua_and_haskell.png

Imagens de conjuntos finitos

Veja as páginas 5 e 6 daqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5`

Dois abusos de linguagem
(que eu expliquei no quadro):

$$\begin{array}{rcl} f(\{7,8,9\}) & = & \{\, f(x) \mid x \in \{7,8,9\} \,\} \\ \max(a,b,c,d,e) & = & \max(a,\max(b,\max(c,\max(d,e)))) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(\{7,8,9\}) & = & \{f(7),f(8),f(9)\}, \\ \max(a,b,c,d,e) & = & \max(a,\max(b,c,d,e)) \\ & = & \max(a,\max(b,\max(c,d,e))) \\ & = & \max(a,\max(b,\max(c,\max(d,e)))) \end{array}$$

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: "seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1,3])$".
Todo mundo reconhece que o intervalo $[1,3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1,3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e "cada vez mais parecidos" com o conjunto $[1,3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1,3\}, \\ A_2 &= \{1,2,3\}, \\ A_3 &= \{1,1.5,2,2.5,3\}, \\ A_4 &= \{1,1.25,1.5,1.75,2,2.25,2.5,2.75,3\}, \ldots \end{aligned}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o "jeito esperto" – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, por um argumento informal e olhométrico, que $f([1,3])$ deve ser o intervalo $[3,4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de "levantar" todo o intervalo $[1,3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois "projetar" pro eixo y esse "intervalo levantado". Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – também meio no olhômetro – que $f([1,3]) = [3,4]$.

O Carlos vê que é óbvio que $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = \{3,3\} = \{3\}$, e portanto a imagem do intervalo $[1,3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1,3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada "Análise Matemática", baixa o "*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*" do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – mas ele leva um ano nisso.

Seja como o Bob!

Exercício 7.

Seja $f(x)$ esta função:

$f(x) =$ 

Calcule estas imagens de intervalos:

a) $f([0,1])$	a') $f((0,1))$
b) $f([1,2])$	b') $f((1,2))$
c) $f([0,2])$	c') $f((0,2))$
d) $f([2,3])$	d') $f((2,3))$
e) $f([1,3])$	e') $f((1,3))$
f) $f([0,3])$	f') $f((0,3))$
g) $f([0,4])$	g') $f((0,4))$
h) $f([4,8])$	h') $f((4,8))$
i) $f([0,8])$	i') $f((0,8))$
j) $f([1,7])$	j') $f((1,7))$

Dicas:

Faça os itens (a) até (j) primeiro. Os itens (a') até (j') são bem mais difíceis, e em alguns deles os resultados vão ser conjuntos fechados ou "semi-abertos".

O Leithold define intervalos semi-abertos na página 6 (no capítulo 1).

Daqui a pouco nós vamos ver um modo de testar as respostas dos itens desse exercício, e um modo de resolver ele por chutar e testar... mas aguente um pouquinho!

Retângulos acima e abaixo

Lembre que eu contei que em cursos tradicionais de Cálculo 2 – aqueles em que as pessoas passam centenas de horas fazendo contas à mão, e mais outras centenas de horas estudando por aqueles livros que fingem que certas coisas dificílimas são óbvias – as pessoas acabam aprendendo algumas coisas super úteis que não aparecem listadas explicitamente no programa do curso...

Uma dessas coisas é aprender a entender definições que *aparentemente* envolvem um número infinito de contas. Se a gente for como o Bob a gente consegue visualizar o que essas definições "querem dizer".

As definições formais de "retângulo acima (ou abaixo) da curva" e "melhor retângulo acima (ou abaixo) da curva" são assim – elas aparentemente precisam de infinitas contas.

“Para todo” ($\forall$) e “existe” ($\exists$)

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \land \\
& & (a^2 < 10)[a := 3] \land \\
& & (a^2 < 10)[a := 5] \\
& = & (2^2 < 10) \land (3^2 < 10) \land (5^2 < 10) \\
& = & (4 < 10) \land (9 < 10) \land (25 < 10) \\
& = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
& = & \mathbf{F}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \lor \\
& & (a^2 < 10)[a := 3] \lor \\
& & (a^2 < 10)[a := 5] \\
& = & (2^2 < 10) \lor (3^2 < 10) \lor (5^2 < 10) \\
& = & (4 < 10) \lor (9 < 10) \lor (25 < 10) \\
& = & \mathbf{V} \lor \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \\
& = & \mathbf{V}
\end{array}
$$

Visualizando '∀'s e '∃'s

Repare...

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad x < 4) & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad\qquad x = 6) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \lor x = 6) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F}
\end{array}$$

...que dá pra *visualizar* o que a expressão
$(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \lor x = 6)$
"quer dizer" visualizando os '**V**'s e '**F**'s
de expressões mais simples, e combinando
esses "mapas" de '**V**'s e '**F**'s.

Visualizando '$\forall$'s e '$\exists$'s (2)

Às vezes vai valer a pena definir proposições como nomes mais curtos, como $F(x) = (2 \le x)$, $G(x) = (x \le 4)$, $H(x) = (x = 6)$... Aí:

$$\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad G(x)) & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F}
\end{array}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como $(\forall x \in A.\underline{\qquad})$ e $(\exists x \in A.\underline{\qquad})$ e descobrir quais são verdadeiras e quais não — mesmo quando o conjunto A é um conjunto infinito, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $[2, 10]$.

Visualizando '$\forall$'s e '$\exists$'s (3)

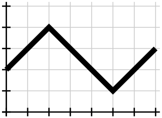
Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos '**V**'s e '**F**'s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os '**V**'s e '**F**'s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Vou usar essa convenção aqui:
O **V** é uma bolinha preta, ou sólida: $\bullet$
O **F** é uma bolinha branca, ou oca: $\circ$

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.\qquad\quad G(x)) & = & \bullet \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.\qquad\qquad\qquad\quad H(x)) & = & \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ
\end{array}$$

Você pode fazer as suas próprias definições — como o meu "$\bullet$:= **V** e $\circ$:= **F**" acima — mas elas têm que ficar claras o suficiente... releia a dica 7:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=3`

Instruções de desenho (explícitas)

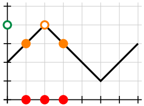
Sejam $f(x) =$  ,

$$\text{e } P(y) \;=\; \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{\;x\;}_{\text{em } (x,0)}) < y}_{\text{em } (x,f(x))}}_{\text{em } (0,y)}\,.$$

As anotações sob as chaves são “instruções de desenho” que o Bob vai usar pra calcular cada $P(y)$ de cabeça, e pra visualizar o que $P(y)$ “quer dizer”...

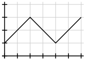
Na próxima página eu fiz as figuras pra $P(4)$.

$$
\begin{aligned}
P(4) &= \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{x}_{\text{em }(x,0)})<4}_{\text{em }(x,f(x))}}_{\text{em }(0,4)} \\
&= \underbrace{\underbrace{(f(\underbrace{1}_{\text{em }(1,0)})}_{\text{em }(1,f(1))}<4) \land \underbrace{(f(\underbrace{2}_{\text{em }(2,0)})}_{\text{em }(2,f(2))}<4) \land \underbrace{(f(\underbrace{3}_{\text{em }(3,0)})}_{\text{em }(3,f(3))}<4)}_{\text{em }(0,4)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{3<4}_{\text{em }(1,3)}) \land (\underbrace{4<4}_{\text{em }(2,4)}) \land (\underbrace{3<4}_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,4)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{\bullet}_{\text{em }(1,3)}) \land (\underbrace{\circ}_{\text{em }(2,4)}) \land (\underbrace{\bullet}_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,4)} \\
&= \underbrace{\circ}_{\text{em }(0,4)}
\end{aligned}
$$



Exercício 8.

Sejam:

$$f(x) = $$  ,

$$\begin{array}{rcl} P(y) &=& \forall x \in \{1,2,3\}. f(x) < y \; , \\ Q(y) &=& \forall x \in \{1,2,3\}. f(x) \leq y \; , \\ R(y) &=& \forall x \in \{1,2,3\}. f(x) \geq y \; , \\ S(y) &=& \forall x \in \{1,2,3\}. f(x) > y \; , \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P'(y) &=& \forall x \in [3,5]. f(x) < y \; , \\ Q'(y) &=& \forall x \in [3,5]. f(x) \leq y \; , \\ R'(y) &=& \forall x \in [3,5]. f(x) \geq y \; , \\ S'(y) &=& \forall x \in [3,5]. f(x) > y \; . \end{array}$$

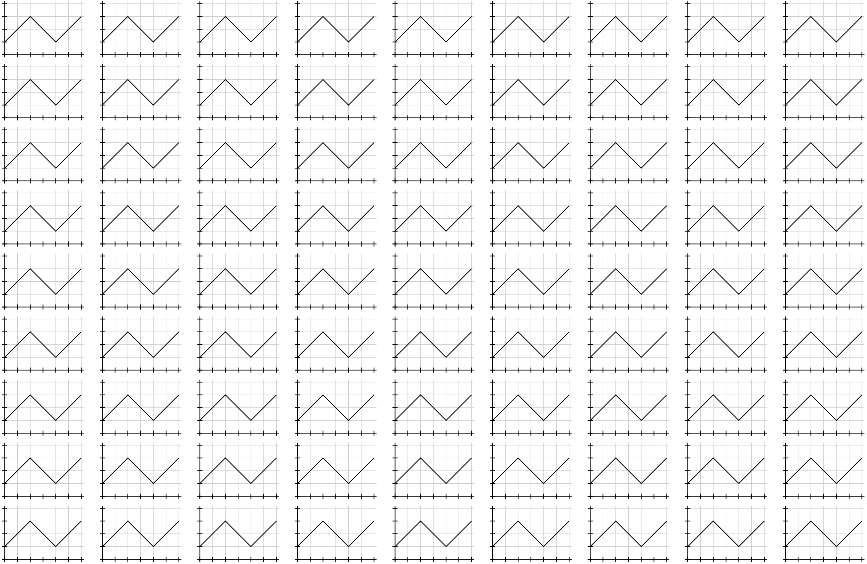
Para cada uma das expressões à direita visualize-a, represente-a graficamente numa das cópias do gráfico da $f(x)$ da próxima página, e dê o resultado dela.
Note que aqui eu não estou dando instruções de desenho *explícitas* – você vai ter que escolher como você vai fazer pra visualizar cada expressão.

a) $P(3.5), P(3.0), \ldots, P(0.5)$
b) $Q(3.5), Q(3.0), \ldots, Q(0.5)$
c) $R(3.5), R(3.0), \ldots, R(0.5)$
d) $S(3.5), S(3.0), \ldots, S(0.5)$

e) $P'(3.5), P'(3.0), \ldots, P'(0.5)$
f) $Q'(3.5), Q'(3.0), \ldots, Q'(0.5)$
g) $R'(3.5), R'(3.0), \ldots, R'(0.5)$
h) $S'(3.5), S'(3.0), \ldots, S'(0.5)$

Nos itens (e) até (f) os seus desenhos vão ter infinitas bolinhas... aliás, você vai ter que fazer desenhos que *finjam* que têm infinitas bolinhas, e nos quais o leitor consiga entender o que você quis representar... dica: leia a seção “Mais sobre bolinhas” nas páginas 29 até 36 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29



Exercício 9.

A seção "Mais sobre bolinhas" daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29
tem dicas sobre como visualizar subconjuntos "definidos por proposições", como este aqui:

$$\{\, x \in A \mid P(a) \,\}$$

A gente primeiro marca cada ponto de A com uma bolinha ou preta ou branca, e depois a gente pega o conjunto das bolinhas pretas e interpreta ele como um outro conjunto – o resultado.

Use isto pra visualizar cada um dos conjuntos à direita e pra encontrar uma descrição mais simples para cada um deles. Geralmente essas "descrições mais simples" vão ser em notação de intervalos.

As funções $P, \ldots, S, P', \ldots, S'$ são as do exercício 8. O símbolo $\overline{\mathbb{R}}$ denota a "reta real estendida":

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= [-\infty, +\infty] \end{aligned}$$

Para mais detalhes, veja:
https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line

a) $\{\, y \in [0,3] \mid P(y) \,\}$
b) $\{\, y \in [0,3] \mid Q(y) \,\}$
c) $\{\, y \in [0,3] \mid R(y) \,\}$
d) $\{\, y \in [0,3] \mid S(y) \,\}$

a') $\{\, y \in [0,3] \mid P'(y) \,\}$
b') $\{\, y \in [0,3] \mid Q'(y) \,\}$
c') $\{\, y \in [0,3] \mid R'(y) \,\}$
d') $\{\, y \in [0,3] \mid S'(y) \,\}$

e) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid P(y) \,\}$
f) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid Q(y) \,\}$
g) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid R(y) \,\}$
h) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid S(y) \,\}$

i) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(y) \,\}$
j) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid Q(y) \,\}$
k) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid R(y) \,\}$
l) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid S(y) \,\}$

Na Semana Acadêmica...

Durante a Semana Acadêmica tente entender as definições de "sup" e "inf" das páginas 2 até 15 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf

...e se você tiver curiosidade dê uma olhada aqui:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Supremo_e_%C3%ADnfimo

As definições da Wikipedia são muito mais abstratas.

Muitas das construções que nós vamos ver em Cálculo 3 vão ser definidas usando sequências grandes de definições, exatamente como no PDF sobre infs e sups do link acima... Por exemplo:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-plano-tangente.pdf#page=5

Quantificadores

Veja as páginas 14 até 17 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=14

O truque do elemento neutro

Como $2^0 = 1$, e o 1 é o elemento neutro da multiplicação, isso aqui funciona:

$$\begin{array}{rcl}
2^1 \cdot 2^4 & = & (2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \\
2^2 \cdot 2^3 & = & (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \\
2^3 \cdot 2^2 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \\
2^4 \cdot 2^1 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2) \\
2^5 \cdot 2^0 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2^0) \\
 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 1 \\
 & = & (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)
\end{array}$$

O truque do elemento neutro pra quantificadores

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{20\}.P(x)) \land (\forall x \in \{42,99,200\}.P(x)) & = & (P(20)) \land (P(42) \land P(99) \land P(200)) \\
(\forall x \in \{20,42\}.P(x)) \land (\forall x \in \{99,200\}.P(x)) & = & (P(20) \land P(42)) \land (P(99) \land P(200)) \\
(\forall x \in \{20,42,99\}.P(x)) \land (\forall x \in \{200\}.P(x)) & = & (P(20) \land P(42) \land P(99)) \land (P(200)) \\
(\forall x \in \{20,42,99,200\}.P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.P(x)) & = & (P(20) \land P(42) \land P(99) \land P(200)) \land (\forall x \in \emptyset.P(x)) \\
& = & (P(20) \land P(42) \land P(99) \land P(200)) \land \mathbf{V} \\
& = & (P(20) \land P(42) \land P(99) \land P(200))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists x \in \{20\}.P(x)) \lor (\exists x \in \{42,99,200\}.P(x)) & = & (P(20)) \lor (P(42) \lor P(99) \lor P(200)) \\
(\exists x \in \{20,42\}.P(x)) \lor (\exists x \in \{99,200\}.P(x)) & = & (P(20) \lor P(42)) \lor (P(99) \lor P(200)) \\
(\exists x \in \{20,42,99\}.P(x)) \lor (\exists x \in \{200\}.P(x)) & = & (P(20) \lor P(42) \lor P(99)) \lor (P(200)) \\
(\exists x \in \{20,42,99,200\}.P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.P(x)) & = & (P(20) \lor P(42) \lor P(99) \lor P(200)) \lor (\exists x \in \emptyset.P(x)) \\
& = & (P(20) \lor P(42) \lor P(99) \lor P(200)) \lor \mathbf{F} \\
& = & (P(20) \lor P(42) \lor P(99) \lor P(200))
\end{array}
$$

Visualizando proposições

Como visualizar
"O retângulo $3(4-2)$ está abaixo do gráfico da f"?

Isto pode ser formalizado como:
$\forall x \in [2,4].3 \leq f(x)$

Veja a páginas 5 a 8 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=5