Cálculo 3 - 2022.2

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Cálculo 3 - 2022.2

Aulas 1 e 2: introdução ao curso
(e a trajetórias)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Sobre a aula 1

Na aula 1 nós usamos as idéias dos 8 primeiros slides daqui,

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-intro.pdf

e do slide 10 daqui,

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-plano-tang.pdf#page=10

...pra desenhar casos particulares das figuras das seções 7.4 e 7.5 do "GA1" do Felipe Acker:

http://angg.twu.net/acker/acker__ga_livro1_2019.pdf#page=43

Introdução ao vetor velocidade

Em cursos de Cálculo 3 “pra matemáticos” a gente normalmente começa definindo o vetor velocidade como um limite. O Felipe Acker faz isso muito bem nos capítulos 2 e 3 do “GA4”,

http://angg.twu.net/acker/acker__ga_livro4_2019.pdf

Eu costumava fazer mais ou menos isso no curso de Cálculo 3, e a gente gastava uma aula inteira aprendendo a decifrar a fórmula daquele limite e visualizar o que ela queria dizer.

Dessa vez vamos tentar fazer algo diferente.
Vamos começar com exemplos e animações.
Assista este vídeo aqui até o 9:00,

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-bezier.pdf
https://www.youtube.com/watch?v=aVwxzDHniEw

mas considere que tudo até o 6:34...

Introdução ao vetor velocidade (cont.)

...mas considere que tudo no vídeo até o 6:34 são idéias avançadas que a gente só vai entender nuns exercícios que a gente vai fazer daqui a algumas aulas. Por enquanto reserve praticamente toda a sua atenção pro trecho entre 6:34 e 9:00, que é o trecho que a Freya Holmér mostra os vetores velocidade e aceleração pra algumas curvas de Bézier.

A gente vai fazer o seguinte. Nós vamos acreditar que *em geral* quando temos uma trajetória $P(t) = (x(t), y(t))$ o vetor velocidade dessa trajetória é $P'(t) = (x'(t), y'(t))$. Nós vamos ver vários exemplos disso, e vamos deixar pra entender os detalhes desse "em geral" quando formos entender a definição "pra matemáticos" do vetor velocidade.

Exercício 1: uma trajetória com um bico

Dê uma olhada no item 1e da VS do semestre passado:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-VS.pdf#page=2

Faça o que essa questão pede e represente graficamente $Q(t)+Q'(t)$ pra um monte de outros valores de t também — até você entender como essa trajetória se comporta. *Dica:* ela é um movimento retilíneo uniforme até um determinado instante, aí ela muda de vetor velocidade subitamente e vira um outro movimento retilíneo uniforme.

Exercício 2: um trajetória com teleporte

Represente graficamente a trajetória abaixo. Ela é parecida com a anterior, mas nessa tem um momento em que a partícula desaparece do ponto em que em estava e se teleporta pra outro lugar.

$$R(t) \;=\; \begin{cases} (t,4) & \text{quando } t \leq 6, \\ (5, 11-t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

Dicas pro exercícios 1 e 2

Este vídeo aqui tem algumas figuras sobre como desenhar trajetórias:

`http://www.youtube.com/watch?v=3yWLubqHsic`
`http://angg.twu.net/eev-videos/2020.2-C3-intro.mp4`

Quase todo mundo achou muito difícil desenhar a trajetória do exercício 2 — se a gente calcula $R(t)$ só pra valores inteiros de t a gente não consegue descobrir como a $R(t)$ se comporta entre $t = 6$ e $t = 7$...

Um jeito de resolver isso é calcular $R(t)$ para $t = 6.1$, $t = 6.2$, ..., $t = 6.9$, desenhar esses pontos no gráfico, e aí tentar descobrir qual é o comportamento da $R(t)$ pra todos os valores em $[6, 7]$.

Um outro jeito é considerar que $R(t) = (x(t), y(t))$ e tentar entender as funções $x(t)$ e $y(t)$, que são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

“VT”

Vou me referir a esse PDF aqui como “VT”,
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-vetor-tangente.pdf
e aos exercícios 1 e 2 dele como “VTex1”, “VTex2”.

Faça os exercícios VTex1 e VTex2.

Órbita

Este exercício vai dar uma figura que é a órbita de uma lua.
O resultado vai ser algo como a figura da última página daqui,
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-orbita.pdf`
mas olhe pra essa figura durante só uns poucos segundos.

Neste exercício você vai tentar redescobrir essa figura sozinho, e você vai tentar descobrir como desenhar uma aproximação bem razoável pra ela só somando uns vetores no olhômetro e sem fazer nenhuma conta complicada — por exemplo, você vai evitar usar uma aproximação numérica pra $(\cos(\frac{1}{12} \cdot 2\pi), \mathrm{sen}(\frac{1}{12} \cdot 2\pi))$; ao invés disso você vai usar a representação gráfica deste ponto no $\mathbb{R}^2$.

Órbita (cont.)

Seja $h = \frac{1}{12} \cdot 2\pi$.
Esse h vai ser uma "hora". Vou explicar isso no quadro.
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P(t) & = & (\cos t, \operatorname{sen} t), \\ Q(t) & = & (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t), \\ R(t) & = & \frac{1}{2}(\cos 4t, \operatorname{sen} 4t) = (\frac{1}{2}\cos 4t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t), \\ S(t) & = & P(t) + R(t). \end{array}$$

a) Represente graficamente $P(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
b) Represente graficamente $P(t) + P'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

c) Represente graficamente $Q(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
d) Represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

e) Represente graficamente $Q(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
f) Represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

g) Represente graficamente $S(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.
h) Represente graficamente $S(t) + S'(t)$ para $t = 0h, 1h, 2h, \ldots, 12h$.

Órbita (cont.)

Nos itens a até f você deve ter obtido pontos sobre círculos e vetores tangentes aos círculos apoiados nestes pontos. Nos itens g e h você deve ter obtido algo bem mais complicado: pontos e vetores apoiados nestes pontos, mas você ainda não sabe direito sobre que curva eles estão.

Reveja o trecho entre 6:34 e 9:00 do vídeo da Freya Holmér. A trajetória que ela analisa é bem "suave", no sentido de que ela não bicos ou teleportes, e a derivada da aceleração dela é constante.

No item h você obteve alguns pontos e vetores velocidade *de uma trajetória que você não sabe direito qual é...* você só tem uma lembrança vaga do "traço" dessa trajetória, porque você viu a figura-spoiler durante uns poucos segundos.

Órbita (cont.)

i) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, …, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item g. Aqui você vai conseguir uma aproximação bem tosca pro "traço" da trajetória $S(t)$.

j) Desenhe uma trajetória bem suave que nos instantes $t = 0h$, $1h$, …, $12h$ passe pelos pontos que você obteve no item h, e que naqueles instantes tenha exatamente os vetores velocidade que você também desenhou no item h. Aqui você provavelmente vai conseguir uma aproximação bastante boa pro "traço" da trajetória $S(t)$.

k) Refaça o desenho do item j pra ele ficar mais caprichado e simétrico e tal. Quando você achar que conseguiu fazer uma versão caprichada boa olhe de novo a figura-spoiler e compare o seu desenho com ela.

Cálculo 3 - 2022.2

Aula 4: tipos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

C

Em `C` cada subexpressão retorna um valor, e cada valor tem um tipo. Por exemplo, depois destas declarações

```
char c = 100;
float a = 2.34;
```

Temos os dois diagramas à direita. Repare que o primeiro diz o tipo de cada subexpressão e o segundo diz o valor, ou o resultado, daquela subexpressão.

Esses dois diagramas *se complementam*. A maioria dos exercícios deste PDF vai pedir que você faça o diagrama de tipos, e alguns deles vão ter sugestões tipo “se você estiver completamente perdido considere o caso particular tal e faça o diagrama de valores dele... e depois tente fazer o diagrama de tipos”.

$$\underbrace{\texttt{printf}(\underbrace{\texttt{"\%f"}}_{\texttt{char *}},\ \underbrace{\underbrace{\texttt{c}}_{\texttt{char}} + \underbrace{\texttt{a}}_{\texttt{float}}}_{\texttt{float}})}_{\texttt{int}}$$

$$\underbrace{\texttt{printf}(\underbrace{\texttt{"\%f"}}_{\texttt{"\%f"}},\ \underbrace{\underbrace{\texttt{c}}_{\texttt{100}} + \underbrace{\texttt{a}}_{\texttt{2.34}}}_{\texttt{102.34}})}_{\texttt{6}}$$

Funções

Em `C` o "valor" do `printf` é um número de 64 bits — o endereço do código da função `printf` — com um tipo complicado... quando eu rodei o GDB no programa da página anterior e perguntei pra ele o tipo e o valor do `printf` ele respondeu isso aqui:

```
(gdb) p printf
$1 = {int (const char *, ...)}
       0x7ffff7e3bcf0 <__printf>
(gdb)
```

Livros de Matemática geralmente consideram que funções são conjuntos. Por exemplo, se

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

então f — ou: o "valor" de f — é o gráfico da função f, que é uma párabola em $\mathbb{R}^2$, e é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ contendo infinitos pontos... ou seja: nesse caso o valor de $f(3)$ é 9, que é um número, mas o "valor" de f é um conjunto infinito!!! Cuidado! =(

Dica: leia as páginas 31–33 do capítulo 1 do Leithold pra ver como ele define funções. A gente só vai entender *direito* o conceito de "variável dependente", que ele menciona na página 32, quando a gente começar a entender "notação de físicos", daqui a algumas aulas... pra resumir *muito*: "variáveis dependentes" existem em "notação de físicos" e não existem em "notação de matemáticos", e a gente vai ver como traduzir entre as duas notações.

Tipos

TUDO que nós vamos fazer em Cálculo 3 pode ser *visualizado* e *tipado*. Você já viu um pouco de tipos em `C` e em Física; em Física os "tipos" são parcialmente determinados pelas unidades — metros são distância, segundos são tempo, metros/segundo é uma unidade de velocidade, e assim por diante... em `C` um `char`, um `int`, um `float` e um `(void *)` são coisas bem diferentes.

Obs: o jeito como nós vamos usar tipos em Cálculo 3 vai ser bastante improvisado. Se você googlar por "Type Theory" você vai encontrar montes de referências a teorias de tipos que podem ser totalmente formalizadas, mas os tipos que nós vamos usar em C3 são muito mais "intuitivos" do que "formais".

Dê uma olhada nas páginas 164 a 166 do capítulo 5 do Bortolossi. Todas as expressões que aparecem lá podem ser "tipadas" e interpretadas como posições no eixo x (ou no eixo y, ou no eixo y), ou como distâncias no eixo x (ou no eixo y, ou z), ou como *inclinações*... vamos ver os detalhes disto aos poucos.

Nos próximos exercícios você vai tentar "tipar" cada subexpressão deles. Escreva os seus tipos nos lugares em que eu pus as '?'s. Use português, improvise o quanto precisar, invente abreviações – mas tente encontrar as melhores abreviações possíveis – e compare o seu modo de escrever os tipos com os dos seus colegas. Lembre que aqui nós estamos tentando fazer explicitamente, num diagrama, algo que os livros fazem em poucas frases de texto fingindo que é algo óbvio.
Se você tiver dificuldade de fazer o caso geral faça um caso particular primeiro.

Exercício 1

Digamos que $f(x) = x^2$ e que $y = f(x)$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral faça $x_0 = 1$ e $\Delta x = 0.1$.

$$\underbrace{\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{\underbrace{x_0}_{?}+\underbrace{\Delta x}_{?}}_{?})}_{?} - \underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{x_0}_{?})}_{?}\right)}_{?} / \underbrace{\Delta x}_{?}}_{?}$$

Exercício 2

Digamos que $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, e $P(t) = (f(t), g(t))$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral
faça $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\Delta t = 0.1$.

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{\underbrace{P}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?} + \underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?} - \underbrace{\underbrace{P}_{?}(\underbrace{t_0}_{?})}_{?})}_{?} \,/\, \underbrace{\Delta t}_{?}}_{?}$$

Exercício 3

Digamos que $f(t) = \cos t$, $g(t) = \operatorname{sen} t$, e $P(t) = (f(t), g(t))$.
Se você tiver dificuldade de pensar no caso geral
faça $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\Delta t = 0.1$.

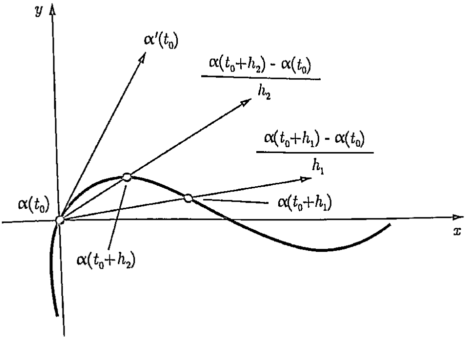
$$\underbrace{\underbrace{P}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?} = \underbrace{(\underbrace{\underbrace{f}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?}, \underbrace{\underbrace{g}_{?}(\underbrace{\underbrace{t_0}_{?}+\underbrace{\Delta t}_{?}}_{?})}_{?})}_{?}$$

Agora nós vamos começar a ver como decifrar definições como a das páginas 197–198 do capítulo 6 do Bortolossi. Ele faz tudo de um jeito bem geral, e ele usa $\mathbb{R}^m$ ao invés de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4

Reescreva a conta grande no meio da página 198 do Bortolossi substituindo t_0 por $\frac{\pi}{2}$, h_j por ε, $x_1(t)$ por $\cos t$, $x_2(t)$ por $\operatorname{sen} t$, e m por 2. Obs: os '...' vão sumir.

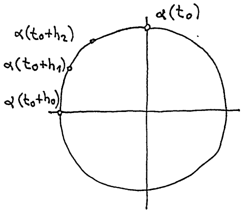
O livro do Bortolossi tem essa figura daqui na página 199:



Isso é um desenho de vetor velocidade como limite de retas secantes num caso geral – o Bortolossi não nos diz quem são $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, nem t_0, nem a sequência $(h_1, h_2, h_3, \ldots)$, e isso sugere que essa figura vai valer pra quaisquer α, t_0 e $(h_1, h_2, \ldots)$, com as devidas adaptações...

Exercício 5

Aqui nós vamos tentar fazer uma figura parecida com a do caso anterior, mas com $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $h_0 = \frac{\pi}{2}$, $0 < \ldots < h_3 < h_2 < h_1 < h_0$, $\lim_{j\to\infty} h_j = 0$. Comece com esta figura aqui,



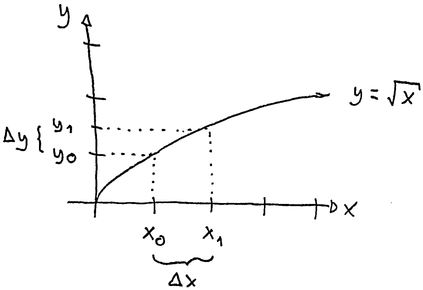
e encontre valores razoáveis para h_1, h_2 e h_3 que te permitam completar o desenho no olhômetro fazendo as contas de cabeça com aproximações bem grosseiras.

Introdução à "notação de físicos"

Nós vamos aprender a usar duas convenções de notação matemática no curso – ou, pra encurtar, duas "notações". O Bortolossi usa uma notação muito mais precisa, que eu vou chamar de "notação de matemáticos", e o Silvanus Thompson usa uma notação mais intuitiva mas bem mais difícil de formalizar, que eu vou chamar de "notação de físicos".

Na "notação de físicos" muitos símbolos vão ser *abreviações* e as regras pra expandir essas abreviações vão depender do contexto. Vão existir algumas convenções pra expandir essas abreviações que vão ser seguidas *quase* sempre, mas vão existir muitas exceções – e muitos casos ambíguos...

Um primeiro exemplo
Digamos que $y = \sqrt{x}$.
Podemos considerar que x e y "variam juntos",
"obedecendo certas restrições". O conjunto dos pontos (x, y)
que obedecem essas restrições é $\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}\, \}$
e o gráfico é:



$$
\begin{array}{rcl}
x_0, x_1 & \in & \mathbb{R} \\
y_0 & = & \sqrt{x_0} \\
y_1 & = & \sqrt{x_1} \\
\Delta x & = & x_1 - x_0 \\
\Delta y & = & y_1 - y_0
\end{array}
$$

Material de 2021.1

Em 2021.1 eu usei a “notação de físicos” pela primeira vez no curso de Cálculo 3, e dei uma parte do curso alternando entre três livros: o do Bortolossi (“notação de matemáticos”), o do Silvanus Thompson (“notação de físicos”), e o do Thomas (que usa as duas notações). Desta vez eu vou fazer a mesma coisa, só que de um jeito mais organizado que nos semestres anteriores, porque: 1) eu vou reusar bastante material de antes, 2) agora que eu acho que sei “todas” as regras necessárias pra traduzir a “notação de físicos” pra “notação de matemáticos”... obs: esse “agora eu acho que sei todas as regras” quer dizer “agora eu tenho um conjunto de regras de tradução que *parece* ser suficiente pra traduzir *tudo que a gente vai usar* da ‘notação de físicos’ em Cálculo 3 pra ‘notação de matemáticos’ ”. Ninguém que eu conheço sabe fazer essa tradução formalmente, e eu estou conversando de vez em quando com umas pessoas de outras universidades pra ver se elas concordam com a minha tradução...

Aqui tem uma lista – ainda bem incompleta – de PDFs e vídeos do semestre passado sobre “notação de físicos”:

Aula 14: Notação de físicos
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf`

30/jul/2021: introdução à NF, versão preliminar:
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=fMNgr5wDMek`

4/ago/2021: Segundo vídeo sobre notação de físicos
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-2.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=bjBlOqO-7Do`

6/ago/2021: Silvanus Thompson: triângulo
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-tr.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=hOWVxOgv9pO`

6/ago/2021: Silvanus Thompson: o exemplo da escada
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-esc.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=-0QxJty23hQ`

20/ago/2021 - Thompson/Gardner
`http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-4.mp4`
`https://www.youtube.com/watch?v=d0fnURoPI9Q`

Cálculo 3 - 2022.2

Aulas 9 e 10: Séries de Taylor
(para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

A idéia básica

Digamos que $f(x)$ é um polinômio.
Digamos que o grau dele é 4, pra simplificar.
Digamos que $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$.
Então:

$$\begin{array}{rcl} f(x) &=& a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \\ f'(x) &=& b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \\ f''(x) &=& 2c + 6dx + 12ex^2 \\ f'''(x) &=& 6d + 24ex \\ f''''(x) &=& 24e \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(0) &=& a \\ f'(0) &=& b \\ f''(0) &=& 2c \\ f'''(0) &=& 6d \\ f''''(0) &=& 24e \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a &=& f(0) \\ b &=& f'(0) \\ c &=& f''(0)/2 \\ d &=& f'''(0)/6 \\ e &=& f''''(0)/24 \end{array}$$

E portanto:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f''''(0)}{24}x^4$$

A idéia básica (2)

Agora vamos tentar generalizar isso.
Digamos que $f(x)$ é um polinômio.
Digamos que o grau dele é k, e que por enquanto $k = 4$.
Digamos que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.
A notação $f^{(k)}$, como o (k) entre parênteses, quer dizer "f derivada k vezes". Por exemplo, $f^{(4)} = f''''$, e $f^{(0)} = f$.
Então:

$$\begin{array}{rcccccccc}
f^{(0)}(x) & = & a_0 & + & a_1x & + & a_2x^2 & + & a_3x^3 & + & a_4x^4 \\
f^{(1)}(x) & = & a_1 & + & 2a_2x & + & 3a_3x^2 & + & 4a_4x^3 \\
f^{(2)}(x) & = & 2a_2 & + & 6a_3x & + & 12a_4x^2 \\
f^{(3)}(x) & = & 6a_3 & + & 24a_4x \\
f^{(4)}(x) & = & 24a_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f^{(0)}(0) & = & 0!\,a_0 \\
f^{(1)}(0) & = & 1!\,a_1 \\
f^{(2)}(0) & = & 2!\,a_2 \\
f^{(3)}(0) & = & 3!\,a_3 \\
f^{(4)}(0) & = & 4!\,a_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
a_0 & = & f^{(0)}(0)/0! \\
a_1 & = & f^{(1)}(0)/1! \\
a_2 & = & f^{(2)}(0)/2! \\
a_3 & = & f^{(3)}(0)/3! \\
a_4 & = & f^{(4)}(0)/4!
\end{array}$$

E portanto:

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Exercício 1.
A fórmula do slide anterior também funciona pra polinômios com grau menor que 4. Verifique o que ela faz quando

$$f(x) = 42x^2 + 99x + 200.$$

Lembre que no ensino médio você era obrigado a "simplificar" $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ para 119880, mas em Cálculo 2 você tem que encontrar jeitos de escrever que sejam mais simples de ler e de verificar... pra gente em certos contextos $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 999$ é mais "simples" que 119880.

Exercício 2.
Tente aplicar a fórmula $(*)$ abaixo

$$f(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad\qquad (*)$$

a esta f aqui: $f(x) = 200x^5$.

a) O que acontece?

b) Tente escrever em detalhes o que dá errado.
Você vai precisar de notação matemática E português.
Tente aprender as convenções que eu usei nos PDFs
e as convenções que os livros usam, e lembre que se
você começar escrevendo uma igualdade qualquer leitor
que não seja muito seu amigo vai interpretá-la
como uma afirmação.

As operações derivs e derivs_0

Sejam derivs e derivs_0 as seguintes operações –
que vão nos ajudar muito nas contas:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{derivs}(f) & = & (f, f', f'', f''', \ldots) \\ \mathsf{derivs}_0(f) & = & (f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \ldots) \end{array}$$

Repare que $\mathsf{derivs}(f)$ retorna uma sequência infinita de funções
e $\mathsf{derivs}_0(f)$ retorna uma sequência infinita de números.

Um exemplo: se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então:

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x) & = & ax^2 + bx + c, & \qquad & f(0) & = & c, \\ f'(x) & = & 2ax + b, & & f'(0) & = & b, \\ f''(x) & = & 2a, & & f''(0) & = & 2a, \\ f'''(x) & = & 0, & & f'''(0) & = & 0, \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{derivs}(f) & = & (ax^2 + bx + c,\ 2ax + b,\ 2a,\ 0, 0, 0, \ldots) \\ \mathsf{derivs}_0(f) & = & (c, b, 2a, 0, 0, 0, \ldots) \end{array}$$

Algumas definições

Isto aqui

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0 truncada até grau n*, e isto aqui

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

ou:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

é a *série de Taylor da função f no ponto 0.*

Exercício 3.
Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$.

a) Calcule as 8 primeiras componentes de $\mathsf{derivs}(f)$.

b) Calcule as 8 primeiras componentes de $\mathsf{derivs}_0(f)$.

c) Calcule a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ truncada até grau 7.

d) Seja $g(x)$ a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$ truncada até grau 7; Calcule $g(0.1)$ na mão e compare o seu resultado com o resultado de calcular $\operatorname{sen} 0.1$ na calculadora ou no computador.

Exercício 4.
Calcule $\mathsf{derivs}(f)$ e $\mathsf{derivs}_0(f)$ para cada uma das 'f's abaixo, até o grau pedido.

a) $f(x) = e^x$, até grau 4
b) $f(x) = e^{2x}$, até grau 4
c) $f(x) = e^{ix}$, até grau 8
d) $f(x) = \cos x$, até grau 8
e) $f(x) = \operatorname{sen} x$, até grau 8
f) $f(x) = i \operatorname{sen} x$, até grau 8
g) $f(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$, até grau 8

A notação com '≈'

O sinal '≈' que dizer "é aproximadamente igual a",
mas ele não diz quão boa é a aproximação...
Estas duas afirmações são ambas verdadeiras:

$$\begin{array}{rcl} f(0.42) & \approx & f(0)+f'(0)\cdot 0.42+\frac{f''(0)}{2}(0.42)^2 \\ f(0.42) & \approx & f(0)+f'(0)\cdot 0.42+\frac{f''(0)}{2}(0.42)^2+\frac{f'''(0)}{6}(0.42)^3 \end{array}$$

Até dé pra formalizar essa igualdade aqui embaixo
usando um limite - veja a página 4 deste PDF:
`https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf`

$$f(x) \;=\; f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}x^2$$

Mas eu não sei como formalizar precisamente
a versão com 0.42 no lugar do x... =(

As versões truncadas de derivs, derivs_0 e derivs_p

Vamos definir derivs^n e derivs_0^n como as versões "truncadas até grau n" de derivs e derivs_0...

$\mathsf{derivs}^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}^n(f)$, e $\mathsf{derivs}_0^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}_0^n(f)$.

Além disso $\mathsf{derivs}_p(f)$ vai ser a lista infinita $(f(p), f'(p), f''(p), \ldots)$, e $\mathsf{derivs}_p^n(f)$ vai ser a lista com as primeiras $n+1$ entradas de $\mathsf{derivs}_p^n(f)$.

Exemplo:

$$\mathsf{derivs}_{42}^2(f) \quad = \quad (f(42), f'(42), f''(42)).$$

Vamos nos referir a $\mathsf{derivs}_p^n(f)$ como "as derivadas de f até grau n no ponto p". Repare que $f(42)$ é a "derivada de f de grau 0 no ponto 42", $f'(42)$ é a "derivada de f de grau 1 no ponto 42", etc...

Antes o termo "grau" não servia pra falar de número de vezes que uma função foi derivada, mas agora passou a servir. $\quad =)$

Notação de físicos: introdução

Links:

https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf (páginas 171–173)
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf "Calculus Made Easy" (1914)
http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf (p.5: linearizações)
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-notacao-de-fisicos.pdf
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Na aula de 2022sep23 a gente usou os links acima
e eu escrevi um montão de coisas no quadro –
que eu vou digitar assim que der!!!

Exercício 5.

Leia a seção 4.7 do livro do Daniel Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Os livros mais modernos:
i) distinguem dx e Δx,
ii) escrevem $y = f(x)$ ao invés de $y = y(x)$,
iii) evitam a convenção $x_1 = x_0 + \Delta x$.

a) Traduza o início da seção 4.7 do Miranda - até o fim da página 118 - pra notação do Thompson. Dicas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p) + f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p) + f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

e a função L é exatamente a série de Taylor da função f truncada até grau 1... lembre que nós quase só vimos séries de Taylor no caso em que x_0 era 0, mas ficamos de ver depois o caso em que o “ponto base” não precisava mais ser 0...

Alguns truques de tradução

Truque 1: quando a gente escreve fórmulas "com o mesmo formato" perto uma da outra o leitor tende a ler a segunda ou como uma tradução da primeira pra outra notação ou como um caso particular da primeira...

Isto aqui é uma tradução de duas das fórmulas da p.117 do D. Miranda pra "notação de físicos":

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \approx & f(p)+f'(p)(x-p) \\ L(x) & = & f(p)+f'(p)(x-p) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} f(x_1) & \approx & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \\ L(x_1) & = & f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \end{array}$$

E isto aqui é um caso particular da primeira fórmula:

$$f(4.02) \approx f(4)+f'(4)(4.02-4) \qquad (*)$$

Repare que a fórmula $(*)$ fica mais clara se escrevermos isto explicitamente:

$$x_1 = 4.02 \qquad x_0 = 4$$

...e repare que se a gente tentar escrever isto aqui direto

$$\sqrt{4.02} \approx \sqrt{4}+\sqrt{4}'(4.02-4)$$

fica confuso e péssimo — não existe uma notação padrão pra derivada de $\sqrt{x}$ em $x=4$!!! Aqui a gente TEM que usar um truque novo — a gente tem que dar um nome pra função $\sqrt{x}$. Por exemplo...

Alguns truques de tradução (2)

Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$.
Então $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, e

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \end{array}$$

Repare que acima eu só fiz as subtituições $f(x) := \sqrt{x}$ e $f'(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — eu acho que as contas mais mais fáceis de entender se a gente fizer as substituições e as simplificações em passos separados:

$$\begin{array}{rrcl} & f(4.02) & \approx & f(4) + f'(4)(4.02-4) \\ \Rightarrow & \sqrt{4.02} & \approx & \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4.02-4) \\ & & = & 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ & & = & 2 + 0.005 \\ & & = & 2.005 \\ & \sqrt{4.02} & = & 2.004993765576342\ldots \end{array}$$

A última linha acima tem um '$=$' ao invés de um '$\approx$', e eu calculei o resultado dela com a calculadora.

A tradução pra notação de físicos

Temos:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

Acho que vocês devem conseguir acreditar nisso aqui...
(a gente pode checar os detalhes depois!)

$$\begin{array}{rcl} g(x_0 + \Delta x) & \approx & g(x_0) + g'(x_0)\Delta x + \frac{g''(x_0)}{2}(\Delta x)^2 \\ h(x + \Delta x) & \approx & h(x) + h'(x)\Delta x + \frac{h''(x)}{2}(\Delta x)^2 \end{array}$$

E se $y = y(x)$ então:

$$\begin{array}{rcl} y(x + \Delta x) & \approx & y + y_x\Delta x + \frac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 \\ y(x + \Delta x) & \approx & y + y_x\Delta x + \frac{y_{xx}}{2}(\Delta x)^2 + \frac{y_{xxx}}{6}(\Delta x)^3 \end{array}$$

Exercício 5.
Digamos que $x_0 = 10$, $f(x) = x^3$, $y_0 = f(x_0)$, $g(y) = \operatorname{sen} y$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{x_0}(f(x))$.

b) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{y_0}(g(y))$.

c) Calcule $\mathsf{derivs}^1_{x_0}(g(f(x)))$.

Seja $h(x) = g(f(x))$ — ou seja, $h = g \circ f$.

d) Calcule $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$.

Exercício 5: gabarito em código

```
(%i3) f  : x^3;
(%o3)
```

$$x^3$$

```
(%i4) g  : sin(y);
(%o4)
```

$$\sin y$$

```
(%i5) h  : subst([y=f], g);
(%o5)
```

$$\sin x^3$$

```
(%i6) diff(h, x);
(%o6)
```

$$3\,x^2\,\cos x^3$$

```
(%i7) [h, diff(h, x)];
(%o7)
```

$$\left[\sin x^3, 3\,x^2\,\cos x^3\right]$$

```
(%i8) x0 : 10;
(%o8)
```

$$10$$

```
(%i9) y0 : subst([x=x0], f);
(%o9)
```

$$1000$$

```
(%i10) z0 : subst([x=x0], h);
(%o10)
```

$$\sin 1000$$

```
(%i11) subst([x=x0], [h, diff(h, x)]);
(%o11)
```

$$[\sin 1000, 300\ \cos 1000]$$

Obs: aí não tem a resposta do item d...

Exercício 6.
Este exercício é uma versão mais geral do exercício 4.
Digamos que f e g são funções suaves de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.
(Uma função é "suave" quando ela pode ser derivada infinitas vezes. A função $|x|$ não é suave).
Digamos que $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$, e $h = g \circ f$.

a) Calcule $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$.

Repare que neste caso "calcule" quer dizer algo como "expanda e simplifique a expressão que você obtiver"...
Existem vários tipos de expansão e simplificação, e os programas de computação simbólica dão um nome pra cada tipo e permitem que você escolha quais vão ser aplicadas.

Exercício 5 (cont.)

Agora sejam $y = y(x) = f(x)$ e $z = z(y) = g(y)$.

b) Traduza o seu $\mathsf{derivs}^2_{x_0}(h(x))$ do item (a) pra notação de físicos.

Dica (pequena): $\frac{d}{dx} g(f(x_0)) = z_y y_x$.

c) Calcule $\mathsf{derivs}^{3}_{x_0}(z)$ usando notação de físicos.

Nas próximas páginas eu pus um "gabarito em código" do item (b). O modo mais fácil de usar a "notação de físicos" no Maxima é traduzir entre ela e a "notação de matemáticos" sempre que necessário. No item (c) as contas em "notação de matemáticos" ficam gigantescas, mas se você conseguir fazer elas todas em "notação de físicos" elas ficam pequenas.

```
(%i3) gradef(y   (x), y_x (x));
(%o3)
```

$$y(x)$$

```
(%i4) gradef(y_x(x), y_xx(x));
(%o4)
```

$$\mathrm{y\_x}(x)$$

```
(%i5) gradef(z   (y), z_y (y));
(%o5)
```

$$z(y)$$

```
(%i6) gradef(z_y(y), z_yy(y));
(%o6)
```

$$\mathrm{z\_y}(y)$$

```
(%i7) z     : z(y(x));
(%o7)
```

$$z\left(y\left(x\right)\right)$$

```
(%i8) z__x  : diff(z,    x);
(%o8)
```

$$\mathrm{y\_x}\left(x\right)\ \mathrm{z\_y}\left(y\left(x\right)\right)$$

```
(%i9) z__xx : diff(z__x, x);
(%o9)
```

$$\mathrm{y\_x}\left(x\right)^2\ \mathrm{z\_yy}\left(y\left(x\right)\right)+\mathrm{y\_xx}\left(x\right)\ \mathrm{z\_y}\left(y\left(x\right)\right)$$

```
(%i10) gradefs;
(%o10)
```

$$\left[y\left(x\right),\mathrm{y\_x}\left(x\right),z\left(y\right),\mathrm{z\_y}\left(y\right)\right]$$

```
(%i11) ex : z__xx;
(%o11)
```

$$\mathrm{y\_x}(x)^2\ \mathrm{z\_yy}(y(x)) + \mathrm{y\_xx}(x)\ \mathrm{z\_y}(y(x))$$

```
(%i12) ex : subst([y    (x)=y],        ex);
(%o12)
```

$$\mathrm{y\_x}(x)^2\ \mathrm{z\_yy}(y) + \mathrm{y\_xx}(x)\ \mathrm{z\_y}(y)$$

```
(%i13) ex : subst([y_x (x)=y_x],     ex);
(%o13)
```

$$\mathrm{z\_yy}(y)\ \mathrm{y\_x}^2 + \mathrm{y\_xx}(x)\ \mathrm{z\_y}(y)$$

```
(%i14) ex : subst([y_xx(x)=y_xx],    ex);
(%o14)
```

$$\mathrm{z\_y}(y)\ \mathrm{y\_xx} + \mathrm{z\_yy}(y)\ \mathrm{y\_x}^2$$

```
(%i15) ex : subst([z    (y)=z],        ex);
(%o15)
```

$$\mathrm{z\_y}\left(y\right)\ \mathrm{y\_xx}+\mathrm{z\_yy}\left(y\right)\ \mathrm{y\_x}^2$$

```
(%i16) ex : subst([z_y  (y)=z_y],      ex);
(%o16)
```

$$\mathrm{y\_xx}\,\mathrm{z\_y}+\mathrm{z\_yy}\left(y\right)\ \mathrm{y\_x}^2$$

```
(%i17) ex : subst([z_yy(y)=z_yy],      ex);
(%o17)
```

$$\mathrm{y\_x}^2\,\mathrm{z\_yy}+\mathrm{y\_xx}\,\mathrm{z\_y}$$

Cálculo 3 - 2022.2

Aulas 11 e 12: introdução a superfícies
e a diagramas de numerozinhos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Links

Superfícies do Bortolossi (seção 3.2):
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-3.pdf#page=3

Quádricas no livro do Acker (capítulo 19):
http://angg.twu.net/acker/acker__ga_livro3_2021.pdf#page=123

Interseção de planos por uma fórmula complicada:
http://angg.twu.net/acker/acker__ga_livro2_2020.pdf#page=87

"Low poly" e diagramas de numerozinhos:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf#page=21
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-P1.pdf#page=4
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-VS.pdf#page=3
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-VSB.pdf#page=5

Interseção de planos no olhômetro:
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=45

Quadros:
http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf#page=8

Ainda não digitei o que a gente viu nessas aulas!
Por enquanto veja as fotos dos quadros, nas páginas 8 e 9 daqui:
http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf#page=8

Cálculo 3 - 2022.2

Aulas 13 e 14: Plano tangente,
reta normal e derivada direcional.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Links

(Depois)

Introdução

Na aula passada nós vimos que num plano com esta equação

$$z \quad = \quad F(x,y) \quad = \quad a+bx+cy$$

dá pra encontrar os coeficientes da equação desse plano só olhando pro diagrama de numerozinhos, fazendo isto aqui:

$$\begin{array}{rcl} a &=& F(0,0) \\ b &=& F(x+1,y)-F(x,y) \\ c &=& F(x,y+1)-F(x,y) \end{array}$$

A interpretação geométrica de $b = F(x+1,y) - F(x,y)$ é a seguinte. Digamos que a gente escolheu um ponto (x,y) de $\mathbb{R}^2$. A gente vai considerar que esse é o nosso "ponto original", e a gente desloca ele uma unidade pra direita. O melhor modo de entender deslocamentos é pensando em termos de "antes" e "depois"; "antes" nós estávamos em (x,y) e "depois" nós andamos pra $(x+1,y)$. A gente geralmente vai usar o subscrito '$\cdot_0$' pra indicar "antes" e o subscrito '$\cdot_1$' pra indicar "depois"; então $(x_0,y_0) = (x,y)$ e $(x_1,y_1) = (x+1,y)$, e $(\Delta x, \Delta y) = (1,0)$. Além disso temos

$$\begin{array}{rcl} z &=& F(x,y) \\ z_0 &=& F(x_0,y_0) \quad = \quad F(x,y) \\ z_1 &=& F(x_1,y_1) \quad = \quad F(x+1,y), \end{array}$$

e então:

$$b \quad = \quad F(x+1,y)-F(x,y) \quad = \quad z_1 - z_0 \quad = \quad \Delta z$$

Também dá pra interpretar o c de uma forma parecida, só que no caso do c o deslocamento é diferente: $(x_1,y_1) - (x_0,y_0) = (0,1)$. Se a gente souber usar direito esses truques notacionais a gente vai conseguir formalizar mais ou menos facilmente idéias como essa aqui:

> Num plano $z = F(x,y) = a+bx+cy$ o valor de b é o Δz quando $(\Delta x, \Delta y) = (1,0)$.

Pra formalizar o que essa frase quer dizer a gente vai precisar de um monte de regras que dizem como certas abreviações devem funcionar. Eu chamo essas regras, e a notação com elas, de "notação de físicos", e eu chamo a notação que não permite essas abreviações de "notação de matemáticos". Nós vimos que o Bortolossi fala sobre as abreviações da "notação de físicos" que ele vai evitar nas páginas 171 a 173 do capítulo 5 dele:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf#page=9

A "notação de físicos" que a gente vai usar é praticamente a do "Calculus Made Easy" do Silvanus P. Thompson, mas ele 1) usa muito pouco a convenção de que '$\cdot_0$' e '$\cdot_1$' indicam "antes" e "depois", 2) ele geralmente não distingue 'd' e 'Δ', 3) ele muitas vezes escreve '$=$' em lugares em que seria mais correto usar '$\approx$'...

Diagramas de chaves

Nós às vezes vamos usar diagramas com chaves parecidos com o do PDF sobre tipos –

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-tipos.pdf#page=2
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-tipos.pdf#page=5

pra indicar traduções passo a passo ou contas passo a passo. Por exemplo:

$$\underbrace{\underbrace{F(\underbrace{\underbrace{x}_{x_0}+\underbrace{1}_{\Delta x}}_{x_1},\underbrace{\underbrace{y}_{y_0}}_{y_1})}_{z_1} - \underbrace{F(\underbrace{x}_{x_0},\underbrace{y}_{y_0})}_{z_0}}_{\Delta z}$$

Primeiros planos tangentes

Considere a seguinte construção:

$$\begin{array}{rcl} z &=& F(x,y) \\ S &=& \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=F(x,y)\,\} \\ (x_0,y_0) &\in& \mathbb{R}^2 \\ f(\Delta x) &=& F(x_0+\Delta x, y_0) \\ g(\Delta y) &=& F(x_0, y_0+\Delta y) \\ \vec{v} &=& \overrightarrow{(1,0,f'(0))} \\ \vec{w} &=& \overrightarrow{(0,1,g'(0))} \\ r &=& \{\,(x_0,y_0,z_0)+t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\,\} \\ s &=& \{\,(x_0,y_0,z_0)+u\vec{w} \mid u\in\mathbb{R}\,\} \\ \pi &=& \{\,(x_0,y_0,z_0)+t\vec{v}+u\vec{w} \mid t,u\in\mathbb{R}\,\} \end{array}$$

Ela corresponde à figura da página 739 do capítulo 12
do APEX Calculus. Dê uma olhada:
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=62

As retas r e s são retas tangentes à superfície S no ponto (x_0,y_0) e o plano π é o plano que contém as retas r e s. A definição no APEX Calculus usa derivadas parciais, a que eu pus acima não.

Exercício 1.
a) Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& 3+2x+1y \\ A &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\in\{0,1,2,3,4\}\,\} \\ (x_0,y_0) &=& (2,0) \end{array}$$

Visualize todos os objetos da construção à esquerda e desenhe alguns deles usando numerozinhos. Mais precisamente...

...mais precisamente: 1) pra visualizar a superfície S você vai desenhar um numerozinho para cada ponto do conjunto A; 2) pra entender as funções f e g você vai fazer uma tabela com os valores de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$ e depois uma tabela parecida para a função g; 3) pra visualizar as retas r e s você vai desenhar como numerozinhos os pontos de r e s que estão sobre o conjunto A; e 4) pra visualizar π você vai usar o que você já sabe sobre planos pra desenhar o diagrama de numerozinhos que contém os pontos que você desenhos no passo 3.

b) Faça a mesma coisa, mas agora mudando o ponto (x_0,y_0) para $(3,0)$.

c) Faça a mesma coisa, mas agora mudando o ponto (x_0,y_0) para $(3,2)$.

c) Faça a mesma coisa, mas agora para:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) &=& x^2+y^2 \\ A &=& \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\in\{0,1,2,3,4\}\,\} \\ (x_0,y_0) &=& (2,0) \end{array}$$

Nos itens a, b e c a superfície S era um plano. Agora ela passou a ser um parabolóide, e tudo vai passar a ser bem mais complicado.

d) Faça a mesma coisa que no item c, mas agora mudando o ponto (x_0,y_0) para $(3,0)$.

e) Faça a mesma coisa que nos dois últimos itens, mas agora mudando o ponto (x_0,y_0) para $(3,2)$.

Curvas de nível

Dê uma olhada em como o Bortolossi define curvas de nível — ele faz isso nas páginas 97 e 98 do capítulo 3 —
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-3.pdf#page=19
e dê uma olhada nas figuras de curvas de nível ("level curves") das páginas 684 a 687 do APEX Calculus:
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=7

Exercício 2.
Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & y-2 \\ G(x,y) & = & (x-2)+(y-2) \\ H(x,y) & = & F(x,y)\cdot G(x,y) \end{array}$$

a) Faça os diagramas de numerozinhos de $F(x,y)$, $G(x,y)$ e $H(x,y)$. Desenhe numerozinhos nos pontos com $x,y \in \{0,1,2,3,4\}$.

b) Faça uma cópia beeeem grande do seu diagrama pra $H(x,y)$ e tente desenhar sobre ela as curvas de nível de $H(x,y)$ em $z=-1$, $z=0$, $\ldots$, $z=8$. Discuta com os seus colegas e tente descobrir que técnicas você pode usar pra desenhar aproximações razoáveis pra essas curvas na mão e no olhômetro.

Nas próximas aulas nós vamos aprender truques com derivadas que vão nos permitir desenhar aproximações bem boas pra essas curvas de nível fazendo poucas contas. Se você conseguir visualizar bem o truque do plano tangente do próximo exercício você vai conseguir entender bem esses truques com derivadas.

Exercício 3.
Use a construção do exercício 1 pra fazer o diagrama de numerozinhos do plano tangente à superfície $H(x,y)$ em $(x_0,y_0)=3$. Chame esse plano tangente de π. Descubra qual é a interseção desse plano π com o plano $z=z_0=H(x_0,y_0)$. Essa interseção vai ser uma reta; vamos chamá-la de r'. *O vetor diretor dessa reta vai ser tangente à curva de nível* — faça todas as figuras e depois tente entender isto.

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

0	2	4	6	8
-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1
8	6	4	2	0

Retas normais

Na página 741 do capítulo 12 —

http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=64

o APEX Calculus define a "reta normal" ao plano tangente e mostra que ela pode ser calculada por uma fórmula bem curta. Nós vamos usar essa fórmula algumas vezes nas próximas aulas, mas agora é melhor a gente rever como o "produto vetorial", ou "produto cruzado", é "um pedaço da conta do determinante".

Exercício 4.

Faça os exercícios das páginas 47, 48 e 49 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=47

A derivada direcional

O Bortolossi define derivada direcional na p.296 (cap.8)
e o APEX Calculus na página 729 (cap.12)... links:

http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-8.pdf#page=6
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=52

Exercício 5.

O Bortolossi usa esta notação:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t}$$

a) Descubra como traduzir ela – passo a passo! – pra "notação de físicos", com $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{(\alpha, \beta)}$.

b) Faça os exercícios 17, 18 e 19 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf#page=30

Cálculo 3 - 2022.2

Aulas 16 e 19: Derivadas Parciais
e Vetor Gradiente

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Alguns links

Na aula passada nós vimos derivadas parciais, mas sem esse nome:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-plano-tangente.pdf

APEX Calculus: diferenciais (sec.4.4), derivadas parciais (sec.12.3):
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_4.pdf#page=27
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=23

Bortolossi: o cap.5 dele é sobre derivadas parciais:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-5.pdf

O Leithold define a notação $\frac{dy}{dx}\Big]_{x=x_0}$ na p.145 (sec.3.1)
e a seção 4.9 dele (p.269) é sobre a diferencial.

Miranda: a seção 4.7 dele fala sobre diferenciais:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=117

Thomas: a seção 14.3 dele é sobre derivadas parciais:
http://angg.twu.net/2020.2-C3/thomas_secs_14.1_ate_14.7.pdf#page=21

Silvanus Thompson:
o capítulo 9 dele é sobre o truque das variáveis dependentes novas,
e o capítulo 16 dele é sobre derivadas parciais:
https://calculusmadeeasy.org/9.html
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=77
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf#page=12 $\boxed{\leftarrow \text{comece por aqui!}}$
https://calculusmadeeasy.org/16.html
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf#page=13
https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=183

Vídeo do Mathologer sobre o Silvanus Thompson:
http://angg.twu.net/mathologer-calculus-easy.html

Um exemplo

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & (x^3+y^4)^5 \\[6pt]
\frac{\partial z}{\partial x} & = & \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^4)^5 \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^4) \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4(\frac{\partial}{\partial x}x^3+\frac{\partial}{\partial x}y^4) \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4(3x^2) \\[6pt]
\frac{\partial z}{\partial y} & = & \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^4)^5 \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4\frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^4) \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4(\frac{\partial}{\partial y}x^3+\frac{\partial}{\partial y}y^4) \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4(4y^3) \\[6pt]
dz & = & 5(x^3+y^4)^4\,d(x^3+y^4) \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4(dx^3+dy^4) \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4(3x^2\,dx+4y^3\,dy) \\
 & = & 5(x^3+y^4)^4(3x^2\,dx+4y^3\,dy) \\
 & \overset{(*)}{=} & 5(x^3+y^4)^4(3x^2)dx+5(x^3+y^4)^4(4y^3)dy \\[6pt]
dz & = & z_x dx + z_y dy
\end{array}
$$

Exercício 0.

O "exemplo" da página anterior mostra dois jeitos diferentes de calcular as derivadas de z, ambos usando notação de Leibniz... no primeiro jeito eu usei derivadas parciais, que são mais próximas da "notação de matemáticos", e no segundo eu usei diferenciais, que são mais distantes. *Esse "exemplo" é uma desculpa pra você rever o que você sabe sobre cada um desses assuntos.*

Releia os trechos sobre o "truque das variáveis novas", sobre derivadas parciais e sobre diferenciais que eu recomendei na página de links. Os livros têm listas completas das regras que as operações $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ e d obedecem, e se você olhar com atenção você vai ver que cada uma dessas "regras" vem de um teorema que é demonstrado em outro ponto do livro — geralmente antes.

a) Descubra como justificar cada uma das igualdades do "exemplo".

b) Seja $f(x,y) = (x^3 + y^4)^5$. Calcule $\frac{d}{dx} f(x,y)$ e $\frac{d}{dy} f(x,y)$ usando só a "notação de matemáticos".

“Encontrar coeficientes”

A igualdade ‘$\overset{(*)}{=}$’ da página anterior expressa dz como uma combinação linear de dx e dy – o que é um caso particular de um polinômio de grau 1 em dx e dy. Esse truque aparece em zilhões de lugares – por exemplo em séries de Taylor, e no “exercício importantíssimo” daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=48

Exercício 1.
Digamos que $z = (x^3 + y^4)^5$ e $y = x^2$ —
ou seja, $z = (x^3 + (x^2)^4)^5$.

Calcule $\frac{dz}{dx}$ neste caso e veja se você consegue expressar a sua resposta em termos de z_x, z_y e y_x.

Mais sobre o macaco derivador

O vídeo do Mathologer é principalmente sobre a parte da matéria de Cálculo Diferencial em que as contas são "tão simples que dá pra treinar um macaco pra fazê-las".

É muito mais fácil treinar – ou programar – um macaco pra fazer contas de derivada, com ou sem a notação de Leibniz, se a gente não tem variáveis dependentes.

Se a gente tem variáveis dependentes com uma hierarquia entre elas que diz quais variáveis são mais básicas que outras – obs: todos os exemplos do capítulo 9 do "Calculus Made Easy" são assim – aí eu *acho que* ainda sei programar um macaco pra fazer as contas, mas o programa fica bem mais difícil do que no caso em que todas as variáveis são independentes...

Variáveis dependentes são difíceis.

Quando a gente permite derivação implícita eu não sei mais como programar o macaco pra fazer as contas.

Derivação implícita é muito difícil.

Na aula de 7 de outubro eu passei uns exercícios *incrivelmente importantes* sobre um modo de visualizar retas e curvas em $\mathbb{R}^3$ usando numerozinhos... mas poucas pessoas vieram na aula e só umas poucas dessas pessoas participaram, então eu resolvi reescrever direito esses exercícios e pedir pra todo mundo da turma fazer eles...

Aqui tem uma animação de 20 segundos que mostra uma superfície "feita de uns poucos pontinhos flutuando no ar":

`http://angg.twu.net/GNUPLOT/2022oct25_splot_points.mp4`

A animação mostra só uns poucos pontos dela, mas a partir desses pontos a gente consegue imaginar como o resto dessa superfície deve ser.

Exercício 2.

Faça os exercícios da página 5 do PDF de planos tangentes:

`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-plano-tangente.pdf#page=5`
`http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf#page=13`

Dica: o diagrama de numerozinhos à esquerda abaixo "é" uma reta em $\mathbb{R}^3$, e o diagrama de numerozinhos à direita abaixo "é" uma parábola em $\mathbb{R}^3$:

.	.	.	.	.
5	.	.	.	.
.	3	.	.	.
.	.	1	.	.
.	.	.	-1	.

.	2	.	.	.
.	0	.	.	.
.	0	.	.	.
.	2	.	.	.
.	6	.	.	.

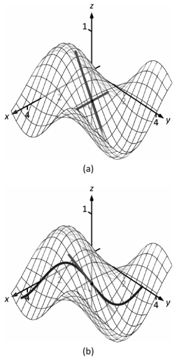


Figure 12.7.2: A surface and directional tangent lines in Example 12.7.1.

Vetores normais

Leia a seção sobre "normal lines" na p.741 do APEX Calculus (no capítulo 12 dele):
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=64

Além das definições do livro nós vamos usar estas aqui. Sejam:

$$\begin{array}{rcl} A & = & (x_0, y_0, z_0) \\ \vec{n} & = & \vec{d_x} \times \vec{d_y} \\ B & = & A + \vec{d_x} \\ C & = & A + \vec{d_y} \\ D & = & A + \vec{n} \\ E & = & A - \vec{n} \end{array}$$

Exercício 3.
a) Digamos que $A = (2, 1, 2)$, $f_x = 2$ e $f_y = 3$. Então podemos representar os pontos A, B e C como numerozinhos desta forma:

$$\begin{array}{ccccc} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 5 & . & . \\ . & . & 2 & 4 & . \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

Represente como numerozinhos os pontos D e E.

Agora cada um dos diagramas de numerozinhos abaixo representa os pontos A, B e C da construção acima, mas você é que vai ter que descobrir quem são x_0, y_0, z_0, f_x, f_y, etc – e desenhar os pontos D e E em cada um dos casos

Desenhe os pontos D e E nos diagramas de numerozinhos abaixo:

b) $\begin{array}{ccccc} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 5 & . & . \\ . & . & 2 & 2 & . \\ . & . & . & . & . \end{array}$ c) $\begin{array}{ccccc} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 4 & . & . \\ . & . & 4 & 2 & . \\ . & . & . & . & . \end{array}$

Exercício 4.

Este exercício é continuação do anterior.

Agora vou passar a usar uma notação mais compacta ainda. Todas as figurinhas abaixo representam diagramas de numerozinhos com $(x_0, y_0) = (3, 3)$, mas desenhados sem os eixos. Para cada uma delas descubra quem são os pontos D e E da figura e desenhe os pontos A, B, C, D e E num diagrama de numerozinhos de verdade.

Às vezes você vai ter que desenhar dois numerozinhos um em cima do outro.

$$
\begin{matrix}
\begin{pmatrix} 0 & \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 & \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 4 & \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & \\ 2 & 4 \end{pmatrix}
\end{matrix}
$$

Exercício 5.

Este exercício é continuação do anterior.

Leia a definição de gradiente na página 731 do
APEX Calculus (no capítulo 12):
http://angg.twu.net/2022.2-C3/APEX_Calculus_Version_4_cap_12.pdf#page=54

Acrescente a seguinte definição às que você usou nos exercícios 3 e 4,

$$G \ = A + \overrightarrow{(f_x, f_y, 0)}$$

e refaça todos os 25 itens do exercício 4 acrescentando o ponto G neles.

Daqui a pouco nós vamos ver qual é a relação desse vetor $\overrightarrow{(f_x, f_y, 0)}$ com o gradiente!...

Gradientes na prova

Cálculo 3 - 2022.2

Aula 22: Funções homogêneas e
derivadas parciais de ordens superiores.

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Links

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-funcoes-homogeneas.pdf#page=2

Nessa aula eu escrevi muuuuitas coisas no quadro, e ainda não tive tempo de digitá-las. Você pode acessar os quadros dessa aula aqui:

http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf#page=17

Cálculo 3 - 2022.2

Aula 23: Regra da cadeia

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Links:

Capítulo 7 do Bortolossi:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-7.pdf

PDF de 2021.1 sobre a matriz jacobiana:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-matriz-jacobiana.pdf

Mini-teste 2 de 2021.1 (sobre números complexos):
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-MT2.pdf#page=1

Cálculo 3 - 2022.2

Dicas pra P1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Primeira dica:
A P1 vai ter uma questão que vai valer muitos pontos que vai ser parecida com a questão 1 da VSB do semestre passado. Links:

http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-VSB.pdf#page=2
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C3-tudo.pdf#page=70
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-derivadas-parciais.pdf#page=2
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-tudo.pdf#page=63
http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf

Segunda dica:
A P1 vai ter uma questão de desenhar curvas de nível e vetores gradientes. Você pode treinar pra ela fazendo o Exercício 1 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-gradiente.pdf#page=3
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-tudo.pdf#page=177

Mais dicas em breve!

Cálculo 3 - 2022.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	3	2	2	2	2	2
3	3	3	3	2	1	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Questão 1

(Total: 6.0 pts)
O diagrama de numerozinhos da folha anterior corresponde a uma superfície $z = F(x,y)$ que tem 5 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 6 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 5 faces é que é a correta.

a) **(1.0 pts)** Mostre como dividir o plano em 5 polígonos que são as projeções destas faces.

b) **(1.0 pts)** Chame estas faces de face N ("norte"), S ("sul"), W ("oeste"), C ("centro"), E ("leste"), e chame as equações dos planos delas de $F_N(x,y)$, $F_S(x,y)$, $F_W(x,y)$, $F_C(x,y)$, e $F_E(x,y)$. Dê as equações destes planos.

c) **(1.0 pts)** Sejam:

$$\begin{array}{rcl} P_C &=& \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_C(x,y)\,\}, \\ P_E &=& \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_E(x,y)\,\}, \\ r &=& P_C \cap P_E. \end{array}$$

Represente a reta r graficamente como numerozinhos.

d) **(0.5 pts)** Dê uma parametrização para a reta do item anterior. Use notação de conjuntos.

e) **(1.0 pts)** Seja

$$A = \{0,1,\ldots,9\} \times \{0,1,\ldots,10\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A. Para cada ponto $(x,y) \in A$ represente graficamente $(x,y) + \frac{1}{3}\vec{\nabla}F(x,y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla}F(x,y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x,y), e quando $\vec{\nabla}F(x,y)$ não existir faça um '$\times$' sobre o numerozinho que está no ponto (x,y).

f) **(1.5 pts)** Sejam

$$\begin{array}{rcl} Q(t) &=& (0,4) + t\overrightarrow{(1,1)}, \\ (x(t),y(t)) &=& Q(t), \\ h(t) &=& F(x(t),y(t)). \end{array}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0,6]$.

Questão 2

(Total: 4.5 pts)
Seja

$$F(x,y) = 2x^2 - xy - y^2.$$

Nesta questão você vai ter que fazer várias cópias do diagrama de numerozinhos da função $F(x,y)$ para os pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Os numerozinhos vão ser estes aqui:

$$\begin{array}{rrrrr} 8 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 9 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 8 \end{array}$$

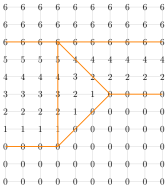
a) **(1.0 pts)** Desenhe o "campo gradiente" da função F nestes pontos, mas multiplicando cada $\vec{\nabla}F(x,y)$ por $\frac{1}{10}$ pros vetores não ficarem uns em cima dos outros. Deixa eu traduzir isso pra termos mais básicos: faça uma cópia do diagrama de numerozinhos da $F(x,y)$, e sobre cada (x,y) com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ desenhe a seta $(x,y) + \frac{1}{10}\vec{\nabla}F(x,y)$.

b) **(3.5 pts)** Faça uma outra cópia desse diagrama de numerozinhos e desenhe sobre ela as curvas de nível da função $F(x,y)$ para $z = 0$, $z = 2$, $z = 5$, $z = -1$ e $z = -2$.

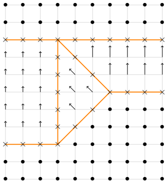
Dicas:
1) O vetor gradiente num ponto (x,y) é sempre ortogonal à curva de nível que passa pelo ponto (x,y).
2) Faça quantos rascunhos quiser. Eu só vou corrigir seus desenhos pros itens (a) e (b) que disserem "versão final", e eles têm que ser os mais caprichados possíveis.

Questão 1: gabarito

a)



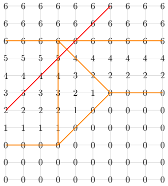
e)



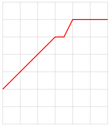
b)

$$\begin{array}{rcl} F_N(x,y) & = & 6 \\ F_W(x,y) & = & -2+y \\ F_C(x,y) & = & 1-x+y \\ F_E(x,y) & = & -10+2y \\ F_S(x,y) & = & 0 \end{array}$$

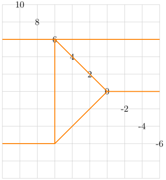
f)



$\Rightarrow$

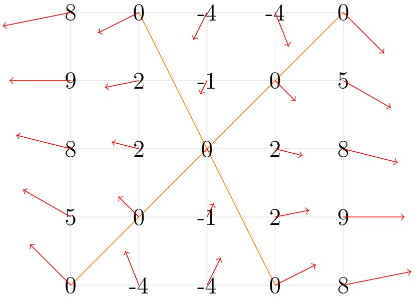


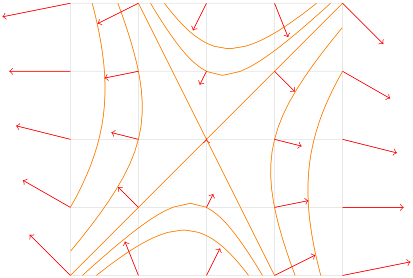
c)



d) $\{\, (6,5,0) + t\overrightarrow{(-1,1,2)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$

Questão 2: gabarito





Cálculo 3 - 2022.2

Aulas 25 e 26: abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Links

Capítulo 4 do Bortolossi:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-4.pdf

Como debugar representações gráficas:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-infs-e-sups.pdf#page=10

Abertos, fechados e compactos na Wikipedia:
https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space
https://en.wikipedia.org/wiki/General_topology
https://en.wikipedia.org/wiki/Topology

Este PDF é baseado neste outro mais antigo:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-abertos-e-fechados.pdf

Introdução
Dê uma olhada no capítulo 4 do Bortolossi...
Comece pela seção 4.1, "Por que funções contínuas são importantes", depois leia a seção 4.3, sobre o Teorema de Weirstrass em n variáveis, e relembre a definição de distância euclidiana na p.139.

Nós vamos começar entendendo as definições das páginas 142 até 148, e vamos reescrevê-las de um jeito bem mais curto.

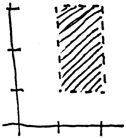
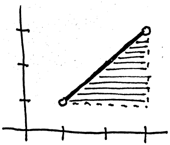
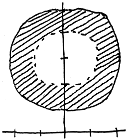
Nós vamos ver como fazer hipóteses sobre os exercícios dos próximos dois slides, como testar essas hipóteses, e como descartar as hipóteses erradas.

Nove subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

(Compare com a p.130 do Bortolossi...)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
C_1 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\leq 3\,\},\\
C_2 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2<y\leq 3 \ \text{ e } \ 1\leq x<4\,\},\\
C_3 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\leq 2\,\},\\
C_4 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<d((x,y),(1,2))\leq 2\,\},\\
C_5 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(1,2))\leq 2 \ \text{ e } \ 1<x\,\},\\
C_6 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x\,\},
\end{array}
$$

$C_7 =$  , $C_8 =$  , $C_9 =$  .

Exercício 1.
Represente graficamente os conjuntos $C_1, \ldots, C_6$.

Exercício 2.
Represente os conjuntos C_7, C_8, C_9
em “notação de conjuntos” — isto é,
na forma $\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ldots \}$.

Bolas abertas e fechadas

Se P é um ponto de $\mathbb{R}^n$ então a *bola fechada de raio ε em torno de P*, $\overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P)$, e a *bola aberta de raio ε em torno de P*, $\mathsf{B}_\varepsilon(P)$, são definidas assim:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) \leq \varepsilon \,\} \\ \mathsf{B}_\varepsilon(P) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \varepsilon \,\} \end{array}$$

Por exemplo, se $P = 6 \in \mathbb{R}^1$ então:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\mathsf{B}}_2(6) & = & \{\, Q \in \mathbb{R}^1 \mid d(6,Q) \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid d(6,x) \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(6-x)^2} \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-6| \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x-6 \leq 2 \,\} \\ & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid -2+6 \leq x \leq 2+6 \,\} \\ & = & [4,8] \end{array}$$

Exercício 3.
Represente graficamente:

a) $\overline{\mathsf{B}}_1((2,2))$,
b) $\mathsf{B}_1((2,2))$.

Dica: estes conjuntos vão parecer muito mais com "bolas de verdade" do que o conjunto $\overline{\mathsf{B}}_2(6)$ do slide anterior.

Lembre que a gente desenha a fronteira de um conjunto tracejada quando a gente quer indicar que os pontos da fronteira não pertencem ao conjunto e a gente desenha ela sólida quando quer indicar que os pontos dela pertencem ao conjunto. Veja os desenhos dos conjuntos C_8 e C_9.

Exercício 4.
Aqui você vai ter que ser capaz de visualizar bolas sobrepostas a conjuntos que você já desenhou sem desenhar estas bolas. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\mathsf{B}_{0.1}((0,2.5)) \subseteq C_1$
b) $\mathsf{B}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
c) $\overline{\mathsf{B}}_{0.5}((0,2.5)) \subseteq C_1$
d) $\mathsf{B}_{0.1}((1,3)) \subseteq C_2$
e) $\mathsf{B}_{0.1}((2.5,2.5)) \subseteq C_2$
f) $\mathsf{B}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
g) $\overline{\mathsf{B}}_{1}((2,2)) \subseteq C_3$
h) $\mathsf{B}_{0.5}((1,0.5)) \subseteq C_4$
i) $\mathsf{B}_{0.1}((0.5,2)) \subseteq C_5$
j) $\mathsf{B}_{0.001}((1.1,1.01)) \subseteq C_8$

O interior de um conjunto (e conjuntos abertos)

Def: o *interior* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int}(A)$,
é definido como:

$$\mathrm{Int}(A) \;\; = \;\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Note que isto sempre é verdade: $\mathrm{Int}(A) \subset A$.
Dizemos que um conjunto A é *aberto* quando $A \subset \mathrm{Int}(A)$.

Infinitas operações / seja com o Bob

Pra entender a definição de interior e as próximas você vai precisar fazer um número infinito de operações pra chegar no resultado, e pra isso você vai ter que usar algumas técnicas que nós vimos em Cálculo 2 no semestre passado. Os links abaixo vão pras versões deste semestre do material sobre essas técnicas, que ficou bem melhor do que o do semestre passado.

Veja este PDF, a partir da página 11 dele:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-somas-de-riemann.pdf`

e relembre as definições de inf e sup daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C2-TFC1-e-TFC2.pdf`

Exercício 5.
Seja $A = [2,4] \subset \mathbb{R}^1$.
Verifique que A não é aberto usando a definição do slide anterior.
Dica: como $A = [2,4]$,

$$\begin{array}{crcl} & A & \text{não é aberto} & \\ \Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \mathrm{Int}(A) \\ \Leftrightarrow & A & \not\subseteq & \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\} \\ \Leftrightarrow & [2,4] & \not\subseteq & \{\, P \in [2,4] \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq [2,4] \,\} \end{array}$$

Tente continuar você mesmo usando ou matematiquês ou português. Você talvez vá precisar de truques que as pessoas costumam aprender nos primeiros semestres mas acabaram não aprendendo dessa vez por causa da pandemia...

Exercício 6.

Represente graficamente:

a) $\mathrm{Int}(C_8)$,
b) $\mathrm{Int}(C_4)$,
c) $\mathrm{Int}(C_5)$,
d) $\mathrm{Int}(\mathsf{B}_1((2,2)))$.

O fecho de um conjunto (e conjuntos fechados)
Def: o *fecho* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{A}$,
é definido como:

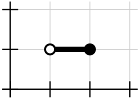
$$\overline{A} \;\; = \;\; \{\, P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset \,\}$$

Compare com a definição do interior:

$$\mathrm{Int}(A) \;\; = \;\; \{\, P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\, \mathsf{B}_\varepsilon(P) \subseteq A \,\}.$$

Isto aqui sempre é verdade: $A \subset \overline{A}$.
Quando $\overline{A} \subset A$ dizemos que A é um conjunto *fechado*.

Exercício 7.
Digamos que:

$D_1 \quad =$ 

Represente graficamente:
a) $\overline{C_8}$
b) $\overline{D_1}$
c) $\mathrm{Int}(D_1)$

Um aviso sobre a P2 (de 2021.2)

Em quase todos os problemas deste PDF é muito mais fácil mostrar que uma resposta está errada do que mostrar que ela está certa... e o método pra mostrar que uma resposta está errada vai ser um dos assuntos principais da P2.

Algumas traduções

$$\begin{array}{rcl}
A \subset B & = & \forall a \in A. a \in B \\
A = B & = & (A \subset B) \land (B \subset A) \\
\neg(P \land Q) & = & \neg P \lor \neg Q \\
\neg(P \lor Q) & = & \neg P \land \neg Q \\
\neg(\forall a \in A. P(a)) & = & \exists a \in A. \neg P(a) \\
\neg(\exists a \in A. P(a)) & = & \forall a \in A. \neg P(a) \\
x \in \{\, a \in A \mid P(a) \,\} & = & x \in A \land P(x) \\
\neg(P \to Q) & = & P \land \neg Q \\
[20, 42) & = & \{\, x \in \mathbb{R} \mid 20 \leq x < 42 \,\} \\
20 \leq x < 42 & = & 20 \leq x \land x < 42
\end{array}$$

Lembra que '$\land$' é "e", '$\lor$' é "ou", '$\neg$' é "não", '$\to$' é "implica".

Alguns exemplos de traduções

$$
\begin{array}{rl}
& [a,b] \subset [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].x \in [20,42) \\
= & \forall x \in [a,b].20 \le x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.x \in [a,b] \to 20 \le x < 42 \\
= & \forall x \in \mathbb{R}.a \le x \le b \to 20 \le x < 42
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
& \neg([a,b] \subset [20,42)) \\
= & \neg(\forall x \in \mathbb{R}.a \le x \le b \to 20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \le b \to 20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \le b) \land (20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.\neg(a \le x \land x \le b) \land (20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(\neg(a \le x) \lor \neg(x \le b)) \land (20 \le x < 42) \\
= & \exists x \in \mathbb{R}.(x < a \lor b < x) \land (20 \le x < 42)
\end{array}
$$

Imagem inversa

Algumas das igualdades abaixo são definições, as outras são exemplos.

$$
\begin{array}{rcl}
H(x,y) &=& xy \\
H_I &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) \in I \,\} \\
H_{[a,b]} &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) \in [a,b] \,\} \\
H_{[0,1]} &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) \in [0,1] \,\} \\
H^{-1}(a) &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) = a \,\} \\
H^{-1}(I) &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) \in I \,\} \\
H^{-1}([0,1]) &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid H(x,y) \in [0,1] \,\} \\
&=& H_{[0,1]}
\end{array}
$$

Exercício 8.
Represente graficamente:

$$
\begin{array}{rcl}
C_1 &=& H^{-1}(0) \\
C_2 &=& H^{-1}(1) \\
C_3 &=& H^{-1}([0,1]) \\
C_4 &=& H^{-1}((0,1)) \\
C_5 &=& \mathrm{Int}(C_3) \\
C_6 &=& \overline{C_4} \\
C_7 &=& H^{-1}(4) \\
C_8 &=& H^{-1}([0,4]) \\
C_9 &=& \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \text{ e } 1 \le y \,\} \\
C_{10} &=& C_8 \cap C_9
\end{array}
$$

Conjuntos limitados e compactos
Um conjunto $C \in \mathbb{R}^2$ é *limitado* quando ele obedece isto:

$$\exists r \in \mathbb{R}.\, C \subset B_r((0,0))$$

.
Um conjunto $C \in \mathbb{R}^2$ é *compacto* quando ele é fechado e limitado.

Exercício 9.
Preencha a tabela abaixo com '**V**'s e '**F**'s.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_{10}
é aberto									
é fechado									
é limitado									
é compacto									

Máximos numa elipse

Dê uma olhada nas figuras das páginas 355 e 356 do Bortolossi, no capítulo 10 dele:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=5
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=6
Ele usa:

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & x^2+y^2 \\ g(x,y) & = & \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \\ D_2 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)\le 1\,\} \\ D_3 & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=1\,\} \end{array}$$

D_2 é uma elipse "cheia" incluindo o interior dela, e
D_3 é só a fronteira de D_2.
Note que $(-2,0),(2,0),(0,3),(0,-3)\in D_3$.

Exercício 10.
a) Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$.

b) Na página 354 o Bortolossi desenha curvas de nível dentro de um quadrado. Desenhe algumas curvas de nível de $f(x,y)$ dentro da "elipse cheia" D_2.

c) Tente descobrir *no olhômetro* quais são os máximos e mínimos de $f(x,y)$ em D_2. Dica: o Bortolossi leva várias páginas fazendo isso — leia o texto dele!

Dica: o objetivo do item (c) é você aprender a resolver só com curvas de nível as idéias que o Bortolossi apresenta usando figuras em 3D. Se você não conseguir fazer a tradução das figuras 3D pra curvas de nível direto você pode começar desenhando "cortes" sobre as figuras 3D, como na questão do mini-teste 1 de 2020.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-tudo.pdf#page=83

...e repare que quando o Bortolossi chega no capítulo 12 ele passa a usar quase só curvas de nível e gradientes — ele praticamente abandona as figuras 3D:
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-12.pdf

Cálculo 3 - 2022.2

Aula 27: Máximos e mínimos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Introdução

Quando a gente aprende polinômios a gente aprende uma matéria chamada "estudo do sinal de uma função", em que a gente aprende a marcar em $\mathbb{R}$ em que regiões as funções que nos interessam são positivas, negativas, ou 0... algo como isso aqui, mas desenhado de outro jeito:

$$\begin{array}{rccccc}
 & (-\infty,2) & 2 & (2,5) & 5 & (5,+\infty) \\
g(x)=x-2 & <0 & =0 & >0 & >0 & >0 \\
h(x)=x-5 & <0 & <0 & <0 & =0 & >0 \\
f(x)=(x-2)(x-5) & >0 & =0 & <0 & =0 & >0
\end{array}$$

Depois a gente aprende derivada e segunda derivada, e aí a gente estende essa idéia pra representar também as regiões em que derivada é positiva, negativa, ou 0, e as regiões em que a segunda derivada é positiva, negativa, ou 0, e a gente usa isso pra descobrir onde a função é crescente ou decrescente, onde a concavidade dela está pra baixo ou pra cima, e onde ela tem máximos e mínimos locais e máximos e mínimos globais. Dê uma olhada nas figuras das seções 5.1 até 5.4 do Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=122

Repare que o Miranda chama esse assunto de "extremos relativos" e "extremos absolutos"; o Bortolossi vai estender essas idéias pra mais dimensões nos capítulos 10, 11 e 12 dele, e ele vai usar outra terminologia: "máximos locais" e "máximos globais".

Estudo de sinal em $\mathbb{R}^2$ por numerozinhos

Se você achar a abordagem de hoje muito complicada *comece* pela de 2021... assista estes dois vídeos,

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=2noSv8hyNIk

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=noVh-RsK5Jo

e faça os exercícios das páginas 8 até 13 daqui:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C3-diag-nums.pdf#page=8

Importante: nas aulas sobre máximos e mínimos eu escrevi muitas coisas no quadro que eu ainda não tive tempo de digitar. Você pode acessar os quadros destas aulas aqui:

http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf#page=26

Um truque com derivadas direcionais

Vou começar supondo que

$$\begin{array}{rcl} z & = & a \\ & + & bx + cy \\ & + & dx^2 + exy + fy^2 \end{array}$$

e que o ponto que nos interessa é $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Depois que nós tivermos entendido bem as contas no ponto $(0, 0)$ a gente vai ver como refazê-las numa versão um pouco mais geral, em que (x_0, y_0) é um ponto qualquer.

Queremos generalizar as definições de mínimo local e máximo local do Miranda, que estão aqui,
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=124
pra $\mathbb{R}^2$. Vou usar um truque com derivadas direcionais.

Vou dizer que o ponto $(0, 0)$ é um mínimo local "na direção $\overrightarrow{(\alpha, \beta)}$" se a função $z(t) = z(x(t), y(t)) = z(\alpha t, \beta t)$ tem um mínimo local em $t = 0$, e vou dizer que a função z tem um mínimo local em $(0, 0)$ se o ponto $(0, 0)$ é um mínimo local "em todas as direções" — exceto pela "direção" $\overrightarrow{(\alpha, \beta)} = \overrightarrow{(0, 0)}$, que a gente considera que "não é uma direção válida", e "não interessa".

Se isto aqui for verdade,

$$\begin{array}{l} \forall \overrightarrow{(\alpha, \beta)} \neq \overrightarrow{(0, 0)}. \\ \frac{d}{dt}(z(\alpha t, \beta t)) = 0 \text{ e} \\ \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(z(\alpha t, \beta t)) > 0 \end{array}$$

então o ponto $(0, 0)$ vai ser um mínimo local da função $z(x, y)$. Repare que lá no início eu defini que z era um polinômio de grau 2 em x e y;

Versão mega-rápida das páginas 365–394 do Bortolossi

Links:
http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-funcoes-homogeneas.pdf
http://angg.twu.net/2022.2-C3/C3-quadros.pdf#page=17
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf

Digamos que $r_1, r_2, r, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$,
$\alpha, \beta > 0$, e $r_3 = x + \beta i$, $r_4 = x - \beta i$, e:

$$\begin{array}{rcl} z(x,y) &=& dx^2 + exy + fy^2, \\ h(x) &=& z(x,1). \end{array}$$

Então:

se	$h(x) = (x - r_1)(x - r_2)$	então $(0,0)$ é um ponto de sela,
se	$h(x) = \alpha(x - r_1)(x - r_2)$	então $(0,0)$ é um ponto de sela,
se	$h(x) = -\alpha(x - r_1)(x - r_2)$	então $(0,0)$ é um ponto de sela,
se	$h(x) = (x - r)^2$	então $(0,0)$ é como a figura da p.388,
se	$h(x) = \alpha(x - r)^2$	então $(0,0)$ é como a figura da p.388,
se	$h(x) = -\alpha(x - r)^2$	então $(0,0)$ é como a figura da p.388,
se	$h(x) = (x - r_3)(x - r_4)$	então $(0,0)$ “tem concavidade pra cima”,
se	$h(x) = \alpha(x - r_3)(x - r_4)$	então $(0,0)$ “tem concavidade pra cima”,
se	$h(x) = -\alpha(x - r_3)(x - r_4)$	então $(0,0)$ “tem concavidade pra baixo”.

Exercício

Digamos que

$$\begin{array}{rcl} z(x,y) & = & dx^2 + exy + fy^2, \\ h(x) & = & z(x,1). \end{array}$$

Para cada uma das funções $h(x)$ abaixo diga qual é a função $z(x,y)$ associada a ela e faça o diagrama de sinais dessa função $z(x,y)$.

a) $h(x) = (x-1)(x+2)$
b) $h(x) = 2(x-1)(x+2)$
c) $h(x) = -3(x-1)(x+2)$
d) $h(x) = (x-1)^2$
e) $h(x) = 2(x-1)^2$
f) $h(x) = -3(x-1)^2$
g) $h(x) = (x-(2+i))(x-(2-i))$
h) $h(x) = 2(x-(2+i))(x-(2-i))$
i) $h(x) = -3(x-(2+i))(x-(2-i))$

Cálculo 3 - 2022.2

Dicas pra P2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Assuntos da prova

As principais questões da P2 vão ser sobre estes itens do programa do curso:

2.3. Noções de conjuntos abertos e fechados no $\mathbb{R}^n$.
2.4. Limite e continuidade. Definição e propriedades.
3.1. Derivadas parciais.
3.7. Derivadas parciais de ordens superiores.
3.8. Fórmula de Taylor.
4. Máximos e mínimos.
4.1. Extremos relativos. Condição necessária para a existência de extremos relativos.
4.2. Ponto crítico. Teste da derivada segunda.
4.3. Máximos e mínimos sobre um compacto.

As questões vão ser principalmente sobre os itens 4, 4.1, 4.2 e 4.3, mas você vai precisar dos itens 2.3, 2.4, 3.1, 3.7 e 3.8 pra fazer algumas partes delas.

Como estudar em casa

Comecem entendendo os conceitos dos itens 4, 4.1, 4.2 e 4.3. O Bortolossi tem boas explicações pra eles nos capítulos 10, 11 e 12:

http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-11.pdf
http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-12.pdf

Comece lendo as partes mais legíveis desses capítulos e entendendo as figuras. Depois tente entender os enunciados dos exercícios.

Nas próximas aulas nós vamos fazer muitos exercícios que são versões "desmontadas" de exercícios do Bortolossi. Por exemplo, os exercícios 1 a 4 daqui

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-topologia.pdf#page=4

são parecidos com passos do exercício 8 da página 359 do Bortolossi:

http://angg.twu.net/2019.2-C3/Bortolossi/bortolossi-cap-10.pdf#page=9

Abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$

Certifique-se de que você sabe fazer
os exercícios 1–4 e 6–10 daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-topologia.pdf`

O exercício 5 não é importante e neste semestre eu pedi pras pessoas pularem ele.

A prova provavelmente vai ter uma questão parecida com o exercício 10 que vai valer muitos pontos.

Máximos, mínimos e funções homogêneas
A P2 vai ter uma questão bem grande sobre máximos e mínimos, funções quadráticas, funções homogêneas e diagramas de sinais.

Certifique-se de que você sabe fazer o exercício
da página 6 daqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-maximos-e-minimos.pdf#page=6`

"Notação de físicos"

A prova vai ter uma questão na qual você vai ter que calcular algumas derivadas usando "notação de físicos". Eu vou incluir uma cópia desta página na prova pra vocês usarem ela como uma referência,

http://angg.twu.net/LATEX/2022-2-C3-derivadas-parciais.pdf#page=3

e na correção eu vou ver se vocês sabem usar direito cada um dos truques que aparecem nessa página.

O melhor modo de estudar pra essa questão é refazendo os exercícios das páginas 4 e 5 desse PDF. Pra fazê-los você vai ter que consultar vários dos links da página de links desse PDF (página 2).

Cálculo 3 - 2022.2

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Questão 1

(Total: 3.5 pts)

Sejam:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= x^2+y^2, \\ H(x,y) &= xy, \\ E(x,y) &= x^2+4y^2. \end{aligned}$$

Represente graficamente:
a) **(0.1 pts)** o diagrama de numerozinhos de $P(x,y)$,
b) **(0.2 pts)** o digrama de numerozinhos de $H(x,y)$,
c) **(0.2 pts)** o diagrama de numerozinhos de $E(x,y)$,
d) **(0.1 pts)** pelo menos 5 curvas de nível de $P(x,y)$,
e) **(0.2 pts)** pelo menos 5 curvas de nível de $H(x,y)$,
f) **(0.2 pts)** pelo menos 5 curvas de nível de $E(x,y)$,

E os conjuntos abaixo:
g) **(0.2 pts)** $C_1 = E^{-1}(4)$
h) **(0.2 pts)** $C_2 = E^{-1}(1)$
i) **(0.3 pts)** $C_3 = E^{-1}([1,4))$
j) **(0.3 pts)** $C_4 = H^{-1}([-2,1))$
k) **(0.5 pts)** $C_5 = C_3 \cap C_4$
l) **(0.5 pts)** $C_6 = \mathrm{Int}(C_5)$
m) **(0.5 pts)** $C_7 = \overline{C_5}$

Use os grids da página 4.
Indique claramente qual desenho é a resposta de cada item e quais desenhos são rascunhos.

Questão 2

(Total: 2.5 pts)

Sejam:

$$\begin{aligned} z &= (x-x_0)^4(y-y_0)^6, \\ \alpha &= x+y, \\ \beta &= x-y, \\ w &= (\alpha^3-\alpha)+\beta^2. \end{aligned}$$

Nesta questão eu vou ver principalmente quais dos truques da “notação de físicos” você sabe usar direito.

A página 5 tem um monte de dicas de “notação de físicos” que você pode usar como referência. A coluna da esquerda dessa página tem um exemplo grande que nós vimos em aula; a parte de cima da coluna da direita tem uma tabela que eu copiei da página 275 do Leithold, na qual ele mostra como reescrever certas regras de derivação usando diferenciais; e a parte de baixo da coluna da direita é uma versão adaptada do primeiro exemplo do capítulo XVI do Silvanus Thompson, em que ele mostra como fazer contas ficarem menores criando variáveis dependentes novas.

Calcule:
a) **(0.2 pts)** $\frac{dz}{dx}$,
b) **(0.3 pts)** z_{xx},
c) **(0.5 pts)** dz,
d) **(1.5 pts)** dw.

No item c tente chegar até uma expressão da forma $z_x dx + z_y dy$, e no item d tente chegar até uma expressão da forma forma $w_x dx + w_y dy$.

Questão 3

(Total: 3.0 pts)

Sejam

$$\begin{array}{rcl} z(x,y) & = & dx^2 + exy + fy^2, \\ h(x) & = & z(x,1). \end{array}$$

Vou dizer que a função $h(x,y)$ é a "função homogênea de grau 2 associada a $h(x)$".

a) **(1.5 pts)** Digamos que

$$h(x) = -2(x-1)(x+1).$$

Faça o diagrama de sinais da $h(x)$ (em $\mathbb{R}$), os numerozinhos da função $z(x,y)$ nos pontos com $y=1$ e $x \in \{-2,-1,0,1,2\}$ (siiiim, só 5 pontos!) e o diagrama de sinais da função $z(x,y)$ (em $\mathbb{R}^2$), e diga se o ponto $(0,0)$ é um mínimo, máximo, ponto de sela, etc, etc.

b) **(1.5 pts)** Agora digamos que

$$h(x) = (x-i)(x+i) = x^2 + 1.$$

Faça as mesmas coisas para esta função $h(x)$ e para a função $z(x,y)$ associada a ela.

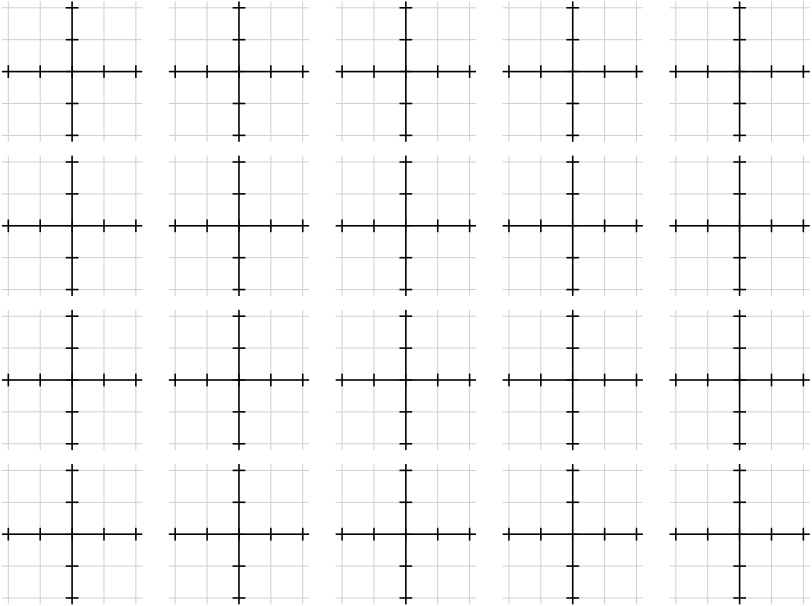
Questão 4

(Total: 3.0 pts)

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} H(x,y) & = & xy, \\ E(x,y) & = & x^2 + 4y^2, \\ D & = & E^{-1}([0,16]), \\ F & : & D \to \mathbb{R} \\ & & (x,y) \mapsto H(x,y) \end{array}$$

Agora só queremos olhar pro que acontece dentro do "domínio" D, que é uma elipse; note que a função $F(x,y)$ só está definida em D.
Faça pelo menos 5 curvas de nível de $z = F(x,y)$ (obs: só dentro da elipse!!!) e mostre no seu gráfico quais dos pontos de D são máximos locais, mínimos locais ou pontos de sela.



$$\begin{aligned}
z &= (x^3+y^4)^5 \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^4)^5 \\
&= 5(x^3+y^4)^4 \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4 (\frac{\partial}{\partial x}x^3 + \frac{\partial}{\partial x}y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4 (3x^2) \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^4)^5 \\
&= 5(x^3+y^4)^4 \frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4 (\frac{\partial}{\partial y}x^3 + \frac{\partial}{\partial y}y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4 (4y^3) \\
dz &= 5(x^3+y^4)^4\, d(x^3+y^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4 (dx^3 + dy^4) \\
&= 5(x^3+y^4)^4 (3x^2\,dx + 4y^3\,dy) \\
&= 5(x^3+y^4)^4 (3x^2)dx + 5(x^3+y^4)^4(4y^3)dy \\
dz &= z_x dx + z_y dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(c)}{dx} &= 0 \\
\frac{d(x^n)}{dx} &= nx^{n-1} \\
\frac{d(cu)}{dx} &= c\frac{du}{dx} \\
\frac{d(u+v)}{dx} &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \\
\frac{d(uv)}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\
\frac{d(\frac{u}{v})}{dx} &= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \\
\frac{d(u^n)}{dx} &= nu^{n-1}\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(c) &= 0 \\
d(x^n) &= nx^{n-1}dx \\
d(cu) &= c\,du \\
d(u+v) &= du + dv \\
d(uv) &= u\,dv + v\,du \\
d(\frac{u}{v}) &= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \\
d(u^n) &= nu^{n-1}du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= (x^2+a^2)^{3/2} \\
u &= x^2+a^2 \\
du &= 2x\,dx \\
dy &= d((x^2+a^2)^{3/2}) \\
&= d(u^{3/2}) \\
&= u^{1/2}\,du \\
&= u^{1/2}\cdot 2x\,dx \\
&= (x^2+a^2)^{1/2}\cdot 2x\,dx
\end{aligned}$$

Questão 2: gabarito

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Temos:} & z & = & (x-x_0)^4(y-y_0)^6 \\
\text{Sejam:} & u & = & x-x_0, \\
 & v & = & y-y_0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Então:} & z & = & u^4v^6, \\
 & \frac{dz}{dx} & = & \frac{d}{dx}(u^4)v^6 + u^4\frac{d}{dx}(v^6) \\
 & & = & (4u^3\frac{d}{dx}u)v^6 + u^4(6v^5\frac{d}{dx}v) \\
 & & = & (4u^3\frac{d}{dx}(x-x_0))v^6 + u^4(6v^5\frac{d}{dx}(y-y_0)) \\
 & & = & 4u^3v^6 \\
 & & = & 4(x-x_0)^3(y-y_0)^6,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
z_{xx} & = & \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z \\
 & = & \frac{d}{dx}(4u^3v^6) \\
 & = & 4(\frac{d}{dx}(u^3)v^6 + u^3\frac{d}{dx}(v^6)) \\
 & = & 4(\frac{d}{dx}(u^3)v^6) \\
 & = & 4(3u^2\frac{d}{dx}(u)v^6) \\
 & = & 4(3u^2v^6) \\
 & = & 12u^2v^6 \\
 & = & 12(x-x_0)^2(y-y_0)^6,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
dz & = & d(u^4v^6) \\
 & = & d(u^4)v^6 + u^4d(v^6) \\
 & = & (4u^3du)v^6 + u^4(6v^5dv) \\
 & = & (4u^3v^6)dx + (6u^4v^5)dy \\
 & = & 4(x-x_0)^3(y-y_0)^6dx + 6(x-x_0)^4(y-y_0)^5dy
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Temos:} & \alpha & = & x+y, \\
 & \beta & = & x-y, \\
 & w & = & (\alpha^3-\alpha)+\beta^2.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Então:} & dw & = & d(\alpha^3+\alpha)+d(\beta^2) \\
 & & = & (2\alpha+1)d\alpha + 2\beta d\beta \\
 & & = & (2\alpha+1)d(x+y) + 2\beta d(x-y) \\
 & & = & (2\alpha+1)(dx+dy) + 2\beta(dx-dy) \\
 & & = & (2\alpha+1+2\beta)dx + (2\alpha+1-2\beta)dy \\
 & & = & (2(x+y)+1+2(x-y))dx \\
 & & + & (2(x+y)+1-2(x-y))dy \\
 & & = & (4x+1)dx + (4y+1)dx
\end{array}$$

Cálculo 3 - 2022.2

Prova de reposição (VR)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.2-C3.html

Questão 1.

(Total: 10.0 pts)

Lembre que "∂C" é "a fronteira do conjunto C" e que se F é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ então F^{-1} é a "imagem inversa de F", que é definida de um jeito quando o argumento é um número e de outro jeito quando o argumento é um conjunto. Se $a \in \mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{R}$, então:

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(a) & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = a \,\} \\ F^{-1}(C) & = & \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) \in C \,\} \end{array}$$

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & x^2 + y^2, \\ G(x,y) & = & xy, \\ C_1 & = & F^{-1}(4) \\ C_2 & = & F^{-1}([-1,4]) \\ C_3 & = & G^{-1}(1) \\ C_4 & = & G^{-1}([-1,1]) \\ C_5 & = & C_2 \cap C_4 \\ C_6 & = & \partial(C_5) \\ D & = & C_5 \\ (x_0, x_1) & = & (1,0) \\ H(x,y) & = & (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 \\ M & : & \begin{array}{rcl} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & H(x,y) \end{array} \end{array}$$

a) **(1.0 pts)** Desenhe a região D.

b) **(1.0 pts)** Dê as coordenadas aproximadas dos "bicos" de ∂D.

c) **(1.0 pts)** Desenhe as curvas de nível da função M.

d) **(1.0 pts)** Diga quais são os mínimos locais, máximos locais e pontos de sela da função M.

e) **(1.0 pts)** Chame os pontos do item (d) de $P_1, P_2, \ldots, P_N$ e dê as coordenadas aproximadas de cada um deles. Repare que eu não estou dizendo quem é N — você vai ter que descobrir.

f) **(1.0 pts)** Para cada um dos pontos $P_i = (x_i, y_i)$ do item anterior calcule $\nabla H(x_i, y_i)$ e represente graficamente $(x_i, y_i) + \nabla H(x_i, y_i)$.

Pra conseguir fazer os itens acima você vai ter que fazer um monte de "passos intermediários" — como desenhar alguns conjuntos, diagramas de numerozinhos e curvas de nível. Eu não vou dizer quais são esses passos intermediários — você vai ter que descobrir quais eles são, e escrever cada um deles de um jeito legível.

g) **(4.0 pts)** Descubra quais são esses "passos intermediários" e faça-os!

Dica 1: é quase impossível fazer os itens acima em ordem, tipo primeiro o a, depois o b, etc, e por último o g. Faça eles na ordem que conseguir.

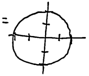
Dica 2: alguns itens podem te ajudar a descobrir que você fez um outro item errado. Se isso acontecer ou conserte o item errado ou explique em português o que você descobriu — respostas incoerentes umas com as outras podem fazer você perder pontos.

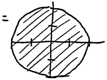
$F(x,y) =$

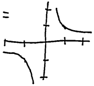
8	5	4	5	8
5	2	1	2	5
4	1	0	1	4
5	2	1	2	5
8	5	4	5	8

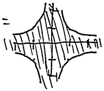
$G(x,y) =$

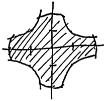
-4	-2	0	2	4
-2	-1	0	1	2
0	0	0	0	0
2	1	0	-1	-2
4	2	0	-2	-4

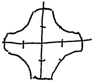
$C_1 = F^{-1}(4) =$ 

$C_2 = F^{-1}([-1,4]) =$ 

$C_3 = G^{-1}(1) =$ 

$C_4 = G^{-1}([-1,1]) =$ 

$C_5 = C_2 \cap C_4 =$ 

$C_6 = \partial C_5 =$ 

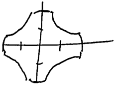
$D = C_5$

$H(x,y) = (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2$
$= (x-1)^2 - (y-0)^2$

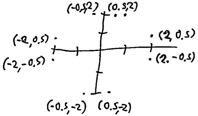
$=$

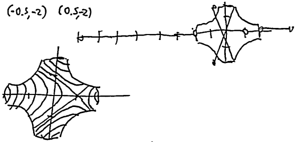
0	-3	-4	-3	0
3	0	-1	0	3
4	1	0	1	4
3	0	-1	0	3
0	-3	-4	-3	0

ESBOÇO DE GABARITO

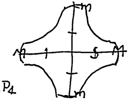
a) $D =$ 

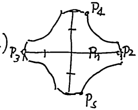
b) COORDENADAS APROXIMADAS DOS BICOS:



c) 

d) S - SELA
M - MÁXIMO
m - MÍNIMO



e) 

$P_1 = (1,0)$
$P_2 = (2,0)$
$P_3 = (-2,0)$
$P_4 = (0.5,2)$
$P_5 = (0.5,-2)$

f) $\nabla H = (H_x, H_y)$
$= (2(x-1), -2y)$

$\nabla H(P_1) = \overrightarrow{(0,0)}$
$\nabla H(P_2) = \overrightarrow{(2,0)}$
$\nabla H(P_3) = \overrightarrow{(-6,0)}$
$\nabla H(P_4) = \overrightarrow{(-1,-4)}$
$\nabla H(P_5) = \overrightarrow{(-1,4)}$