Cálculo 3 - 2022.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1

(Total: 6.0 pts)
O diagrama de numerozinhos da folha anterior corresponde a uma superfície $z = F(x, y)$ que tem 5 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 6 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 5 faces é que é a correta.

a) **(1.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 5 polígonos que são as projeções destas faces.

b) **(1.0 pts)** Chame estas faces de face N ("noroeste"), S ("sul"), W ("oeste"), C ("centro"), E ("leste"), e chame as equações dos planos delas de $F_N(x, y)$, $F_S(x, y)$, $F_W(x, y)$, $F_C(x, y)$, e $F_E(x, y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(1.0 pts)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P_C & = & \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_C(x, y) \,\}, \\ P_E & = & \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_E(x, y) \,\}, \\ r & = & P_C \cap P_E. \end{array}$$

Represente a reta r graficamente como numerozinhos.

d) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para a reta do item anterior. Use notação de conjuntos.

e) **(1.0 pts)** Seja

$$A = \{0, 1, \ldots, 9\} \times \{0, 1, \ldots, 10\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A. Para cada ponto $(x, y) \in A$ represente graficamente $(x, y) + \frac{1}{3}\vec{\nabla}F(x, y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x, y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x, y), e quando $\vec{\nabla}F(x, y)$ não existir faça um '×' sobre o numerozinho que está no ponto (x, y).

f) **(1.5 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} Q(t) & = & (0, 4) + t\overrightarrow{(1, 1)}, \\ (x(t), y(t)) & = & Q(t), \\ h(t) & = & F(x(t), y(t)). \end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0, 6]$.

Questão 2

(Total: 4.5 pts)
Seja

$$F(x,y) = 2x^2 - xy - y^2.$$

Nesta questão você vai ter que fazer várias cópias do diagrama de numerozinhos da função $F(x,y)$ para os pontos com $x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Os numerozinhos vão ser estes aqui:

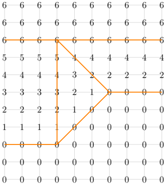
$$\begin{array}{ccccc} 8 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 9 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 8 \end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Desenhe o "campo gradiente" da função F nestes pontos, mas multiplicando cada $\vec{\nabla}F(x,y)$ por $\frac{1}{10}$ pros vetores não ficarem uns em cima dos outros. Deixa eu traduzir isso pra termos mais básicos: faça uma cópia do diagrama de numerozinhos da $F(x,y)$, e sobre cada (x,y) com $x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}$ desenhe a seta $(x,y) + \frac{1}{10}\vec{\nabla}F(x,y)$.

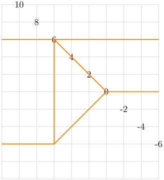
b) **(3.5 pts)** Faça uma outra cópia desse diagrama de numerozinhos e desenhe sobre ela as curvas de nível da função $F(x,y)$ para $z=0$, $z=2$, $z=5$, $z=-1$ e $z=-2$.

Dicas:
1) O vetor gradiente num ponto (x,y) é sempre ortogonal à curva de nível que passa pelo ponto (x,y).
2) Faça quantos rascunhos quiser. Eu só vou corrigir seus desenhos pros itens (a) e (b) que disserem "versão final", e eles têm que ser os mais caprichados possíveis.

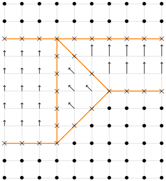
Questão 1: gabarito

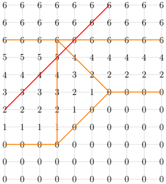
a) 

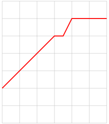
b)
$$\begin{array}{rcl} F_N(x,y) &=& 6 \\ F_W(x,y) &=& -2+y \\ F_C(x,y) &=& 1-x+y \\ F_E(x,y) &=& -10+2y \\ F_S(x,y) &=& 0 \end{array}$$

c) 

d) $\{\,(6,5,0)+t\overrightarrow{(-1,1,2)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$

e) 

f) 

$\Rightarrow$ 

Questão 2: gabarito