Cálculo 3 - 2022.2

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Questão 1

(Total: 3.5 pts)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(x,y) & = & x^2+y^2, \\ H(x,y) & = & xy, \\ E(x,y) & = & x^2+4y^2. \end{array}$$

Represente graficamente:

a) **(0.1 pts)** o diagrama de numerozinhos de $P(x,y)$,
b) **(0.2 pts)** o digrama de numerozinhos de $H(x,y)$,
c) **(0.2 pts)** o diagrama de numerozinhos de $E(x,y)$,
d) **(0.1 pts)** pelo menos 5 curvas de nível de $P(x,y)$,
e) **(0.2 pts)** pelo menos 5 curvas de nível de $H(x,y)$,
f) **(0.2 pts)** pelo menos 5 curvas de nível de $E(x,y)$,

E os conjuntos abaixo:

g) **(0.2 pts)** $C_1 = E^{-1}(4)$
h) **(0.2 pts)** $C_2 = E^{-1}(1)$
i) **(0.3 pts)** $C_3 = E^{-1}([1,4))$
j) **(0.3 pts)** $C_4 = H^{-1}([-2,1))$
k) **(0.5 pts)** $C_5 = C_3 \cap C_4$
l) **(0.5 pts)** $C_6 = \mathrm{Int}(C_5)$
m) **(0.5 pts)** $C_7 = \overline{C_5}$

Use os grids da página 4.
Indique claramente qual desenho é a resposta de cada item e quais desenhos são rascunhos.

Questão 2

(Total: 2.5 pts)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} z & = & (x-x_0)^4(y-y_0)^6, \\ \alpha & = & x+y, \\ \beta & = & x-y, \\ w & = & (\alpha^3-\alpha)+\beta^2. \end{array}$$

Nesta questão eu vou ver principalmente quais dos truques da “notação de físicos” você sabe usar direito.

A página 5 tem um monte de dicas de “notação de físicos” que você pode usar como referência. A coluna da esquerda dessa página tem um exemplo grande que nós vimos em aula; a parte de cima da coluna da direita tem uma tabela que eu copiei da página 275 do Leithold, na qual ele mostra como reescrever certas regras de derivação usando diferenciais; e a parte de baixo da coluna da direita é uma versão adaptada do primeiro exemplo do capítulo XVI do Silvanus Thompson, em que ele mostra como fazer contas ficarem menores criando variáveis dependentes novas.

Calcule:

a) **(0.2 pts)** $\frac{dz}{dx}$,
b) **(0.3 pts)** z_{xx},
c) **(0.5 pts)** dz,
d) **(1.5 pts)** dw.

No item c tente chegar até uma expressão da forma $z_x dx + z_y dy$, e no item d tente chegar até uma expressão da forma forma $w_x dx + w_y dy$.

Questão 3

(Total: 3.0 pts)

Sejam

$$\begin{aligned} z(x,y) &= dx^2 + exy + fy^2, \\ h(x) &= z(x,1). \end{aligned}$$

Vou dizer que a função $h(x,y)$ é a “função homogênea de grau 2 associada a $h(x)$”.

a) **(1.5 pts)** Digamos que

$$h(x) = -2(x-1)(x+1).$$

Faça o diagrama de sinais da $h(x)$ (em $\mathbb{R}$), os numerozinhos da função $z(x,y)$ nos pontos com $y=1$ e $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$ (siiiim, só 5 pontos!) e o diagrama de sinais da função $z(x,y)$ (em $\mathbb{R}^2$), e diga se o ponto $(0,0)$ é um mínimo, máximo, ponto de sela, etc, etc.

b) **(1.5 pts)** Agora digamos que

$$h(x) = (x-i)(x+i) = x^2 + 1.$$

Faça as mesmas coisas para esta função $h(x)$ e para a função $z(x,y)$ associada a ela.

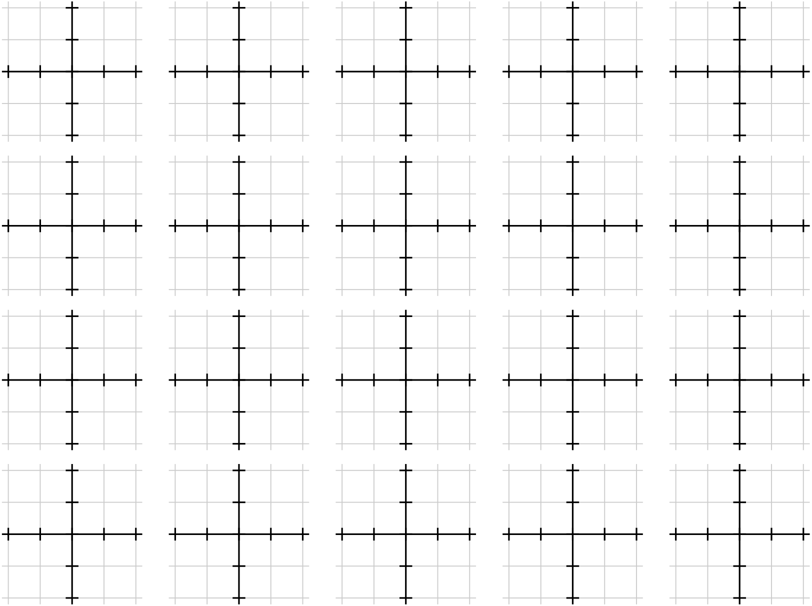
Questão 4

(Total: 3.0 pts)

Sejam:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= xy, \\ E(x,y) &= x^2 + 4y^2, \\ D &= E^{-1}([0,16]), \\ F &: D \to \mathbb{R} \\ & \quad (x,y) \mapsto H(x,y) \end{aligned}$$

Agora só queremos olhar pro que acontece dentro do “domínio” D, que é uma elipse; note que a função $F(x,y)$ só está definida em D.
Faça pelo menos 5 curvas de nível de $z = F(x,y)$ (obs: só dentro da elipse!!!) e mostre no seu gráfico quais dos pontos de D são máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela.



$$
\begin{aligned}
z &= (x^3+y^4)^5 \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^4)^5 \\
&= 5(x^3+y^4)^4\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4(\tfrac{\partial}{\partial x}x^3+\tfrac{\partial}{\partial x}y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4(3x^2) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^4)^5 \\
&= 5(x^3+y^4)^4\frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4(\tfrac{\partial}{\partial y}x^3+\tfrac{\partial}{\partial y}y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4(4y^3) \\
dz &= 5(x^3+y^4)^4\,d(x^3+y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4(dx^3+dy^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4(3x^2\,dx+4y^3\,dy) \\
&= 5(x^3+y^4)^4(3x^2)dx+5(x^3+y^4)^4(4y^3)dy \\
dz &= z_x dx+z_y dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d(c)}{dx} &= 0 \\
\tfrac{d(x^n)}{dx} &= nx^{n-1} \\
\tfrac{d(cu)}{dx} &= c\tfrac{du}{dx} \\
\tfrac{d(u+v)}{dx} &= \tfrac{du}{dx}+\tfrac{dv}{dx} \\
\tfrac{d(uv)}{dx} &= u\tfrac{dv}{dx}+v\tfrac{du}{dx} \\
\tfrac{d(\frac{u}{v})}{dx} &= \tfrac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
\tfrac{d(u^n)}{dx} &= nu^{n-1}\tfrac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(c) &= 0 \\
d(x^n) &= nx^{n-1}dx \\
d(cu) &= c\,du \\
d(u+v) &= du+dv \\
d(uv) &= u\,dv+v\,du \\
d(\tfrac{u}{v}) &= \tfrac{v\,du-u\,dv}{v^2} \\
d(u^n) &= nu^{n-1}du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= (x^2+a^2)^{3/2} \\
u &= x^2+a^2 \\
du &= 2x\,dx \\
dy &= d((x^2+a^2)^{3/2}) \\
&= d(u^{3/2}) \\
&= u^{1/2}\,du \\
&= u^{1/2}\cdot 2x\,dx \\
&= (x^2+a^2)^{1/2}\cdot 2x\,dx
\end{aligned}
$$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Temos:} & z & = & (x-x_0)^4(y-y_0)^6 \\
\text{Sejam:} & u & = & x-x_0, \\
 & v & = & y-y_0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Então:} & z & = & u^4v^6, \\
 & \frac{dz}{dx} & = & \frac{d}{dx}(u^4)v^6 + u^4\frac{d}{dx}(v^6) \\
 & & = & (4u^3\frac{d}{dx}u)v^6 + u^4(6v^5\frac{d}{dx}v) \\
 & & = & (4u^3\frac{d}{dx}(x-x_0))v^6 + u^4(6v^5\frac{d}{dx}(y-y_0)) \\
 & & = & 4u^3v^6 \\
 & & = & 4(x-x_0)^3(y-y_0)^6,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
z_{xx} & = & \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z \\
 & = & \frac{d}{dx}(4u^3v^6) \\
 & = & 4(\frac{d}{dx}(u^3)v^6 + u^3\frac{d}{dx}(v^6)) \\
 & = & 4(\frac{d}{dx}(u^3)v^6) \\
 & = & 4(3u^2\frac{d}{dx}(u)v^6) \\
 & = & 4(3u^2v^6) \\
 & = & 12u^2v^6 \\
 & = & 12(x-x_0)^2(y-y_0)^6,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
dz & = & d(u^4v^6) \\
 & = & d(u^4)v^6 + u^4d(v^6) \\
 & = & (4u^3du)v^6 + u^4(6v^5dv) \\
 & = & (4u^3v^6)dx + (6u^4v^5)dy \\
 & = & 4(x-x_0)^3(y-y_0)^6dx + 6(x-x_0)^4(y-y_0)^5dy
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Temos:} & \alpha & = & x+y, \\
 & \beta & = & x-y, \\
 & w & = & (\alpha^3-\alpha)+\beta^2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Então:} & dw & = & d(\alpha^3+\alpha)+d(\beta^2) \\
 & & = & (2\alpha+1)d\alpha + 2\beta d\beta \\
 & & = & (2\alpha+1)d(x+y) + 2\beta d(x-y) \\
 & & = & (2\alpha+1)(dx+dy) + 2\beta(dx-dy) \\
 & & = & (2\alpha+1+2\beta)dx + (2\alpha+1-2\beta)dy \\
 & & = & (2(x+y)+1+2(x-y))dx \\
 & & + & (2(x+y)+1-2(x-y))dy \\
 & & = & (4x+1)dx + (4y+1)dx
\end{array}$$