Cálculo 2 - 2022.2

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Cálculo 2 - 2022.2

Aulas 1 e 3: a operação '[:=]', ou:
aqui o curso tem um buraco

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

O macaco

Você já deve ter assistido o vídeo do Mathologer sobre o "Calculus Made Easy":

http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html

Eu vou usar esse vídeo como uma espécie de mapa pra um monte de idéias importantes de curso de Cálculo 2, e o Mathologer — obs: às vezes eu vou chamar ele de Burkard, que é o nome dele... ele respondeu um e-mail meu, então vou fingir ele é meu amigo, tá =) — mas, bom, voltando: o Mathologer diz várias vezes que a gente pode treinar um macaco pra calcular derivadas, e isso vai ser uma das coisas mais importantes do meu curso de Cálculo 2. Deixa eu explicar.

Num curso tradicional de Cálculo 1 a gente faz centenas de horas de contas na mão. Aí a gente adquire muita prática nisso e a gente passa a poder fazer o papel do macaco muito bem. Depois que a gente tem essa prática toda a gente *começa* a poder fazer também um outro papel, que é o papel na pessoa que programa o macaco e diz quais regras ele tem que seguir...

Deixa eu dar um exemplo. No trecho do vídeo que começa no 17:00 a gente vê como o macaco calcula a derivada $\left(\frac{5+\sin x}{x^3 \ln x}\right)'$ "fazendo a álgebra no piloto automático". Se a gente seguir o vídeo com bastante atenção a gente vê que o macaco não está usando só as 5 regras pra derivada que aparecem na coluna esquerda no vídeo no 16:15, que o Burkard escreve como $(f+g)' = f'+g'$, $(f-g)' = f'-g'$, $(fg)' = f'g+fg'$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$ e $(f(g))' = f'(g)g'$... o macaco também usa as regras que o Burkard põe na tabela na parte de cima da tela no 13:00, e no 17:35 ele calcula em separado o resultado de $(5+\sin x)'$ — que dá $\cos x$ — e no 17:50 o macaco substitui o $(5+\sin x)'$ na expressão original por $\cos x$.

Exercício 1.

Acesse o PDF do capítulo 2 do Leithold.

Entre as páginas 68 e 70 ele tem várias contas de limites feitas passo a passo, com os sinais de '$=$' alinhados e com justificativas à direita. Esse formato está explicado aqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=7`

Faça as contas que o Mathologer faz entre o 17:00 e o 18:15 nesse formato, com os '$=$'s alinhados e as justificativas à direita, e com as restrições que eu vou pôr no quadro (vou PDFizar elas depois)...

Aula 3: Derivadas formais (e algumas coisas relacionadas)

Dê uma olhada na seção 3.3 do Leithold (no capítulo 3). Os teoremas 3.3.1 até 3.3.7 dele correspondem exatamente às operações de derivação que o Mathologer usa no vídeo (obs: a regra da cadeia é o teorema 3.6.1), mas cada um desses teoremas tem uma *fórmula* e as *hipóteses* necessárias pra fórmula valer. O macaco que calcula derivadas no vídeo do Methologer no trecho entre 17:00 e 18:15 usa só as fórmulas sem checar que as hipóteses valem. O que o macaco faz é chamado de *derivação formal*, e está explicado aqui:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Formal_derivative`

Em Cálculo 2 nós vamos ver várias operações que são tão difíceis que é o melhor jeito de aprendê-las, e de debugar erros nelas, é dividindo elas em várias partes. Nós acabamos de ver que "calcular derivadas (complicadas)" pode ser dividido em "aplicar fórmulas" e "checar hipóteses", e você deve lembrar que você passou a maior parte do seu curso de Cálculo 1 só “aplicando fórmulas” sem “checar hipóteses”, ou checando as hipóteses rapidinho no olho, mas sem escrever nada tipo “aqui as hipóteses fulana e beltrana valem, então blá”.

Nos últimos semestres *moooooontes* de alunos chegaram em Cálculo 2 sem saber “aplicar fórmulas” direito. Eu também vou dividir a operação de “aplicar uma fórmula” em várias partes, até chegar a uma parte — a operação ‘[:=]’ — que é fácil de implementar num computador e que corresponde exatamente ao que o macaco que do Mathologer faz, mas que o Mathologer não explica explicitamente.

Se você tiver qualquer dificuldade com essa operação ‘[:=]’ o melhor modo de estudá-la é estudando a matéria de Cálculo 1 e Cálculo 2 pelo Leithold e vendo como essa operação aparece implicitamente em todo lugar, mas sempre acompanhada do “checar hipóteses”.

Eu costumo dividir essa operação de "aplicar fórmula" em várias operações separadas e dar um nome "padrão" pra cada uma dessas operações. Os programas de computação simbólica também fazem essa divisão em várias suboperações, porque cada suboperação corresponde a uma função diferente, e essas funções podem ser chamadas em separado. Eu vou usar a terminologia do Maxima, que é o programa de computação simbólica que eu tenho usado... o Maxima considera "substituição" e "simplificação" como operações separadas. O "Maxima Workbook" explica substituição na seção 11.4 e simplificação no capítulo 12; ele também explica "formas canônicas" nas seções 9.2 e 9.3, e eu vou considerar que "pôr uma expressão na sua forma canônica" é uma forma de simplificação. Link:

`http://roland-salz.de/Maxima_Workbook.pdf`

Deixa eu dar um exemplo mais básico disso. Nós conhecemos a fórmula $2a = a + a$. Se nós *só* substituirmos todos os 'a' nesta fórmula por 10 o resultado é $2 \cdot 10 = 10 + 10$; trocar $2 \cdot 10$ por 20, ou $10 + 10$ por 20, são consideradas "simplificações".

A substituição sempre substitui *variáveis* por *expressões*.

No vídeo do Mathologer ele às vezes abrevia $f(x)$ como f, e desabrevia isso depois, e ele às vezes escreve 'df' pra "diferencial" (veja a seção 4.9 do Leithold). É muito mais difícil formalizar contas de Cálculo — ou seja, justificar formalmente cada passo delas — quando a gente permite esses truques (que são parte da "notação de Leibniz"). Na maior parte do meu curso esses truques vão ser proibidos; ele às vezes vão ser permitidos temporariamente, mas a gente sempre vai ver como tratar as contas em que eles são permitidos como "versões abreviadas" de contas em que eles são proibidos. Depois eu vou disponibilizar um monte de links sobre porque é que os matemáticos pararam de usar a notação de

Leibniz.

Exercício 2: árvores

Vai ser muito mais fácil a gente entender como o macaco derivador funciona se a gente souber tratar expressões matemáticas como árvores.

Veja os dois screenshots abaixo — eles mostram como Maxima e o Sympy representam certas expressões como árvores. *Note que as representações são diferentes!*

`http://angg.twu.net/IMAGES/luatree.png`
`http://angg.twu.net/IMAGES/luatree-sympy.png`

Pegue algumas expressões que você obteve no exercício 1 e represente elas como árvores no formato do Maxima.

Exercício 2: dicas

Lembre que nas árvores não aparecem parênteses.
Lembre que $a - b - c = (a - b) - c$.
Lembre que $a - (b - c) \neq (a - b) - c$.
Lembre que $a - (b - c)$ e $(a - b) - c$ dão árvores diferentes.
Lembre que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

MUITO IMPORTANTE: lembre que na maior parte do curso a expressão 'dx' não vai poder aparecer sozinha... eu vou até me referir a ela a toda hora como "uma espécie de fecha parêntese" pra fazer as pessoas lembrarem disso.

Funções menos elementares

No vídeo o Mathologer primeiro define "funções elementares" de um jeito, e depois, a partir do 27:26, ele diz que poderíamos ter incluído nas nossas operação que criam novas funções elementares a operação que obtém a inversa de uma função... ele não dá detalhes, mas repara que se a gente puder obter a inversa de toda função a gente vai ter que poder obter a inversa de funções constantes, como por exemplo $f(x) = 1$... então provavelmente o que ele quer dizer é que a gente quer considerar como "elementares" coisas como $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, etc...

Obs: falta LaTeXar as coisas que a gente viu no final da aula de 2022aug31! As fotos dos quadros desse dia estão aqui:

http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=3

EDOs por chutar-e-testar

Links pros exercícios de hoje:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=12
http://angg.twu.net/2022.1-C2/C2-quadros.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VSB.pdf#page=9
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=185

...e os exercícios da seção 5.1 do Leithold.

Cálculo 2 - 2022.2

Aula 2: derivação e integração com o Mathologermóvel

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Este PDF vai ser refeito depois!
Por enquanto:

1) assista a parte do vídeo do Mathologer sobre como usar um carro pra derivar e integrar — essa parte começa no 3:12. Link:

`http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html#03:08`

Repare que ele sempre põe o gráfico da distância em cima e o gráfico da velocidade embaixo; quando ele fala de derivação ele começa com uma função “original”, f, em cima e ele desenha, ou escreve, a derivada dela, f', embaixo.

2) O Leithold define a inclinação de uma reta na página 17 (no capítulo 1) e na página 150 (no capítulo 3) ele discute a derivada da função $|x|$. Leia estes trechos.

Item 3

Considere que a função $G(x)$ do exercício 4 daqui

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-TFC1.pdf#page=10

é um gráfico da posição do mathologermóvel no tempo. Copie esse gráfico num papel e abaixo dele faça o gráfico correspondente da velocidade do mathologermóvel no tempo.

Tem uma espécie de gabarito desse exercício aqui:

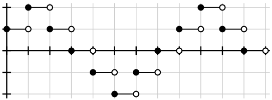
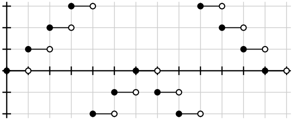
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT3.pdf#page=4

Item 4

Na P1 do semestre passado — link:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P1.pdf#page=7

eu defini as funções $f(x)$ e $g(x)$ desta forma:

$f(x) =$  $g(x) =$ 

Interprete esses gráficos da $f(x)$ e da $g(x)$ como dois gráficos diferentes da velocidade do mathologermóvel no tempo. Copie elas num papel e acima de cada um deles faça o gráfico correspondente da posição do mathologermóvel no tempo.

Tem uma espécie de gabarito disso aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P1.pdf#page=8

Item 5

Faça o exercício 1 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-TFC1.pdf#page=7

Pra fazer ele você vai ter que interpretar o gráfico da $f(x)$ como um gráfico de velocidade, e você vai que interpretar expressões como esta aqui

$$\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx$$

como o quanto a posição do mathologermóvel varia entre o "instante inicial", que é $t = 1.5$, e o "instante final", que é $t = 2$.

Cálculo 2 - 2022.2

Aula 6: Integração por partes
(e integração por chutar e testar)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

Ainda não digitei tudo o que a gente fez nessa aula, só uma parte...

Link pras fotos do quadro desse dia:

`http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=8`

A gente vai começar entendendo as seções 5.1 e 5.2 do Leithold, mas vamos traduzir algumas coisas dele pra uma linguagem mais simples... principalmente isto,

$$\int df(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{df(x)}{dx}\,dx \;\Rightarrow\; \int \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx \;\Rightarrow\; \int f'(x)\,dx$$

...e a definição de integral indefinida.

Outra definição pra integral indefinida

O Leithold, e a maioria dos livros, usam uma definição bem complicada pra $\int 2x\,dx$... pra eles $\int 2x\,dx$ é o conjunto de todas as 'f's que obedecem isto aqui:

$$f'(x) = 2x$$

e x^2+C é o conjunto de todas as 'g's que são "da forma x^2+C" para algum $C \in \mathbb{R}$, e pra ele esta igualdade

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

quer dizer: o conjunto de funções $\int 2x\,dx$ é igual ao conjunto de funções x^2+C.
Nós vamos usar uma outra definição pra igualdades como esta,

$$\int f(x)\,dx = g(x),$$

que é a seguinte: as três igualdades abaixo vão ser equivalentes pra nós,

$$\begin{array}{rcl} \int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & g(x) \\ \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx & \overset{?}{=} & g(x) \\ f(x) & \overset{?}{=} & \frac{d}{dx}g(x) \end{array}$$

Essa tradução vai servir pra qualquer igualdade com integrais, e ela vai nos permitir testar facilmente se uma igualdade com integrais é verdadeira ou não. Por exemplo, digamos que o macaco integrador do Mathologer tem estas integrais na tabela de integrais dele:

$$\begin{array}{rcl} \int x\,dx & = & \frac{1}{2}x^2+3 \\ \int 2x\,dx & = & x^2+42 \end{array}$$

Então dá pra testar esta igualdade

$$\int 2x\,dx \quad = \quad 2\int x\,dx + 99$$

assim:

$$\begin{array}{rcl} \int 2x\,dx & \overset{?}{=} & 2\int x\,dx + 99 \\ \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\int 2x\,dx}_{x^2+42}}_{2x} & \overset{?}{=} & \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{(\underbrace{2\underbrace{\int x\,dx}_{\frac{1}{2}x^2+3}}_{x^2+6}+99)}_{x^2+105}}_{2x} \end{array}$$

ou seja, a igualdade acima é verdadeira — e a gente conseguiu testar isso usando números "concretos" ao invés de '$+C$'s! Yesss!!! =)

Meme: expanding brain, versão ln

Na definição do Leithold a fórmula
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ é FALSA!!!
A fórmula certa é a que aparece na quarta linha desse meme aqui:

$$
\begin{array}{rcl}
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln x \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln|x| \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \ln|x| + C \\
\int \frac{1}{x}\,dx &=& \begin{cases} \ln|x| + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln|x| + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases}
\end{array}
$$

Esse vídeo aqui mostra como é que o C_1 "ajusta a altura da parte esquerda" e o C_2 "ajusta a altura da parte direita" do gráfico:

http://www.youtube.com/watch?v=u4kex7hDC2o#t=5m25s

Pedaços do quadro

Os próximos slides têm alguns pedaços do que eu escrevi no quadro nessa aula, e que eu ainda não tive tempo de digitar... Lembre que dá pra acessar as fotos do quadro aqui:

`http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=8`

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx = \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$[IP] = \boxed{\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx}$$

$$[IP]\begin{bmatrix} f := x \\ g := e^x \\ f' := 1 \\ g' := e^x \end{bmatrix}$$

$$= \left(\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'} \, dx = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} dx \right)$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx \qquad \left(\text{POR } [IP] \text{ COM: } \begin{matrix} f(x) := x \\ g(x) := e^x \end{matrix} \right)$$

$$= x e^x - e^x$$

MINI-EXERCÍCIO:
VERIFIQUE SE ESTA IGUALDADE É VERDADE:

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x$$

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} \, dx = \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} \, dx$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x \right) \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \\
&= \left(x^2 - 2x + 1 \right) e^x
\end{aligned}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{f}\,\underbrace{e^{5x}}_{g'}\,dx \overset{(1)}{=} \underbrace{x^2}_{f}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{5}e^{5x}}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{5}e^{5x}}_{g}\,dx$$

POR [IP] con: $f(x) := x^2$, $g(x) := \frac{1}{5}e^{5x}$

$$\overset{(2)}{=} x^2\cdot\tfrac{1}{5}e^{5x} - 2\cdot\tfrac{1}{5}\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^{5x}}_{g'}\,dx$$

$$\overset{(3)}{=} x^2\cdot\tfrac{1}{5}e^{5x} - 2\cdot\tfrac{1}{5}\Big(\underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{5}e^{5x}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{5}e^{5x}}_{g}\,dx\Big)$$

POR [IP] con $f(x) := x$, $g(x) := \frac{1}{5}e^{5x}$

$$\overset{(4)}{=} \tfrac{1}{5}x^2e^{5x} - \tfrac{2}{25}xe^{5x} + \tfrac{2}{25}\int e^{5x}\,dx$$

$$\overset{(5)}{=} \tfrac{1}{5}x^2e^{5x} - \tfrac{2}{25}xe^{5x} + \tfrac{2}{125}e^{5x}$$

$$\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^{5x}}_{g'}\,dx = \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{5}e^{5x}}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{5}e^{5x}}_{g}\,dx$$

Exercícios pra casa
Como a gente generalizaria a conta da página 10?
Mais precisamente: você consegue fazer contas parecidas com as da página 10, mas que:

a) Integrem

$$\int x^2 h''(x)\,dx\ ?$$

a) "Apliquem integração por partes duas vezes" em

$$\int m(x)h''(x)\,dx\ ?$$

Cálculo 2 - 2022.2

Aula 9: Frações Parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

Tanto o Leithold quanto o Daniel Miranda
têm seções sobre frações parciais.
A seção do Leithold é a 9.5.
A do Miranda é a 8.1:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=240

A idéia de frações parciais que vai ser
mais importante pra outras matérias é que
operações como polinômios são como
operações sobre números "sem vai um".
Tem figuras (manuscritas) sobre isso aqui:
http://angg.twu.net/2019.1-C2/2019.1-C2.pdf#page=26
http://angg.twu.net/2019.2-C2/2019.2-C2.pdf#page=43

Slogan: contas sem "vai um" podem ser traduzidas pra contas com polinômios.

O que mais nos interessa pra Frações Parciais é divisão com resto. Exemplo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 7 & 7 & 3 & 12 \\ \cline{5-5}
-2 & 4 & & & 231 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 7 & & \\
- & 3 & 6 & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 3 & \\
 & - & 1 & 2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2400 &= 200 \cdot 12 \\
360 &= 30 \cdot 12 \\
12 &= 1 \cdot 12 \\
2772 &= 231 \cdot 12 \\
2773 &= 231 \cdot 12 + 1
\end{aligned}
$$

...e tradução do exemplo para polinômios:

$$
\begin{array}{rl}
2x^3+7x^2+7x+3 & \underline{\big|\ \ x+2 \quad} \\
\underline{-(2x^3+4x^2)} \qquad\qquad & 2x^2+3x+1 \\
3x^2+7x \quad\ & \\
\underline{-(3x^2+6x)} \quad & \\
1x+3 & \\
\underline{-(1x+2)} & \\
1 \ &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^3+4x^2+0x+0 &= (2x^2+0x+0)\cdot(x+2) \\
3x^2+6x+0 &= (3x+0)\cdot(x+2) \\
1x+2 &= 1\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+1 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+3 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1
\end{aligned}
$$

Exercício 1
Algumas consequências da regra da cadeia...

$$[\mathrm{RC}] \;=\; \left(\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\right)$$

Obtenha os seguintes casos particulares da [RC]:

a) $g(x) = 2x$
b) $g(x) = 2x + 3$
c) $g(x) = x + 3$
d) $g(x) = x + 3,\ f(x) = \ln x$
e) $g(x) = -x$
f) $g(x) = -x,\ f(x) = \ln x$
g) $g(x) = -x + 200,\ f(x) = \ln x$

Exercício 2.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

Derivadas formais (de novo)

Todas estas igualdades são verdadeiras, mas se tentarmos formalizar elas com todos os detalhes vamos ver que várias delas falam de funções com domínios diferentes...

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx}\ln x &= \tfrac{1}{x} \\
\tfrac{d}{dx}\ln(-x) &= \tfrac{1}{x} \\
\tfrac{d}{dx}\ln|x| &= \tfrac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln(x) \\
\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln(x) + C \\
\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln(-x) \\
\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln(-x) + C \\
\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln(|x|) \\
\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln(|x|) + C \\
\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{quando } x < 0, \\ \ln(x) + C_2 & \text{quando } x > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 + 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 3.

a) together $\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)= ?$

b) together $\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}\right)= ?$

c) together $\left(\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}\right)= ?$

Exercício 4.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a)

a)
$$\begin{array}{rcl}
\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} & = & \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\
\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} & = & \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
& = & \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
& = & \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\
c & = & A+B \\
d & = & -Ab-Ba \\
e & = & -a-b \\
f & = & ab
\end{array}$$

Exercício 4: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o '[:=]':

$$\begin{aligned} &\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f}\right)\begin{bmatrix} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{bmatrix} \\ =&\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}\right), \end{aligned}$$

e sabemos que esta igualdade é verdade:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{aligned} c &= A+B \\ d &= -Ab-Ba \\ e &= -a-b \\ f &= ab \end{aligned}$$

é uma solução para a equação

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \quad \ldots$$

mas não sabemos se é a única solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o '[:=]'. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5)=0:$$

São:

$$\begin{aligned} ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=2] &= \\ ((2-2)(2-5)=0) & \\ ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=5] &= \\ ((5-2)(5-5)=0) & \end{aligned}$$

Nenhum livro "básico" define "solução de uma equação" desse jeito — como "a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira" — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são "equações" e "soluções"...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição "as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter 'x'" o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 4: uma solução pro item (b)

Temos duas soluções para

$$(x-a)(x-b) = x^2 - 7x + 10:$$

uma é $a=2$ e $b=5$, e a outra é $a=5$ e $b=2$.
Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar.
A gente pode chutar que $a=5$, $b=2$, e que c,d,e,f são os que a gente obtém pelo item (a), e aí ver se isso nos leva a uma solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 4: item (c)
Seja [PFP] esta igualdade aqui – o "princípio por trás das frações parciais":

$$[\mathrm{PFP}] \quad = \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad = \quad \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251`
e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\mathrm{PFP}] \begin{bmatrix} a:=? \\ b:=? \\ A:=? \\ B:=? \end{bmatrix}$$

que "está por trás" da sua solução.

Exercício 5.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2}\,dx \quad = \quad ?$$

Exercício 6.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x + 2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x + 2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x + 2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide ?? a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original
em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Uma questão da P1 de 2020.1

A questão 3 da P1 de 2020.1,

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf`

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.

Cálculo 2 - 2022.2

Aula 10: Mudança de variáveis
(e integrais de potências de senos e cossenos)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

A mudança de variáveis na integral *indefinida* ("MVI") é uma gambiarra que eu até hoje ainda não sei interpretar geometricamente.

A mudança de variáveis na integral *definida* ("MVD") – que nós vamos ver depois! – é fácil de interpretar geometricamente: ela muda os limites de integração. Veja esta figura aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=12

Nós vamos tentar entender a MVI pela seção 5.2.1 do Leithold, pela seção 6.2 do Miranda e pela seção 5.5 do Thomas. Links:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=192
http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_5.5_e_5.6.pdf

O Miranda explica como integrar potências de senos e cossenos na seção 8.3:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=255

Veja também:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=16
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=39
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VSB.pdf#page=8
http://www.youtube.com/watch?v=PTCUjrEBc4g#t=4m35s (até 10:00)

Uma conta com mudança de variáveis

[MVI]: mudança de variáveis na integral indefinida.
[MVA]: uma aplicação típica do [MVI] (caso geral).
[MVA] [...]: uma aplicação típica do [MVI] (caso particular).

Compare com o Teorema 5 e o Exemplo 3 daqui:
http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_5.5_e_5.6.pdf

$$[\text{MVI}] \quad = \quad \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \right)$$

$$[\text{MVA}] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int f'(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} & = & \displaystyle\int f'(u)\,du \\ & = & f(u) \\ & = & f(g(x)) \end{array} \right)$$

$$[\text{MVA}] \begin{bmatrix} f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \\ g(x) := x^2 \\ g'(x) := 2x \end{bmatrix} \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int \cos(\underbrace{x^2}_{u}) \cdot \underbrace{\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} & = & \displaystyle\int \cos(u)\,du \\ & = & \operatorname{sen}(u) \\ & = & \operatorname{sen}(x^2) \end{array} \right)$$

Justificando cada igualdade

Quando os livros dizem "$u = g(x)$" eles não dizem claramente em quais lugares podemos substituir u por $g(x)$...
Por exemplo, será que podemos fazer isto aqui?

$$\int f'(u)\,du \;=\; \int f'(g(x))\,du$$

Eu acho que não, mas até hoje eu não sei as regras exatas...
Me parece que o melhor modo de justificar estas três igualdades

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int f'(u)\,du \;=\; f(u) \;=\; f(g(x))$$

é assim:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx\right)}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{\underbrace{\int f'(u)\,du}_{f(u)}}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{f(u)}_{f(g(x))}}_{f'(g(x))g'(x)} \;=\; \underbrace{\frac{d}{dx}f(g(x))}_{f'(g(x))g'(x)}$$

Exercício 1.

Leia a seção 6.2 do Miranda. Ela começa na página 189:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=189

Entenda bem o exemplo 6.6 da página 192 dele.
Faça os exercícios de 1 a 13 das páginas 196 e 197, exceto pelos exercícios que envolvem secantes.

Dê uma olhada no meu modo preferido de não me enrolar na mudança de variáveis, que é o método das "caixinhas de anotações", explicado aqui, nas páginas 39–44,

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=39

e tente usá-lo.

Exercício 2.

Entenda bem os exemplos 1, 2 e 3 da seção 8.3 do Miranda,

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=255

e as "caixinhas de anotações":

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=39
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=16

Depois disso resolva estas três integrais:

a) $\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x \, dx$
b) $\int (\cos x)^4 (\operatorname{sen} x)^3 \, dx$
c) $\int (\cos x)^4 (\operatorname{sen} x)^5 \, dx$

Cálculo 2 - 2022.2

Aulas 11 e 12: substituição trigonométrica
(a derivada da função inversa)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

Vamos usar a seção 9.4 do Leithold
e a seção 8.4 do Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

Alguns links pra PDFs antigos meus:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-algumas-t-ints.pdf#page=24
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-subst-trig.pdf#page=1
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P2.pdf#page=2
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VSA.pdf#page=4

Quadros da primeira aula sobre substituição
trigonométrica (ainda não digitei o conteúdo deles):
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=22

Exercício 1

Simplificando raizes quadradas

Nas últimas aulas você aprendeu – na prática, não vendo uma definição formal – o que é transformar uma integral mais difícil numa integral mais fácil, que nós sabemos integrar...

a) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}\,ds$. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

b) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

c) Digamos que você sabe integrar $\int \sqrt{1-s^2}^k\,ds$ para qualquer valor de k. Transforme $\int \sqrt{1-(5x)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

d) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

e) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

f) Transforme $\int \sqrt{1-(ax)^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

g) Entenda este truque aqui:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3^2-x^2} & = & \sqrt{3^2-3^2\frac{1}{3^2}x^2} \\ & = & \sqrt{3^2-3^2(\frac{x}{3})^2} \\ & = & \sqrt{3^2(1-(\frac{x}{3})^2)} \\ & = & \sqrt{3^2}\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \\ & = & 3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2} \end{array}$$

Use ele – com adaptações, óbvio – pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

h) Use ele pra transformar $\int \sqrt{25-x^2}^{42}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

i) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int \sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

j) Use ele pra transformar $\int x^{20}\sqrt{a^2-x^2}^k\,dx$ em algo que você sabe integrar.

Exercício 2

No final da aula de 28/set – veja a foto do quadro:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=23
nós vimos que a demonstração de que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ pode ser generalizada, e aí a gente obtém a "fórmula da derivada da função inversa", que eu chamei de [DFI]...
Essa generalização pode ser "especializada" pra obter outros casos particulares diferentes de $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$.

a) Faça o primeiro exercício que eu pus no quadro:

$$[\text{DFI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \cos x \end{bmatrix} = ?$$

b) Faça o segundo exercício do quadro:

$$[\text{DFI}]\begin{bmatrix} g(x) := \operatorname{arcsen} x \\ g'(x) := \operatorname{arcsen}' x \\ f(x) := \operatorname{sen} x \\ f'(x) := \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2} \end{bmatrix} = ?$$

c) Use as identidades trigonométricas que vamos ver em sala pra encontrar uma fórmula pra derivada do arctan.

d) Use as identidades trigonométricas que vamos ver em sala pra encontrar uma fórmula pra derivada do arcsec.

Exercício 3

Slogan:

> *Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

Durante a quarentena eu dei algumas questões de prova sobre este slogan. Dê uma olhada:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=15

a) Resolva a integral abaixo usando uma mudança de variável só (dica: $u = g(h(x))$):

$$\int f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)\,dx = ?$$

b) Resolva a integral acima usando duas mudanças de variável. Dica: comece com $u = h(x)$.

O Miranda e o Leithold preferem fazer em um passo só certas mudanças de variáveis que eu prefiro fazer em dois ou três passos. Entenda o exemplo 8.1 do Miranda – o da seção 8.4, na página 264...

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#263

c) ...e descubra como resolver a integral dele fazendo duas mudanças de variáveis ao invés de uma só. A segunda mudança de variável vai ser $s = \operatorname{sen}\theta$, e a primeira eu prefiro não contar qual é – tente usar as idéias do exercício 1 pra descobrir qual ela tem que ser.

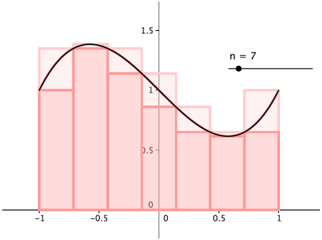
Cálculo 2 - 2022.2

Aula 13, 14 e 16: Somas de Riemann,
imagens de conjuntos, e infs e sups

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Introdução: Somas de Riemann

Somas de Riemann podem ser definidas de vários jeitos diferentes. A figura abaixo tem dois desses jeitos: os retângulos mais escuros dela são a "melhor aproximação por retângulos por baixo" para $\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx$; repare que todos esses retângulos mais escuros estão "apoiados no eixo x"...



Nós vamos considerar que os retângulos mais claros da figura também estão apoiados no eixo x, só que eles estão atrás dos mais escuros, então a gente só vê uma parte deles.

Esses retângulos mais claros – que, deixa eu repetir, estão todos apoiados no eixo x – são a "melhor aproximação por retângulos por cima" para $\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx$.

Dá pra fazer uma figura como essas na mão e no olhômetro assim: 1) a gente começa desenhando uma curva $y = f(x)$; 2) depois a gente desenha a parede esquerda da região $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$, que é um segmento vertical em $x = a$, e a parede direita, que é um segmento em $x = b$; 3) depois a gente divide o intervalo de integração, $[a, b]$, em um certo número de subintervalos – a Cristiane Hernández usou o intervalo $[-1, 1]$ e dividiu ele em 7 subintervalos iguais; 4) pra cada um desses subintervalos a gente desenha o retângulo mais alto cuja base é aquele intervalo e que está todo sob a curva $y = f(x)$; 5) pra cada um desses subintervalos a gente desenha o retângulo mais baixo cuja base é aquele intervalo e que está todo acima da curva $y = f(x)$; 6) aí a gente colore tudo do jeito certo, usando uma cor pra "melhor aproximação por retângulos por baixo" – os retângulos do passo 4 – e outra cor pra "melhor aproximação por retângulos por cim" – os retângulos do passo 5.

Eu peguei a figura à esquerda das notas da Cristiane Hernández. Link:
http://angg.twu.net/2015.1-C2/CALCULOIIA_EAD_Versao_Final_correcao_aulas_25_a_30.pdf#page=12

Atirei o Pau no Gato: seja como o Bob

Imagina que você está fazendo aula de flauta doce junto com o Alex e o Bob, e na prova vocês vão ter que tocar Atirei o Pau no Gato.
O Alex demora um tempão pra encontrar cada nota, e ele leva meia hora pra tocar a música toda.
O Bob toca a música toda certinha em menos de 30 segundos.
Quando saem as notas o Alex tirou uma nota baixa e o Bob tirou 10.
Aí o Alex vai chorar pontos e diz "*pôxa, profe, eu me esforcei muito!*"

Quando o Bob tocou Atirei o Pau no Gato ele fez a música *parecer fácil*. O esforço dele *ficou invisível*.

Seja como o Bob.

O que a gente vai fazer neste PDF vai parecer com o Atirei o Pau no Gato, só que com somatórios e retângulos e trapézios ao invés de notas. Você vai aprender a visualizar e a desenhar figuras com dezenas de retângulos e trapézios *em poucos segundos* – e você quer chegar no ponto em que fazer esses desenhos passa a ser bem fácil.

Somas de retângulos

No “item 5” da aula sobre o Mathologermóvel – links:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-mathologermovel.pdf#page=5
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-TFC1.pdf#page=7
você aprendeu a calcular áreas de figuras “feitas de retângulos”, e como essas áreas representavam *distâncias* você sabia que algumas áreas iriam “contar negativamente”...
Agora a gente vai fazer o contrário do que a gente fez naquela aula. Ao invés da gente transformar uma figura feita de retângulos – cuja área a gente quer calcular – numa expressão como esta aqui,

$$2(2-1.5)+3(4-2)$$

a gente vai transformar expressões como essa acima numa figura feita de retângulos. A convenção vai ser essa aqui. Por exemplo, em

$$3(4-2)$$

o 3 vai ser a altura do retângulo e $(4-2)$ vai ser a base dele. Mais precisamente, o “3” diz que o teto desse retângulo vai estar em $y=3$, e o “$(4-2)$” diz que a base dele vai de $x=2$ até $x=4$, e como nós agora só estamos interessados em retângulos apoiados no eixo x o chão dele vai ter $y=0$. Ou seja, os vértices dele vão ser:

$$\begin{array}{ll} (2,3), & (4,3), \\ (2,0), & (4,0). \end{array}$$

Lembre que matemáticos e físicos pensam de jeitos muito diferentes. Por exemplo, é comum livros de Física dizerem coisas tipo “áreas negativas não existem, então temos que fazer o ajuste tal”, ou “a massa não pode ser negativa, então blá”, e é comum livros de Matemática dizerem coisas tipo “vamos supor que existe um número i tal que $i^2=-1$. Então esse número i vai ter que ter as propriedades tais e tais...”
Lembre também que na aula de 29/setembro eu fiz uma figura sobre generalizar e depois disso obter outros casos particulares da fórmula geral... dá pra acessar essa figura aqui:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=24
Aqui nós vamos pensar “como matemáticos”, e pra gente isso aqui

$$y\cdot(x_d-x_e)$$

“vai ser” um retângulo apoiado no eixo x, com altura y e base indo de x_e (“extremidade esquerda”) até x_d (“extremidade direita”)... a representação gráfica dele vai ser a que eu descrevi acima, e a área dele vai ser o resultado numérico de $y\cdot(x_d-x_e)$ – que pode dar um número negativo!...

Exercício 1

a) Verifique que $3(4-2)$ e $3(2-4)$ são dois retângulos que têm a mesma interpretação geométrica, mas um tem área positiva e o outro tem área negativa.

Depois leia as páginas 35 e 36 daqui,
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-propriedades-da-integral.pdf#page=35`
e os dois links da página 35 pra Wikipedia em português, e represente graficamente cada um dos retângulos abaixo:

b) $(-3)(2-4)$
c) $(-3)(4-2)$
d) $0(4-2)$
e) $0(2-2)$
f) $3(2-2)$

Pra nós todos eles são "retângulos". Na definição da Wikipedia quais deles são "retângulos degenerados"?

Somatórios

Dá pra expandir somatórios tanto em um passo só como em dois passos, como aqui:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \\
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & (10^k)[k := 2] \\
 & + & (10^k)[k := 3] \\
 & + & (10^k)[k := 4] \\
 & + & (10^k)[k := 5] \\
 & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5
\end{array}$$

Exercício 2

Veja esta página aqui para os detalhes,
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=13`
e faça todos os itens do Exercício 3 dela.

O jeito esperto

Leia as páginas 6 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=7

Exercício 3

a) Faça o exercício 1 da página 6 desse PDF –
o que pede pra você desenhar uma parábola.

b) Desenhe sobre essa parábola o retângulo $f(0.5)(1 - 0.5)$.
Aqui você $\boxed{\text{TEM}}$ que usar o "jeito esperto".

Se você não aprender a usar o jeito esperto:

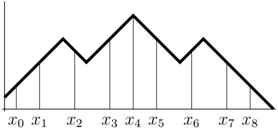
- você vai demorar muito,
- seu retângulo não vai ter um vértice sobre a parábola,
- e você nunca vai virar o Bob.

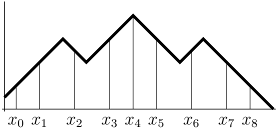
Exercício 4.

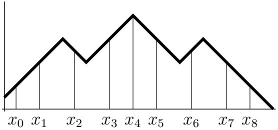
Seja $f(x)$ a função da próxima página.
Você vai receber (pelo menos) uma cópia dessa página.
Faça cada item abaixo em um dos 12 gráficos da $f(x)$.

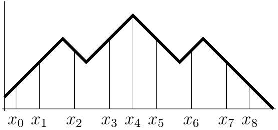
Represente graficamente cada um dos somatórios abaixo.
Se você tiver dificuldade com algum desses somatórios
comece expandindo ele em dois passos, como na página 7.

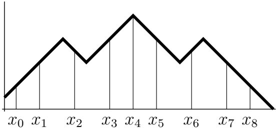
a) $\sum_{i=1}^{8} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$
b) $\sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8} \max(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
d) $\sum_{i=1}^{8} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$
e) $\sum_{i=1}^{8} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})(x_i - x_{i-1})$
f) $\sum_{i=1}^{8} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$

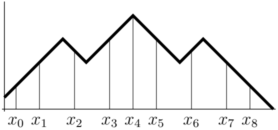

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

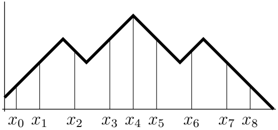

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

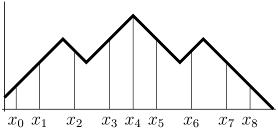

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

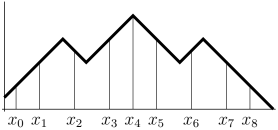

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

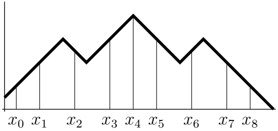

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

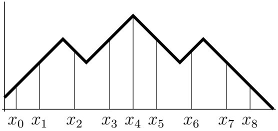

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

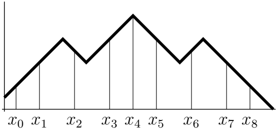

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8


x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

Soma superior e soma inferior

Nas páginas 217 e 218 o Miranda define as notações

$$\min_{x \in I} f(x) \qquad \text{e} \qquad \max_{x \in I} f(x)$$

usando o truque do "vire-se": ele mostra uma figura e o leitor tem que se virar pra entender o que essas notações querem dizer... veja:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=218

Exercício 5.
a) Entenda o que essas notações do Miranda querem dizer e verifique que nas figuras da página 9 temos:

$$\begin{array}{rcl} \max(f(x_1), f(x_2)) & \lneqq & \displaystyle\max_{x \in [x_1, x_2]} f(x) \\ \displaystyle\min_{x \in [x_2, x_3]} f(x) & \lneqq & \min(f(x_2), f(x_3)) \end{array}$$

e depois represente nos gráficos da página 9:
b) $\sum_{i=1}^{8} (\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$
c) $\sum_{i=1}^{8} (\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1})$

“Set comprehensions”

Lembre que:

$$\begin{array}{rcl} \{\, a \in \{1,2,3,4\} \mid a \geq 3 \,\} &=& \{3,4\}, \\ \{\, 10a \mid a \in \{1,2,3,4\} \,\} &=& \{10,20,30,40\}\ldots \end{array}$$

Se você não lembrar tente ler as páginas 8 a 12 daqui,
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8
que tem explicações e exercícios, mas as explicações estão escritas numa ordem estranha... =(

Resumindo muitíssimo: existem dois tipos diferentes de notações da forma “$\{\ldots \mid \ldots\}$”, e um bom modo de entender como elas funcionam é anotar quais pedaços delas são “geradores”, quais são “filtros”, e quais são “resultado”; os “geradores” funcionam como o ‘for’ de uma linguagem de programação, os filtros funcionam como um ‘if’ – ou, mais precisamente, como um “if not ... then break” – e o “resultado” funciona como um ‘print’.

Exercício 6.
Entenda a expressão abaixo e calcule o resultado dela:

$$\{\ \underbrace{(x,y)}_{\text{resultado}} \ \mid \underbrace{y \in \{0,1,2,3\}}_{\text{gerador}}, \underbrace{x \in \{0,\ldots,y\}}_{\text{gerador}}, \underbrace{x+y \leq 5}_{\text{filtro}} \}$$

e compare-a com estes programinhas em Lua e Haskell:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/set_comprehensions_in_lua_and_haskell.png

Imagens de conjuntos finitos

Veja as páginas 5 e 6 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5

Dois abusos de linguagem
(que eu expliquei no quadro):

$$\begin{array}{rcl} f(\{7,8,9\}) & = & \{\, f(x) \mid x \in \{7,8,9\} \,\} \\ \max(a,b,c,d,e) & = & \max(a, \max(b, \max(c, \max(d,e)))) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(\{7,8,9\}) & = & \{f(7), f(8), f(9)\}, \\ \max(a,b,c,d,e) & = & \max(a, \max(b,c,d,e)) \\ & = & \max(a, \max(b, \max(c,d,e))) \\ & = & \max(a, \max(b, \max(c, \max(d,e)))) \end{array}$$

Imagens de intervalos

Veja as páginas 5 e 7 daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-somas-3.pdf#page=5

Digamos que na sua turma de Cálculo 2 tem dois Alexes diferentes, um Bob, um Carlos e um Daniel, e todo mundo tá tentando resolver um exercício que é o seguinte: "seja f a função da página 5 do link acima. Calcule $f([1,3])$".
Todo mundo reconhece que o intervalo $[1,3]$ é um conjunto com infinitos pontos, e cada pessoa tenta resolver esse exercício de um jeito diferente.

O Alex 1 decide começar listando todos os pontos do intervalo $[1,3]$. Ele vai primeiro obter uma lista de pontos que ele vai escrever nesse formato aqui,

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$$

e depois ele vai simplificar esse conjunto daqui,

$$\{f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots\}$$

transformando ele numa lista de números, pondo os números dessa lista em ordem e deletando as repetições... só que como o conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ é infinito ele nunca consegue terminar o primeiro passo.

O Alex 2 decide que ele vai pegar uma sequência de conjuntos finitos cada vez maiores, e "cada vez mais parecidos" com o conjunto $[1,3]$. Ele escolhe essa sequência aqui...

$$\begin{array}{rcl}
A_1 &=& \{1,3\}, \\
A_2 &=& \{1,2,3\}, \\
A_3 &=& \{1,1.5,2,2.5,3\}, \\
A_4 &=& \{1,1.25,1.5,1.75,2,2.25,2.5,2.75,3\}, \ldots
\end{array}$$

Ele calcula $f(A_1)$, $f(A_2)$, $f(A_3)$, $f(A_4)$ pelo gráfico usando o "jeito esperto" – como nas figuras da página 5 do link – e ele deduz, por um argumento informal e olhométrico, que $f([1,3])$ deve ser o intervalo $[3,4]$.

O Bob faz algo parecido como o Alex 2, mas ele encontra um modo de "levantar" todo o intervalo $[1,3]$ pro gráfico da função $y = f(x)$ de uma vez só, e de depois "projetar" pro eixo y esse "intervalo levantado". Ele obtém uma figura bem parecida com a última figura da página 5 do link, e ele descobre – também meio no olhômetro – que $f([1,3]) = [3,4]$.

O Carlos vê que é óbvio que $f([1,3]) = [f(1), f(3)] = \{3,3\} = \{3\}$, e portanto a imagem do intervalo $[1,3]$ pela função f é um conjunto com um ponto só. =(

O Daniel resolve que tudo isso é informal demais pra ele, e que ele precisa aprender um modo 100% preciso e formal de calcular $f([1,3])$ sem o gráfico. Ele descobre que vai ter que estudar uma coisa chamada "Análise Matemática", baixa o "*Elementary Analysis: The Theory of Calculus*" do Kenneth Ross, começa a estudar por ele e aprende coisa incríveis – mas ele leva um ano nisso.

Seja como o Bob!

Exercício 7.

Seja $f(x)$ esta função:

$f(x) =$ 

Calcule estas imagens de intervalos:

a) $f([0,1])$
b) $f([1,2])$
c) $f([0,2])$
d) $f([2,3])$
e) $f([1,3])$
f) $f([0,3])$
g) $f([0,4])$
h) $f([4,8])$
i) $f([0,8])$
j) $f([1,7])$

a') $f((0,1))$
b') $f((1,2))$
c') $f((0,2))$
d') $f((2,3))$
e') $f((1,3))$
f') $f((0,3))$
g') $f((0,4))$
h') $f((4,8))$
i') $f((0,8))$
j') $f((1,7))$

Dicas:

Faça os itens (a) até (j) primeiro. Os itens (a') até (j') são bem mais difíceis, e em alguns deles os resultados vão ser conjuntos fechados ou "semi-abertos".

O Leithold define intervalos semi-abertos na página 6 (no capítulo 1).

Daqui a pouco nós vamos ver um modo de testar as respostas dos itens desse exercício, e um modo de resolver ele por chutar e testar... mas aguente um pouquinho!

Retângulos acima e abaixo

Lembre que eu contei que em cursos tradicionais de Cálculo 2 – aqueles em que as pessoas passam centenas de horas fazendo contas à mão, e mais outras centenas de horas estudando por aqueles livros que fingem que certas coisas dificílimas são óbvias – as pessoas acabam aprendendo algumas coisas super úteis que não aparecem listadas explicitamente no programa do curso...

Uma dessas coisas é aprender a entender definições que *aparentemente* envolvem um número infinito de contas. Se a gente for como o Bob a gente consegue visualizar o que essas definições "querem dizer".

As definições formais de "retângulo acima (ou abaixo) da curva" e "melhor retângulo acima (ou abaixo) da curva" são assim – elas aparentemente precisam de infinitas contas.

“Para todo” (∀) e “existe” (∃)

$$\begin{array}{rcl}
(\forall a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \land \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \land (3^2 < 10) \land (5^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \land (9 < 10) \land (25 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{F}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(\exists a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 3] \lor \\
 & & (a^2 < 10)[a := 5] \\
 & = & (2^2 < 10) \lor (3^2 < 10) \lor (5^2 < 10) \\
 & = & (4 < 10) \lor (9 < 10) \lor (25 < 10) \\
 & = & \mathbf{V} \lor \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \\
 & = & \mathbf{V}
\end{array}$$

Visualizando '∀'s e '∃'s

Repare...

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \quad\quad x < 4) & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \quad\quad\quad\quad\quad\quad x = 6) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \lor x = 6) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F}
\end{array}$$

...que dá pra *visualizar* o que a expressão
$(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \lor x = 6)$
"quer dizer" visualizando os '**V**'s e '**F**'s
de expressões mais simples, e combinando
esses "mapas" de '**V**'s e '**F**'s.

Visualizando '$\forall$'s e '$\exists$'s (2)

Às vezes vai valer a pena definir proposições como nomes mais curtos, como $F(x) = (2 \leq x)$, $G(x) = (x \leq 4)$, $H(x) = (x = 6)$... Aí:

$$\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad G(x)) & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}. \qquad\qquad H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1, \ldots, 7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F}
\end{array}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como $(\forall x \in A.\underline{\qquad})$ e $(\exists x \in A.\underline{\qquad})$ e descobrir quais são verdadeiras e quais não — mesmo quando o conjunto A é um conjunto infinito, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $[2, 10]$.

Visualizando '∀'s e '∃'s (3)

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos '**V**'s e '**F**'s,
e vai ser mais fácil visualizar onde estão os '**V**'s e '**F**'s
delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Vou usar essa convenção aqui:
O **V** é uma bolinha preta, ou sólida: $\bullet$
O **F** é uma bolinha branca, ou oca: $\circ$

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) & = & \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.\qquad G(x)) & = & \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \wedge G(x)) & = & \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.\qquad\qquad H(x)) & = & \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) & = & \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ
\end{array}$$

Você pode fazer as suas próprias definições —
como o meu "$\bullet :=$ **V** e $\circ :=$ **F**" acima — mas elas
têm que ficar claras o suficiente... releia a dica 7:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=3

Instruções de desenho (explícitas)

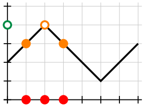
Sejam $f(x) =$  ,

e $P(y) = \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\ \underbrace{f(\underbrace{\ x\ }_{\text{em } (x,0)}) < y}_{\text{em } (x,f(x))}}_{\text{em } (0,y)}$.

As anotações sob as chaves são "instruções de desenho" que o Bob vai usar pra calcular cada $P(y)$ de cabeça, e pra visualizar o que $P(y)$ "quer dizer"...

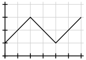
Na próxima página eu fiz as figuras pra $P(4)$.

$$
\begin{aligned}
P(4) &= \underbrace{\forall x \in \{1,2,3\}.\, \underbrace{f(\underbrace{x}_{\text{em }(x,0)}) < 4}_{\text{em }(x,f(x))}}_{\text{em }(0,4)} \\
&= \underbrace{\underbrace{(f(\underbrace{1}_{\text{em }(1,0)}) < 4)}_{\text{em }(1,f(1))} \;\land\; \underbrace{(f(\underbrace{2}_{\text{em }(2,0)}) < 4)}_{\text{em }(2,f(2))} \;\land\; \underbrace{(f(\underbrace{3}_{\text{em }(3,0)}) < 4)}_{\text{em }(3,f(3))}}_{\text{em }(0,4)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{3}_{\text{em }(1,3)} < 4) \;\land\; (\underbrace{4}_{\text{em }(2,4)} < 4) \;\land\; (\underbrace{3}_{\text{em }(3,3)} < 4)}_{\text{em }(0,4)} \\
&= \underbrace{(\underbrace{\bullet}_{\text{em }(1,3)}) \;\land\; (\underbrace{\circ}_{\text{em }(2,4)}) \;\land\; (\underbrace{\bullet}_{\text{em }(3,3)})}_{\text{em }(0,4)} \\
&= \underbrace{\circ}_{\text{em }(0,4)}
\end{aligned}
$$



Exercício 8.

Sejam:

$f(x) \quad =$  ,

$$\begin{aligned} P(y) &= \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) < y \ , \\ Q(y) &= \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) \leq y \ , \\ R(y) &= \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) \geq y \ , \\ S(y) &= \forall x \in \{1,2,3\}.f(x) > y \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(y) &= \forall x \in [3,5].f(x) < y \ , \\ Q'(y) &= \forall x \in [3,5].f(x) \leq y \ , \\ R'(y) &= \forall x \in [3,5].f(x) \geq y \ , \\ S'(y) &= \forall x \in [3,5].f(x) > y \ . \end{aligned}$$

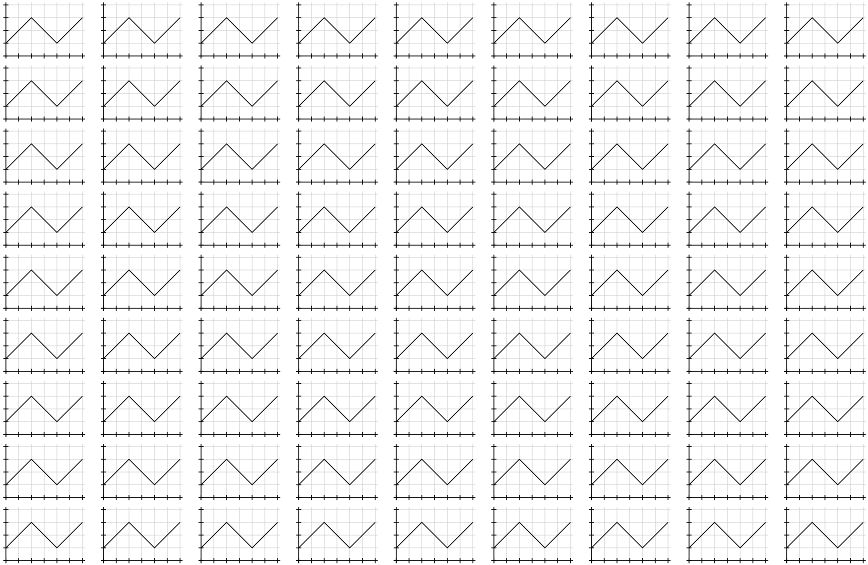
Para cada uma das expressões à direita visualize-a, represente-a graficamente numa das cópias do gráfico da $f(x)$ da próxima página, e dê o resultado dela.
Note que aqui eu não estou dando instruções de desenho *explícitas* – você vai ter que escolher como você vai fazer pra visualizar cada expressão.

a) $P(3.5), P(3.0), \ldots, P(0.5)$
b) $Q(3.5), Q(3.0), \ldots, Q(0.5)$
c) $R(3.5), R(3.0), \ldots, R(0.5)$
d) $S(3.5), S(3.0), \ldots, S(0.5)$

e) $P'(3.5), P'(3.0), \ldots, P'(0.5)$
f) $Q'(3.5), Q'(3.0), \ldots, Q'(0.5)$
g) $R'(3.5), R'(3.0), \ldots, R'(0.5)$
h) $S'(3.5), S'(3.0), \ldots, S'(0.5)$

Nos itens (e) até (f) os seus desenhos vão ter infinitas bolinhas... aliás, você vai ter que fazer desenhos que *finjam* que têm infinitas bolinhas, e nos quais o leitor consiga entender o que você quis representar... dica: leia a seção "Mais sobre bolinhas" nas páginas 29 até 36 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29



Exercício 9.

A seção “Mais sobre bolinhas” daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=29
tem dicas sobre como visualizar subconjuntos “definidos por proposições”, como este aqui:

$$\{\, x \in A \mid P(a) \,\}$$

A gente primeiro marca cada ponto de A com uma bolinha ou preta ou branca, e depois a gente pega o conjunto das bolinhas pretas e interpreta ele como um outro conjunto – o resultado.

Use isto pra visualizar cada um dos conjuntos à direita e pra encontrar uma descrição mais simples para cada um deles. Geralmente essas “descrições mais simples” vão ser em notação de intervalos.

As funções $P, \ldots, S, P', \ldots, S'$ são as do exercício 8. O símbolo $\overline{\mathbb{R}}$ denota a “reta real estendida”:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty, +\infty\} \\ &= [-\infty, +\infty] \end{aligned}$$

Para mais detalhes, veja:
https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_real_number_line

a) $\{\, y \in [0,3] \mid P(y) \,\}$
b) $\{\, y \in [0,3] \mid Q(y) \,\}$
c) $\{\, y \in [0,3] \mid R(y) \,\}$
d) $\{\, y \in [0,3] \mid S(y) \,\}$

a’) $\{\, y \in [0,3] \mid P'(y) \,\}$
b’) $\{\, y \in [0,3] \mid Q'(y) \,\}$
c’) $\{\, y \in [0,3] \mid R'(y) \,\}$
d’) $\{\, y \in [0,3] \mid S'(y) \,\}$

e) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid P(y) \,\}$
f) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid Q(y) \,\}$
g) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid R(y) \,\}$
h) $\{\, y \in \mathbb{R} \mid S(y) \,\}$

i) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid P(y) \,\}$
j) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid Q(y) \,\}$
k) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid R(y) \,\}$
l) $\{\, y \in \overline{\mathbb{R}} \mid S(y) \,\}$

Na Semana Acadêmica...
Durante a Semana Acadêmica tente entender as definições de "sup" e "inf" das páginas 2 até 15 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf

...e se você tiver curiosidade dê uma olhada aqui:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Supremo_e_%C3%ADnfimo

As definições da Wikipedia são muito mais abstratas.

Muitas das construções que nós vamos ver em Cálculo 3 vão ser definidas usando sequências grandes de definições, exatamente como no PDF sobre infs e sups do link acima... Por exemplo:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-plano-tangente.pdf#page=5

Quantificadores

Veja as páginas 14 até 17 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=14

O truque do elemento neutro

Como $2^0 = 1$, e o 1 é o elemento neutro da multiplicação, isso aqui funciona:

$$\begin{array}{rcl}
2^1 \cdot 2^4 &=& (2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \\
2^2 \cdot 2^3 &=& (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \\
2^3 \cdot 2^2 &=& (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \\
2^4 \cdot 2^1 &=& (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2) \\
2^5 \cdot 2^0 &=& (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2^0) \\
&=& (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 1 \\
&=& (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)
\end{array}$$

O truque do elemento neutro pra quantificadores

$$\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{20\}.P(x)) \land (\forall x \in \{42,99,200\}.P(x)) & = & (P(20)) \land (P(42) \land P(99) \land P(200)) \\
(\forall x \in \{20,42\}.P(x)) \land (\forall x \in \{99,200\}.P(x)) & = & (P(20) \land P(42)) \land (P(99) \land P(200)) \\
(\forall x \in \{20,42,99\}.P(x)) \land (\forall x \in \{200\}.P(x)) & = & (P(20) \land P(42) \land P(99)) \land (P(200)) \\
(\forall x \in \{20,42,99,200\}.P(x)) \land (\forall x \in \emptyset.P(x)) & = & (P(20) \land P(42) \land P(99) \land P(200)) \land (\forall x \in \emptyset.P(x)) \\
& = & (P(20) \land P(42) \land P(99) \land P(200)) \land \mathbf{V} \\
& = & (P(20) \land P(42) \land P(99) \land P(200))
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(\exists x \in \{20\}.P(x)) \lor (\exists x \in \{42,99,200\}.P(x)) & = & (P(20)) \lor (P(42) \lor P(99) \lor P(200)) \\
(\exists x \in \{20,42\}.P(x)) \lor (\exists x \in \{99,200\}.P(x)) & = & (P(20) \lor P(42)) \lor (P(99) \lor P(200)) \\
(\exists x \in \{20,42,99\}.P(x)) \lor (\exists x \in \{200\}.P(x)) & = & (P(20) \lor P(42) \lor P(99)) \lor (P(200)) \\
(\exists x \in \{20,42,99,200\}.P(x)) \lor (\exists x \in \emptyset.P(x)) & = & (P(20) \lor P(42) \lor P(99) \lor P(200)) \lor (\exists x \in \emptyset.P(x)) \\
& = & (P(20) \lor P(42) \lor P(99) \lor P(200)) \lor \mathbf{F} \\
& = & (P(20) \lor P(42) \lor P(99) \lor P(200))
\end{array}$$

Visualizando proposições

Como visualizar

"O retângulo $3(4-2)$ está abaixo do gráfico da f"?

Isto pode ser formalizado como:

$\forall x \in [2,4].3 \leq f(x)$

Veja a páginas 5 a 8 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=5

Cálculo 2 - 2022.2

Aula 19: o TFC1 e o TFC2.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Os próximos 3 slides são uma versão melhorada (?)
das definições de partições, de inf e sup, e de
integral definida destes PDFs antigos:

Partições:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=9 (até a p.12)

Infs e sups:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=2 (até a p.15)

Integral definida como limite – definições:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=16 (até a p.21)
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=35 – $[a, b]_n$
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=16 – simplificações

Integral definida como limite – uma animação:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-TFC1.pdf#page=35 (até a p.41)

A definição de partição

Se P é um subconjunto finito e não-vazio de $\mathbb{R}$,
então podemos interpretar P como uma partição...
Por exemplo, se $P = \{200, 20, 42, 99, 63, 33, 20, 20\}$
então $P = \{20, 33, 42, 63, 99, 200\}$, e aí vamos interpretar
esse conjunto de 6 pontos – ordenados em ordem crescente –
como uma partição do intervalo $I = [a, b] = [20, 200]$ em
5 subintervalos (“$N = 5$”), assim:

$$\begin{array}{cccccccl}
20 & 33 & 42 & 63 & 99 & 200 & & \\
x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\
a_1 & b_1 & & & & & & I_1 = [a_1, b_1] \\
 & a_2 & b_2 & & & & & I_2 = [a_2, b_2] \\
 & & a_3 & b_3 & & & & I_3 = [a_3, b_3] \\
 & & & a_4 & b_4 & & & I_4 = [a_4, b_4] \\
 & & & & a_5 & b_5 & & I_5 = [a_5, b_5] \\
a & & & & & b & & I = [a, b] = [x_0, x_N]
\end{array}$$

As definições de inf e sup

Digamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $B\subset\mathbb{R}$.
Vamos definir $\inf(f(B))$ e $\sup(f(B))$ —
e também $\inf(D)$ e $\sup(D)$, pra $D\subset\mathbb{R}$ —
desta forma:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathbb{R}} & = & \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \\
C & = & \{\,(x,f(x))\mid x\in B\,\} \\
D & = & \{\,f(x)\mid x\in B\,\} \\
D' & = & \{\,y\in\mathbb{R}\mid \exists x\in B.\ f(x)=y\,\} \\
L & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ y\le d\,\} \\
U & = & \{\,y\in\overline{\mathbb{R}}\mid \forall d\in D.\ d\le y\,\} \\
(\alpha=\inf(D)) & = & \alpha\in L\land(\forall\ell\in L.\ \ell\le\alpha) \\
(\beta=\sup(D)) & = & \beta\in U\land(\forall u\in U.\ \beta\le u)
\end{array}$$

Com isto podemos definir a integral definida.
A definição formal dela está na próxima página.

$$
\begin{aligned}
[a,b]_N &= \{\, a + k(\tfrac{b-a}{N}) \mid k \in \{0,\ldots,N\}\,\} \\
&= \{a + 0(\tfrac{b-a}{N}),\ a + 1(\tfrac{b-a}{N}),\ \ldots,\ a + N(\tfrac{b-a}{N})\} \\
&= \{a,\ a + \tfrac{b-a}{N},\ a + 2\tfrac{b-a}{N},\ a + 3\tfrac{b-a}{N},\ \ldots,\ b\} \\
\overline{\int}_P f(x)\,dx &= [\sup]_P \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
\underline{\int}_P f(x)\,dx &= [\inf]_P \\
&= \sum_{i=1}^{n} \inf(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx &= \overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \\
\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\,dx \\
\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\
\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \ \ \text{existe}\right) &= \left(\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\right) \\
&= \left(\overline{\underline{\int}}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = 0\right) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)} \\
&= \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \qquad \text{(se a integral existir)}
\end{aligned}
$$

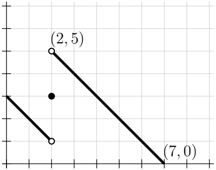
Exercício 1.
Leia isto aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-1.pdf#page=9 (até a p.12)

a) Seja $P = \{4, 2, 1, 1.5\}$.
Interprete P como uma partição.
Diga quem são o N, o a e o b dela e monte
a tabela dos subintervalos dela (p.10 do link acima).

b) Seja $P = [2, 4]_6$.
Diga quem são os pontos da partição P.

c) Seja $P = [2, 5]_{2^3}$.
Diga quem são os pontos da partição P.

Exercício 2.

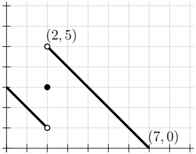
Sejam $f(x) =$ 

e $B = [1, 3]$.

Represente graficamente B, $f(B)$ e os conjuntos abaixo:

$$\begin{array}{rcl} C &=& \{\,(x, f(x)) \mid x \in B\,\} \\ D &=& \{\,f(x) \mid x \in B\,\} \\ D' &=& \{\,y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in B.\ f(x) = y\,\} \\ L &=& \{\,y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ y \leq d\,\} \\ U &=& \{\,y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall d \in D.\ d \leq y\,\} \end{array}$$

Exercício 3.

Sejam $f(x) =$  .

e $P = \{1, 3, 4, 5\}$.

Represente graficamente:

a) $\overline{\int}_P f(x)\,dx$

b) $\underline{\int}_P f(x)\,dx$

c) $\overline{\underline{\int}}_P f(x)\,dx$

d) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_2} f(x)\,dx$

e) $\overline{\underline{\int}}_{[1,5]_4} f(x)\,dx$

Exercício 4.

Dê uma olhada nesses 4 slides sobre a função de Dirichlet:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-somas-2.pdf#page=51 (até a p.54)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}, \\ g(x) & = & f(x) + x. \end{array}$$

Representa graficamente:

a) $g(x)$
b) $\overline{\underline{\int}}_{[0,4]_1} g(x)\,dx$
c) $\overline{\underline{\int}}_{[0,4]_2} g(x)\,dx$
d) $\overline{\underline{\int}}_{[0,4]_4} g(x)\,dx$
e) $\overline{\underline{\int}}_{[0,4]_8} g(x)\,dx$

Cálculo 2 - 2022.2

Aula 22: áreas, volumes,
e comprimento de arco

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf#page=5
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf#page=9
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=278
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_7.pdf
http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_5.5_e_5.6.pdf#page=14

Nessa aula eu escrevi muuuuitas coisas no quadro, e ainda não tive tempo de digitá-las. Você pode acessar os quadros dessa aula aqui:

http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=36

Cálculo 2 - 2022.2

Aulas 23 e 24: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

Quadros deste semestre – veja as páginas 39 e 40:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=39

Seções 1.2 e 1.3 do "Diffy Qs"s do Jiri Lebl:
https://www.jirka.org/diffyqs/diffyqs.pdf#page=27

PDF sobre EDOs com variáveis separáveis de 2021.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-edovs.pdf
Funções inversas:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-edovs.pdf#page=15

P2 do semestre passado (veja as questões 2 e 3):
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P2.pdf

Dicas pra P2 do semestre passado (tem alguns links bons):
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-dicas-pra-P2.pdf

VSB do semestre passado (veja a questão 4):
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VSB.pdf

Quadros de 2019.2:
http://angg.twu.net/2019.2-C2/2019.2-C2.pdf#page=84

Cálculo 2 - 2022.2

Aula 25: EDOs lineares
com coeficientes constantes

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links:

EDOLCCs no "Diffy Qs" do Jiri Lebl:
https://www.jirka.org/diffyqs/diffyqs.pdf#page=84

EDOLCCs nas notas da Cristiane Hernández:
http://angg.twu.net/2015.1-C2/CALCULOIIA_EAD_Versao_Final_correcao_aulas_25_a_30.pdf#page=229

Questões sobre EDOLCCs nas provas de 2022.1:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-P2.pdf#page=5
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VR.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-VSA.pdf#page=2

"Uma demonstração complicada:"
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-der-fun-inv.pdf#page=5

Nessas aulas eu escrevi muitas coisas no quadro, e ainda
não digitei elas. Você pode acessar as fotos dos quadros aqui:
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=41

Material de 2019.2:
http://angg.twu.net/2019.2-C2/2019.2-C2.pdf#page=93
http://angg.twu.net/LATEX/2019-2-C2-tudo.pdf#page=10

Sobre o '$\cdot$' em $42 \cdot f$ e em $f \cdot g$, veja os slides 15 até 21 daqui:
http://math.andrej.com/asset/data/the-dawn-of-formalized-mathematics.pdf
http://math.andrej.com/2021/06/24/the-dawn-of-formalized-mathematics/
https://vimeo.com/567049015

O Leithold define $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ na página 36 (cap.1)
e define a notação $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ na p.145 (sec.3.1).

Capítulo sobre números complexos no "GA1" do Acker:
http://angg.twu.net/acker/acker__ga_livro1_2019.pdf#page=141

$$\begin{array}{rcl}
(f+g)(x) &=& f(x)+g(x) \\
f+g &=& \lambda x.f(x)+g(x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(k\cdot f)(x) &=& k\cdot f(x) \\
k\cdot f &=& \lambda x.k\cdot f(x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(f\cdot g)(x) &=& f(x)\cdot g(x) \\
f\cdot g &=& \lambda x.f(x)\cdot g(x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(Df)(x) &=& \frac{d}{dx}f(x) \\
Df &=& \lambda x.\frac{d}{dx}f(x) \\
D &=& \lambda f.\lambda x.\frac{d}{dx}f(x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
D(g+h) &=& (\lambda f.\lambda x.\frac{d}{dx}f(x))(g+h) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}(g+h)(x) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}(g(x)+h(x)) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}g(x)+\frac{d}{dx}h(x)) \\
&=& (\lambda x.\frac{d}{dx}g(x))+(\lambda x.\frac{d}{dx}h(x))) \\
&=& Dg+Dh
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
D(k\cdot g) &=& (\lambda f.\lambda x.\frac{d}{dx}f(x))(k\cdot g) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}(k\cdot g)(x) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}(k\cdot g(x)) \\
&=& \lambda x.k\cdot\frac{d}{dx}g(x) \\
&=& k\cdot(\lambda x.\frac{d}{dx}g(x)) \\
&=& k\cdot Dg
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
D(\lambda x.x^2) &=& (\lambda f.\lambda x.\frac{d}{dx}f(x))(\lambda x.x^2) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}(\lambda x.x^2)(x) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}x^2 \\
&=& \lambda x.2x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
k\cdot f &=& \lambda x.k\cdot f \\
k\cdot(\lambda x.e^{kx}) &=& \lambda x.k\cdot(\lambda x.e^{kx})(x) \\
&=& \lambda x.k\cdot e^{kx} \\
k\cdot(\lambda x.e^{kx}) &=& \lambda x.k\cdot e^{kx} \\
42\cdot(\lambda x.e^{kx}) &=& \lambda x.42e^{42x}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
D(\lambda x.e^{42x}) &=& (\lambda f.\lambda x.\frac{d}{dx}f(x))(\lambda x.e^{42x}) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}(\lambda x.e^{42x})(x) \\
&=& \lambda x.\frac{d}{dx}e^{42x} \\
&=& \lambda x.42e^{42x} \\
&=& 42\cdot(\lambda x.e^{kx})
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \\
\mathrm{sen}\,-\theta &= -\,\mathrm{sen}\,\theta \\
\cos-\theta &= -\cos\theta \\
e^{-i\theta} &= \cos-\theta + i\,\mathrm{sen}\,-\theta \\
&= \cos-\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta \\
&= \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta \\
e^{i\theta} + e^{-i\theta} &= 2\cos\theta \\
e^{i\theta} - e^{-i\theta} &= 2i\,\mathrm{sen}\,\theta \\
\cos\theta &= \tfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
\mathrm{sen}\,\theta &= \tfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
\cos k\theta &= \tfrac{1}{2}(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) \\
\mathrm{sen}\,k\theta &= \tfrac{1}{2i}(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} &= e^{\alpha\theta}e^{\beta i\theta} \\
&= e^{\alpha\theta}(\cos\beta\theta + i\,\mathrm{sen}\,\beta\theta) \\
&= e^{\alpha\theta}\cos\beta\theta + ie^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\beta\theta \\
e^{(\alpha-\beta i)\theta} &= e^{\alpha\theta}e^{-\beta i\theta} \\
&= e^{\alpha\theta}(\cos(-\beta\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\beta\theta)) \\
&= e^{\alpha\theta}(\cos\beta\theta - i\,\mathrm{sen}\,\beta\theta) \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} + e^{(\alpha-\beta i)\theta} &= e^{\alpha\theta}(e^{\beta i\theta} + e^{-\beta i\theta}) \\
&= 2\,e^{\alpha\theta}\cos\beta\theta \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} - e^{(\alpha-\beta i)\theta} &= e^{\alpha}(e^{\beta i\theta} - e^{-\beta i\theta}) \\
&= 2i\,e^{\alpha\theta}\,\mathrm{sen}\,\beta\theta \\
e^{\alpha}\cos\beta\theta &= \tfrac{1}{2}e^{(\alpha+\beta i)\theta} + \tfrac{1}{2}e^{(\alpha-\beta i)\theta} \\
e^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\beta\theta &= \tfrac{1}{2i}e^{(\alpha+\beta i)\theta} - \tfrac{1}{2i}e^{(\alpha-\beta i)\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= e^{i\theta} \\
c_\alpha &= \cos\alpha\theta \\
s_\alpha &= \mathrm{sen}\,\alpha\theta \\
E^\alpha &= (e^{i\theta})^\alpha \\
&= e^{i\alpha\theta} \\
&= c_\alpha + is_\alpha \\
E^{-\alpha} &= e^{-i\alpha\theta} \\
&= c_{-\alpha} + is_{-\alpha} \\
&= c_\alpha - is_\alpha \\
c_\alpha &= \tfrac{1}{2}(E^\alpha + E^{-\alpha}) \\
s_\alpha &= \tfrac{1}{2i}(E^\alpha - E^{-\alpha}) \\
E^{\alpha+i\beta} &= \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} + e^{(\alpha-\beta i)\theta} &= e^{\alpha}(e^{\beta i\theta} + e^{-\beta i\theta}) \\
&= 2\,e^{\alpha}\cos\beta\theta \\
e^{(\alpha+\beta i)\theta} - e^{(\alpha-\beta i)\theta} &= e^{\alpha}(e^{\beta i\theta} - e^{-\beta i\theta}) \\
&= 2i\,e^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\beta\theta \\
e^{\alpha}\cos\beta\theta &= \tfrac{1}{2}e^{(\alpha+\beta i)\theta} + \tfrac{1}{2}e^{(\alpha-\beta i)\theta} \\
e^{\alpha}\,\mathrm{sen}\,\beta\theta &= \tfrac{1}{2i}e^{(\alpha+\beta i)\theta} - \tfrac{1}{2i}e^{(\alpha-\beta i)\theta}
\end{aligned}
$$

Cálculo 2 - 2022.2

Dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Primeira dica:

A P1 vai ter uma questão sobre frações parciais. Veja:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-fracoes-parciais.pdf
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=240

Faça os exercícios 8.1, 8.2 e 8.4 da página 251 do Miranda:

http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251

Segunda dica:

A P1 vai ter uma questão de "produza suas próprias fórmulas".
Treine pra ela fazendo os "exercícios pra casa" daqui,

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-int-por-partes.pdf#page=11

Terceira dica:

A P1 vai ter uma questão de substituição trigonométrica.
Estude pra ela pelos links destes dois PDFs,

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-mudanca-de-variaveis.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-subst-trig.pdf

...e faça pelo menos o item (a) do "Exercício 1" daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-subst-trig.pdf#page=3

Cálculo 2 - 2022.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Questão 1
(Total: 3.0 pts)

Calcule:

$$\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx\ .$$

Dicas: 1) Você provavelmente vai precisar de pelo menos duas mudanças de variável pra chegar no resultado final. 2) No curso nós vimos dois modos de fazer mudanças de variável de um jeito legível: um modo usava chaves sob subexpressões e o outro modo usava "caixinhas de anotações" como a abaixo,

$$\left[\begin{array}{c} u = \operatorname{sen} x \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x\,dx = du \\ x = \operatorname{arcsen} u \end{array}\right]$$

em que todas as outras linhas da caixinha eram consequência da primeira.

Questão 2
(Total: 2.0 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a "fórmula da integração por partes" seria esta aqui:

$$[\mathrm{IP}] \;=\; \left(\int f g'\,dx \;=\; fg - \int f' g\,dx\right)$$

Mostre que aplicando integração por partes três vezes dá pra obter uma fórmula que transforma a integral $\int x^3 h'''(x)\,dx$ em algo bem mais simples. Aqui você vai poder omitir os argumentos das funções se quiser — note que na [IP] eu abreviei, por exemplo, '$f(x)$' para 'f'.

Nesta questão eu vou ver principalmente se você sabe os truques pra deixar as contas dela organizadas e legíveis.

Questão 3
(Total: 2.0 pts)

No curso nós definimos que *pra nós* a "fórmula" do TFC2 seria esta aqui:

$$[\text{TFC2}] \quad = \quad \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Mostre que quando $a = 1$, $b = 3$ e

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x < 2, \\ 2x & \text{quando } x \geq 2 \end{cases}$$

a fórmula [TFC2] é falsa.

Dicas: o melhor modo de fazer isto é representando graficamente $F(x)$ e $F'(x)$ e calculando certas coisas a partir dos gráficos. Considere que o leitor sabe calcular áreas de retângulos, triângulos e trapézios no olhômetro quando as coordenadas deles são números simples, mas complemente os seus gráficos com um pouquinho de português quando nem tudo for óbvio só a partir dos gráficos.

Questão 4
(Total: 2.0 pts)

Calcule:

$$\int \frac{4x+5}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

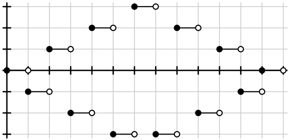
e teste o seu resultado.

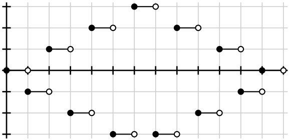
Questão 5
(Total: 1.0 pts)

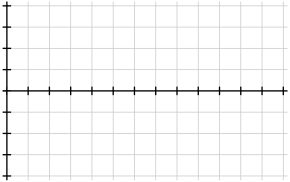
Seja $f(x)$ a função no topo da página seguinte. Seja

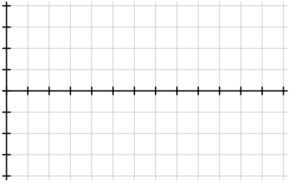
$$F(x) \quad = \quad \int_{t=2}^{t=x} f(x)\,dt.$$

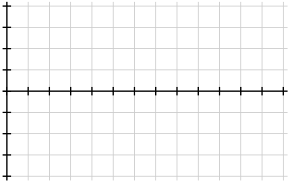
Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

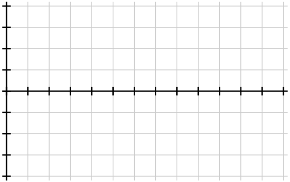












Questão 1: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx & = & \int \frac{1}{8}u^3\sqrt{1-u^2}\cdot\frac{1}{2}\,du \\
& = & \frac{1}{16}\int u^3\sqrt{1-u^2}\,du \\
& = & \frac{1}{16}\int (\operatorname{sen}\theta)^3(\cos\theta)(\cos\theta)\,d\theta \\
& = & \frac{1}{16}\int (\cos\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)^2(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\
& = & \frac{1}{16}\int c^2(1-c^2)(-1)\,dc \\
& = & \frac{1}{16}\int c^2(c^2-1)\,dc \\
& = & \frac{1}{16}\int c^4-c^2\,dc \\
& = & \frac{1}{16}(\frac{c^5}{5}-\frac{c^3}{3}) \\
& = & \frac{1}{16}(\frac{(\cos\theta)^5}{5}-\frac{(\cos\theta)^3}{3}) \\
& = & \frac{1}{16}(\frac{\sqrt{1-u^2}^5}{5}-\frac{\sqrt{1-u^2}^3}{3}) \\
& = & \frac{1}{16}(\frac{\sqrt{1-4x^2}^5}{5}-\frac{\sqrt{1-4x^2}^3}{3})
\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c}
u=2x \\
u^2=4x^2 \\
x=u/2 \\
x^3=u^3/8 \\
du=2dx \\
dx=\frac{1}{2}du
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c}
u=\operatorname{sen}\theta \\
u^2=(\operatorname{sen}\theta)^2 \\
1-u^2=(\cos\theta)^2 \\
\sqrt{1-u^2}=\cos\theta \\
\frac{du}{d\theta}=\cos\theta \\
du=\cos\theta\,d\theta
\end{array}\right]$$

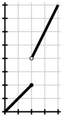
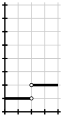
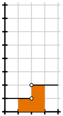
$$\left[\begin{array}{c}
c=\cos\theta \\
\frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\
dc=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(-1)dc=\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\
(\operatorname{sen}\theta)^2=1-c^2
\end{array}\right]$$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{rcl}
\int x^3 h''' \, dx & = & x^3 h'' - \int 3x^2 h'' \, dx \\
& = & x^3 h'' - 3 \int x^2 h'' \, dx \\
\int x^2 h'' \, dx & = & x^2 h' - \int 2x h' \, dx \\
& = & x^2 h' - 2 \int x h' \, dx \\
\int x h' \, dx & = & xh - \int 1 \cdot h \, dx \\
& = & xh - \int h \, dx
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\int x^3 h''' \, dx & = & x^3 h'' - 3 \int x^2 h'' \, dx \\
& = & x^3 h'' - 3(x^2 h' - 2 \int x h' \, dx) \\
& = & x^3 h'' - 3(x^2 h' - 2(xh - \int h \, dx)) \\
& = & x^3 h'' - 3x^2 h' + 6(xh - \int h \, dx) \\
& = & x^3 h'' - 3x^2 h' + 6xh - 6 \int h \, dx)
\end{array}$$

Questão 3: gabarito

$F(x) =$  $F'(x) =$  $\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx =$  $= 3$

$$\underbrace{\underbrace{\int_{x=1}^{x=3} F'(x)\,dx}_{3} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{F(x)\Big|_{x=1}^{x=3}}_{F(3)-F(1)}}_{6-1}}_{5}}_{\mathbf{F}}$$

Questão 4: gabarito

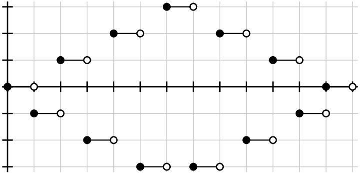
$$\begin{aligned}
\frac{4x+5}{(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \\
&= \frac{A(x+3)}{(x-2)(x+3)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)} \\
&= \frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4x+5 &= (A+B)x + (3A-2B) \\
A+B &= 4 \\
3A-2B &= 5 \\
A &= 13/5 \\
B &= 7/5
\end{aligned}$$

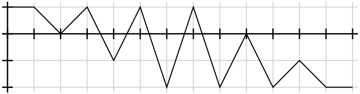
$$\begin{aligned}
\frac{4x+5}{(x-2)(x+3)} &= \frac{13/5}{x-2} + \frac{7/5}{x+3} \\
\int \frac{4x+5}{(x-2)(x+3)}\,dx &= \int \frac{13/5}{x-2} + \frac{7/5}{x+3}\,dx \\
&= \frac{13}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{7}{5}\int \frac{1}{x+3}\,dx \\
&= \frac{13}{5}\ln|x-2| + \frac{7}{5}\ln|x+3|
\end{aligned}$$

Questão 5: gabarito

$$f(x) \ =$$



$$F(x) \ = \ \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt \ =$$



Cálculo 2 - 2022.2

Aula 30: EDOs exatas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Links

EDOs exatas no "Diffy Qs":

https://www.jirka.org/diffyqs/diffyqs.pdf#page=63

Material meu de 2019.2:

http://angg.twu.net/2019.2-C2/2019.2-C2.pdf#page=104
http://angg.twu.net/LATEX/2019-2-C2-tudo.pdf#page=14

Cálculo 2 - 2022.2

Dicas pra P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

EDOs

A prova vai ter uma questão de EDOs com variáveis separáveis valendo muitos pontos. Estude pra ela por aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-edovs.pdf#page=2
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=39

A prova vai ter uma questão de EDOLCCs.
Estude pra ela por aqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-edos-lineares.pdf#page=2
http://angg.twu.net/2022.2-C2/C2-quadros.pdf#page=41

Somas de Riemann

A prova vai ter uma questão pequena de somas de Riemann.
Pra se preparar pra ela refaça os exercícios destas páginas 8s:

`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-somas-de-riemann.pdf#page=8`
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf#page=8`

Obs: estas dicas estão muito incompletas!!!
Vou acrescentar mais coisas aqui depois!!!

Cálculo 2 - 2022.2

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Questão 1

(Total: 6.0 pts)
Lembre que nós vimos que o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — pode ser escrito como a demonstração [M] abaixo, e a "fórmula" para resolver EDOVSs pode ser escrita como [F]:

$$[M] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy &=& g(x)\,dx \\ \displaystyle\int h(y)\,dy &=& \displaystyle\int g(x)\,dx \\ \| & & \| \\ H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\ H(y) &=& G(x)+C_2-C_1 \\ &=& G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$[F] \quad = \quad \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} &=& \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array} \right)$$

Quando a gente quer criar exercícios de EDOVSs que sejam fácil de resolver a gente começa escolhendo $G(x)$ e $H(y)$, não $g(x)$ e $h(y)$.
Digamos que $G(x) = x^4 + 5$ e $H(y) = y^2 + 3$.

a) **(0.5 pts)** Diga qual é a EDO da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ associada a esta escolha de $G(c)$ e $H(y)$. Chame-a de $(*)$. Não esqueça do "Seja"!

b) **(0.5 pts)** Escolha uma função H^{-1} adequada. Defina ela com um "Seja" e verifique que ela obedece o que esperamos dela.

c) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral da EDO $(*)$. Chame-a de $f(x)$ e defina ela com um "Seja".

d) **(1.5 pts)** Verifique que essa função $f(x)$ obedece $(*)$.

e) **(1.0 pts)** Encontre uma solução $f_1(x)$ que passe pelo ponto $(x_1, y_1) = (1, 2)$. Defina-a com um "Seja".

f) **(1.5 pts)** Teste a sua solução $f_1(x)$.

Questão 2

(Total: 3.0 pts)
No curso nós vimos um modo de resolver EDOs lineares com coeficientes constantes — "EDOLCCs" — no qual a gente traduzia a EDO "pra Álgebra Linear", fatorava uma "matriz", e aí encontrava as soluções básicas dessa EDO e tratava elas como "vetores"... por exemplo,

$$\begin{array}{rcl}
y'' + 5y' + 6y & = & 0 \\
(D^2 + 5D + 6)f & = & 0 \\
(D+2)(D+3)f & = & 0 \\
M & = & (D+2)(D+3) \\
Me^{-2x} & = & 0 \\
Me^{-3x} & = & 0 \\
Me^{-2x} & = & 0 \\
M(42e^{-2x} + 99e^{-3x}) & = & 0
\end{array}$$

Seja $(*)$ esta EDO:

$$y'' + y' - 20y \;=\; 0 \qquad (*)$$

a) **(0.2 pts)** Traduza a EDO $(*)$ para "Álgebra Linear" e fatore-a. Chame essa versão fatorada de $(**)$, e defina-a com um "Seja".

b) **(0.3 pts)** Encontre as duas soluções básicas para a EDO $(*)$. Chame elas de f_1 e f_2. Não esqueça o "Sejam"!

c) **(0.5 pts)** Encontre a solução geral para a EDO $(*)$ e chame-a de f. Não esqueça o "Seja"!

d) **(2.0 pts)** Encontre uma solução g para a EDO $(*)$ que obedeça $g(0) = 7$ e $g'(0) = 1$. Defina esta g com um "seja" e verifique que ela realmente obedece $g(0) = 7$ e $g'(0) = 1$.

Questão 3

(Total: 1.5 pts)

Lembre que nós vimos estes tipos de Somas de Riemann,

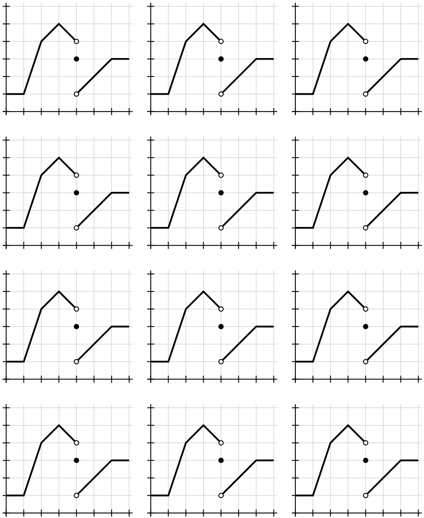
$$\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^{N} \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^{N} \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
\end{array}$$

e vimos que o [Trap] pode ser interpretado tanto como uma soma de trapézios como como uma soma de retângulos.

Seja $f(x)$ a função dos gráficos à direita.
Represente graficamente:

a) $[\mathrm{inf}]_{\{1,2,3,4\}}$
b) $[\mathrm{sup}]_{\{1,2,3,4\}}$
c) $[\mathrm{M}]_{\{1,3,5\}}$
d) $[\mathrm{Trap}]_{\{1,3,5\}}$ usando retângulos
e) $[\mathrm{Trap}]_{\{1,3,5\}}$ usando trapézios

Indique claramente qual desenho é a resposta final de cada item e quais desenhos são rascunhos.



Questão 1: gabarito

A substituição é:

$$[S] = \begin{bmatrix} G(x) := x^4 + 5 \\ H(y) := y^2 + 3 \\ g(x) := 4x^3 \\ h(y) := 2y \\ H^{-1}(x) := \sqrt{x-3} \end{bmatrix}$$

a) Seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{2y} \qquad (*)$$

b) Seja: $\quad H^{-1}(x) = \sqrt{x-3}.$

$$\begin{array}{rcl} \text{Temos:} \quad H^{-1}(H(y)) &=& \sqrt{H(y)-3} \\ &=& \sqrt{(y^2+3)-3} \\ &=& y. \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} y &=& H^{-1}(G(x)+C_3) \\ &=& \sqrt{(G(x)+C_3)-3} \\ &=& \sqrt{((x^4+5)+C_3)-3} \\ &=& \sqrt{x^4+2+C_3} \\ \text{Seja:} \quad f(x) &=& \sqrt{x^4+2+C_3}. \end{array}$$

d) Será que $f(x)$ obedece $(*)$?

Temos $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}}$, e com isso:

$$\begin{array}{l} \left(f'(x) = \frac{4x^3}{2f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) = \sqrt{x^4+2+C_3} \\ f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} \end{bmatrix} \\ = \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+2+C_3}}\right) \qquad =) \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{lrcl} \text{Se} & f(x_1) &=& y_1, \\ \text{i.e.,} & f(1) &=& 2, \\ \text{então} & f(1) &=& \sqrt{1^4+2+C_3} \\ & &=& \sqrt{3+C_3} \\ & &=& 2 \\ & 2^2 &=& \sqrt{3+C_3}^2 \\ & 4 &=& 3+C_3 \\ & C_3 &=& 1 \\ & f(x) &=& \sqrt{x^4+2+C_3} \\ & &=& \sqrt{x^4+3} \\ \text{Seja:} & f_1(x) &=& \sqrt{x^4+3}. \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{lrcl} \text{Será que} & f_1(x_1) &=& y_1, \\ \text{i.e.,} & f_1(1) &=& 2? \\ & \sqrt{1^4+3} &=& \sqrt{4} \\ & &=& 2 \qquad =) \end{array}$$

Questão 2: gabarito

a) Temos: $D^2+D-20=(D+5)(D-4)$.
Seja $(**)$ esta EDO:

$$(D+5)(D-4)f \;=\; 0. \qquad (**)$$

b) Sejam $f_1(x)=e^{4x}$, $f_2(x)=e^{-5x}$,

c) Seja

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& af_1(x)+bf_2(x) \\ &=& ae^{4x}+be^{-5x}. \end{array}$$

d) Digamos que

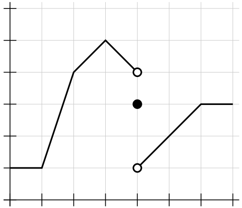
$$\begin{array}{rcl} g(x) &=& af_1(x)+bf_2(x) \\ &=& ae^{4x}+be^{-5x}, \\ g(0) &=& 7, \\ g'(0) &=& 1. \end{array}$$

Então:

$$\begin{array}{rcl} g(0) &=& ae^0+be^0, \\ &=& a+b, \\ g'(0) &=& a\cdot 4e^0+b\cdot(-5)e^0, \\ &=& 4a-5b, \\ a &=& 4, \\ b &=& 3, \\ g(x) &=& 4e^{4x}+3e^{-5x}, \\ g(0) &=& 4+3 \quad = \quad 7, \qquad =) \\ g'(0) &=& 16-15 \quad = \quad 1, \qquad =). \end{array}$$

Questão 3: gabarito (sem desenhos)

$$\begin{array}{lcl} \text{a) } [\text{inf}]_{\{1,2,3,4\}} &=& 1(2-1)+4(3-2)+3(4-3) \\ \text{b) } [\text{sup}]_{\{1,2,3,4\}} &=& 4(2-1)+5(3-2)+5(4-3) \\ \text{c) } [\text{M}]_{\{1,3,5\}} &=& 4(3-1)+3(5-3) \\ \text{d) } [\text{Trap}]_{\{1,3,5\}} &=& 3(3-1)+3.5(5-3) \\ \text{e) } [\text{Trap}]_{\{1,3,5\}} &=& \frac{1+5}{2}(3-1)+\frac{5+2}{2}(5-3) \end{array}$$



Cálculo 2 - 2022.2

Prova de reposição (VR)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Questão 1
(Total: 4.0 pts)

Calcule:

$$\int x^3\sqrt{1-4x^2}\,dx\ .$$

Dicas: 1) Você provavelmente vai precisar de pelo menos duas mudanças de variável pra chegar no resultado final. 2) No curso nós vimos dois modos de fazer mudanças de variável de um jeito legível: um modo usava chaves sob subexpressões e o outro modo usava "caixinhas de anotações" como a abaixo,

$$\begin{bmatrix} u = \operatorname{sen} x \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \\ \cos x\,dx = du \\ x = \operatorname{arcsen} u \end{bmatrix}$$

em que todas as outras linhas da caixinha eram consequência da primeira.

Questão 2
(Total: 1.0 pts)

Calcule:

$$\int_{x=5}^{x=6} (2x+3)^4\,dx$$

Lembre que no curso nós vimos que existem várias noções diferentes do que é "simplificar uma expressão"... por exemplo, no ensino médio os professores exigem que a gente "simplifique" $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}$ pra $\frac{661}{3036}$, mas em Cálculo 2 a gente geralmente considera $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}$ mais "simples" do que $\frac{661}{3036}$.

Questão 3

(Total: 5.0 pts)
Lembre que nós vimos que o "método" para resolver EDOs com variáveis separáveis — "EDOVSs" — pode ser escrito como a demonstração [M] abaixo, e a "fórmula" para resolver EDOVSs pode ser escrita como [F]:

$$[\mathrm{M}] = \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\ \displaystyle\int h(y)\,dy & = & \displaystyle\int g(x)\,dx \\ \| & & \| \\ H(y)+C_1 & & G(x)+C_2 \\ H(y) & = & G(x)+C_2-C_1 \\ & = & G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array} \right)$$

$$[\mathrm{F}] = \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \| & & \\ y & & \end{array} \right)$$

Quando a gente quer criar exercícios de EDOVSs que sejam fácil de resolver a gente começa escolhendo $G(x)$ e $H(y)$, não $g(x)$ e $h(y)$.
Digamos que $G(x) = x^4 + 5$ e $H(y) = y^2 + 3$.

a) **(0.5 pts)** Diga qual é a EDO da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ associada a esta escolha de $G(x)$ e $H(y)$. Chame-a de $(*)$. Não esqueça do "Seja"!

b) **(0.5 pts)** Escolha uma função H^{-1} adequada. Defina ela com um "Seja" e verifique que ela obedece o que esperamos dela.

c) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral da EDO $(*)$. Chame-a de $f(x)$ e defina ela com um "Seja".

d) **(1.0 pts)** Verifique que essa função $f(x)$ obedece $(*)$.

e) **(1.0 pts)** Encontre uma solução da EDO $(*)$ que passe pelo ponto $(x_1, y_1) = (1, 2)$. Chame-a de $f_1(x)$ e defina-a com um "Seja".

f) **(1.0 pts)** Verifique que a sua $f_1(x)$ realmente passa pelo ponto (x_1, y_1).

Cálculo 2 - 2022.2

Dicas pra VS

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Dicas de como escrever

Tudo isso aqui são coisas que nós vimos no curso:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-buraco.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-tudo.pdf#page=5
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=7
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-der-fun-inv.pdf#page=5

Dê uma olhada em como eu usei “Seja”, “Temos”, “Então”, “Isto é”, “Digamos que”, “Será que” e “=)” no gabarito da P2:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-P2.pdf#page=5

Quando você não usar essas expressões como “seja”, “então”, “isto é”, etc, o leitor vai imaginar que elas foram “omitidas por brevidade” e ele vai tentar completar as suas contas recolocando mentalmente nelas as expressões que você omitiu. Quando você for estudar pra prova tente escrever nas suas contas todas essas expressõezinhas explicitamente!

Ah, e lembre que você não pode usar “$H(y) = y^2$” numa parte das suas contas e “$H(y) = y^2 + 3$” em outra parte sem explicar em português porque o seu $H(y)$ mudou...

Dicas pra questão de EDOVSs

A VS vai ter uma questão de EDOs com variáveis separáveis (EDOVSs).

Pra conseguir fazer ela você vai ter que entender a idéia de "solução geral" muito bem, e você vai ter que conseguir obter uma solução geral a partir da qual dê pra obter todas as soluções particulares.

Pode ser que a questão de EDOVSs da prova tenha uma solução geral com um '$\pm$' em algum lugar, como no primeiro exemplo que nós vimos em sala... nele quando a gente usava $+\sqrt{\ldots}$ em algum lugar (onde? descubra!) a gente obtinha soluções que eram semicírculos acima do eixo x, quando a gente usava $-\sqrt{\ldots}$ a gente obtinha soluções que eram semicírculos abaixo do eixo x.

Dicas pra questão de mudança de variáveis

A VS vai ter uma questão com uma integral que você vai ter que resolver por várias mudança de variáveis, e eu só vou dar dicas pra primeira delas. Treine pra ela pelos exercícios do Leithold e do Miranda que eu recomendei aqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-mudanca-de-variaveis.pdf#page=2`

Cálculo 2 - 2022.2

Prova suplementar (VS)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C2.html

Questão 1

(Total: 6.0 pts)

A primeira EDO com variáveis separáveis ("EDOVS") que nós vimos no curso foi $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. As soluções particulares dela eram pedaços das curvas de nível de $x^2 + y^2 = C$ — e esses pedaços eram ou semicírculos acima do eixo x ou semicírculos abaixo do eixo y.

Na P2 eu pus uma questão sobre uma EDOVS um pouco mais complicada do que essa dos semicírculos, e muitas pessoas fizeram erros de conta horríveis *que eu acho que foram causados por desorganização na hora de fazer as contas...* por exemplo, várias pessoas escreveram "$H(x) = \sqrt{x}$" num lugar das contas e "$H(x) = \sqrt{x+3}$" em outro — o que OBVIAMENTE é um erro conceitual GRAVÍSSIMO, né, *a menos que você explique em português direitinho que $H(x)$ vai ser $\sqrt{x}$ em um contexto e $\sqrt{x+3}$ em outro contexto separado...*

Seja $(*)$ esta EDOVS:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{4(y+3)^3} \qquad (*)$$

Encontre as duas soluções gerais da EDO $(*)$ — uma "positiva" e outra "negativa" —, encontre as soluções particulares que passam pelos pontos $(1, -1)$ e $(1, -5)$, e teste tudo.

Nesta questão eu vou avaliar principalmente se você sabe usar direito os truques do anexo da página 4. Ou seja, não vai bastar você usar o "método" para resolver EDOVSs, que é esse aqui:

$$[\mathrm{M}] = \left(\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy & = & g(x)\,dx \\ \displaystyle\int h(y)\,dy & = & \displaystyle\int g(x)\,dx \\ \parallel & & \parallel \\ H(y) + C_1 & & G(x) + C_2 \\ H(y) & = & G(x) + C_2 - C_1 \\ & = & G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) & = & H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel & & \\ y & & \end{array} \right)$$

Questão 2

(Total: 4.0 pts)

Calcule a integral abaixo usando pelo menos três mudanças de variáveis.

$$\int \frac{8e^{4x}\ln(e^{4x}+2)}{e^{4x}+2}\,dx$$

Obs: no curso nós vimos que qualquer integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variáveis também pode ser resolvida por uma mudança de variável só, mas aqui é pra usar pelo menos três!

Anexo: gabarito de uma questão da P2

A substituição é:

$$[\mathrm{S}] \;=\; \begin{bmatrix} G(x) := x^4+5 \\ H(y) := y^2+3 \\ g(x) := 4x^3 \\ h(y) := 2y \\ H^{-1}(x) := \sqrt{x-3} \end{bmatrix}$$

a) Seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{2y} \qquad (*)$$

b)
$$\begin{array}{rrcl} \text{Seja:} & H^{-1}(x) & = & \sqrt{x-3}. \\ \text{Temos:} & H^{-1}(H(y)) & = & \sqrt{H(y)-3} \\ & & = & \sqrt{(y^2+3)-3} \\ & & = & y. \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrcl} & y & = & H^{-1}(G(x)+C_3) \\ & & = & \sqrt{(G(x)+C_3)-3} \\ & & = & \sqrt{((x^4+5)+C_3)-3} \\ & & = & \sqrt{x^4+2+C_3} \\ \text{Seja:} & f(x) & = & \sqrt{x^4+2+C_3}. \end{array}$$

d) Será que $f(x)$ obedece $(*)$?
Temos $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}}$, e com isso:

$$\left(f'(x) = \frac{4x^3}{2f(x)}\right) \begin{bmatrix} f(x) = \sqrt{x^4+2+C_3} \\ f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} \end{bmatrix}$$
$$= \left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2+C_3}} = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+2+C_3}}\right) \qquad =)$$

e)
$$\begin{array}{lrcl} \text{Se} & f(x_1) & = & y_1, \\ \text{i.e.,} & f(1) & = & 2, \\ \text{então} & f(1) & = & \sqrt{1^4+2+C_3} \\ & & = & \sqrt{3+C_3} \\ & & = & 2 \\ & 2^2 & = & \sqrt{3+C_3}^2 \\ & 4 & = & 3+C_3 \\ & C_3 & = & 1 \\ & f(x) & = & \sqrt{x^4+2+C_3} \\ & & = & \sqrt{x^4+3} \\ \text{Seja:} & f_1(x) & = & \sqrt{x^4+3}. \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{lrcl} \text{Será que} & f_1(x_1) & = & y_1, \\ \text{i.e.,} & f_1(1) & = & 2? \\ & \sqrt{1^4+3} & = & \sqrt{4} \\ & & = & 2 \qquad =) \end{array}$$